УДК 533.6.011

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ НЕВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА, ГРАНИЧАЩЕГО С ВАКУУМОМ

Э. З. АПШТЕЙН, И. С. ГУЩИН

(Москва)

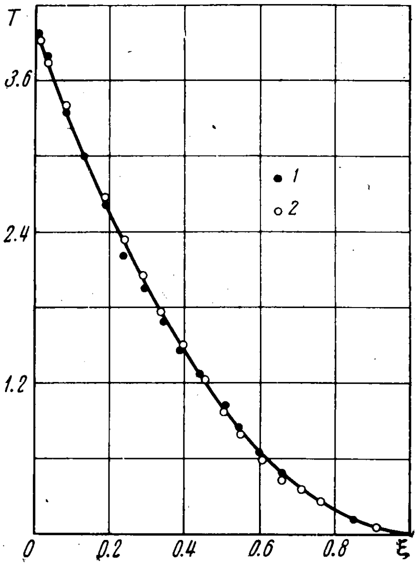
Рассматривается одномерное, нестационарное движение сжимаемого невязкого теплопроводного газа, граничащего с одной стороны с пустотой, а с другой стороны — со стенкой. Граничные условия на стенке выбраны в виде, обеспечивающем автомодельность. Получено точное решение задачи, которое использовалось для сравнения с численным счетом.

1. Рассмотрим невязкий теплопроводный газ, подчиняющийся уравнениям состояния $p=\rho T$, $\varepsilon=T/(\gamma-1)$ и граничащий на плоскости $x=0$ с испаряющейся стенкой (температура измеряется в единицах энергии). Уравнения одномерного нестационарного движения газа в эйлеровых координатах имеют вид

$$\rho_t^*+u^*\rho_x^*+\rho^*u_x^*=0,\quad u_t^*+u^*u_x^*+T_x^*+\rho_x^*T^*/\rho^*=0,\quad T_t^*+u^*T_x^*(\gamma-1)\,w_x/\rho^*+T^*u_r^*=0 \tag{1.1}$$

Здесь ρ^*, u^*, T^*, $w=-\lambda T_r^*$ — плотность, скорость, температура и поток тепла, t — время, x — пространственная координата. Предположим, что коэффициент теплопроводности зависит от плотности и температуры по закону $\lambda=\lambda_0 p^{*i}T^{*q}$, где λ_0 — некоторая константа. На границе газа с вакуумом Г и на стенке ($x=0$) поставим условия

$$p^*|_\Gamma=0,\quad w|_\Gamma=0,\quad \rho^*u^*|_{x=0}=M_w(t),\quad T^*|_{x=0}=T_w(t) \tag{1.2}$$



Здесь $M_w(t)$ и $T_w(t)$ — некоторые функции времени, задающие вдув (или отсос) и температуру стенки.

2. Будем искать решение в виде

$$\rho^*(x,t)=\rho_0 t^{m_1}\rho(\xi),\quad u^*(x,t)=\sqrt{T_0}\,t^{m_2}u(\xi),\quad T^*(x,t)=T_0 t^{m_3}T(\xi) \tag{2.1}$$

где $\rho(\xi)$, $u(\xi)$, $T(\xi)$ — безразмерные функции автомодельной переменной $\xi=x/(At^a)$. Задача будет автомодельной, если $a=1$, m_1 – любое число, $m_2=0$, $m_3=0$, q – любое число, $i=1+1/m_1$. Если координату x обезразмерить с помощью $\sqrt{T_0}$ и t, то получим $\xi=x/(\sqrt{T_0}t)$. Вид автомодельных граничных условий следующий:

$$M_w(t)=M_0t^{m_1},\qquad T_w=\mathrm{const}$$

Выпишем уравнения и граничные условия в безразмерных переменных

$$\rho'=\rho[-m_1(u-\xi)+T']/[(u-\xi)^2-T],$$
$$u'=[-(\bar u-\xi)T'+m_1T]/[(\bar u-\xi)^2-T]$$

$$\begin{aligned}T''=&-q(T')^2/T-(1+1/m_1)T'[T'-m_1(u-\xi)]/[(u-\xi)^2-T]+\\&+T'(\bar u-\xi)\rho^{-1/m_1}/[T^q\mu(\gamma-1)]+\\&+(1/u)\bar\rho^{-1/m_1}T^{1-q}[m_1T-(\bar u-\xi)T']/[(u-\xi)^2-T]\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\mu = \lambda_0 \rho_0^{1/m_1} T_0^{q-1}$$

$$\rho T|_\Gamma=0, \quad \rho^{1+1/m_1}T^qT'|_\Gamma=0, \tag{2.3}$$
$$\rho u|_{\xi=0}=M_0/\rho_0\sqrt{T_0}, \quad T|_{\xi=0}=T_w/T_0$$

Задача (2.2), (2.3) имеет решение

$$u=1+c_0(1-\xi), \quad \rho=c_1(1-\xi)^\alpha, \quad T=c_2(1+\xi)^2, \quad \alpha=-2(q-1)m_1 \tag{2.4}$$
$$c_0=-(\alpha-m_1)/(1+\alpha), \quad c_2=-c_0(1+m_1)/[(1+\alpha)(\alpha+2)]$$
$$c_1=\left[2\mu(1+\alpha)c_2\frac{2q+1+\alpha(m_1+1)/m_1}{\alpha-m_1-2(m_1+1)/(\gamma-1)}\right]^{-m_1}$$

Выполнение граничных условий обеспечивается выбором констант M_0 и T_w.

3. Решение (2.4) использовалось для проверки точности численного решения задачи (1.1), (1.2) с подвижной границей, положение которой определяется в процессе решения. Для численного решения был предложен разностный метод, основанный на схеме с весами для уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах [1] с видоизменением аппроксимации вблизи границы. Значения констант в (2.4) были выбраны следующие: $\gamma={}^5/_3$, $q={}^7/_2$, $m_1=-{}^2/_5$, $\mu={}^1/_2$. При этом $\alpha=2$, $i=-{}^3/_2$, $c_0=-0.8$, $c_1=0.04$, $c_2=0.04$. Кроме того, $T_0=100$, $\rho_0=100$, $M_0=3.64$, $T_w=8.8$.

В качестве начальных условий для численных расчетов брались значения точного решения в точках разностной сетки в момент $t_0=0.02$.

На фигуре в автомодельных переменных приведено распределение температуры в движущемся газе. Сплошной линией показано точное решение, точками — численное для двух моментов времени: $t=t_0=0.093$ (точки *1*) и $t-t_0=0.453$ (точки *2*). Результаты численного расчета согласуются с точным решением, хотя вблизи границы были замечены некоторые расхождения, что не проявлялось в ряде других тестов для этой схемы. Выбором некоторых параметров удалось подобрать оптимальный вариант метода.

Поступила 5 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Полностью консервативные разностные схемы. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 4.