УДК 532.54

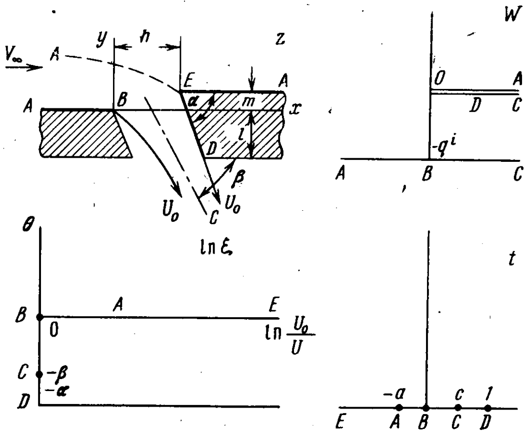
БОКОВОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ПОТОКА ЧЕРЕЗ НАСАДОК

П. П. КОСМАЧЕВ, Ю. А. СКОБЕЛЬЦЫН

(Грозный)

Найден коэффициент сжатия при истечении из насадков, расположенных под углом 60° к потоку жидкости для случая безвихревого движения в потоке и насадке. Определены условия, при которых такой поток существует. Показано, что увеличение относительной длины насадка не сказывается на значении коэффициента сжатия.

В различных современных технических устройствах довольно часто встречаются случаи отделения части жидкости под различными углами к основному потоку. Случай безвихревого истечения идеальной жидкости из потока через насадок под углом 90° к потоку, теоретически рассмотрен в [1]. Ниже предлагается теоретическое решение для случая отделения идеальной жидкости через насадок, расположенный под углом 60° к оси потока.



Фиг. 1

Рассмотрим течение, соответствующее схеме, представленной на фиг. 1. Применим метод Жуковского [2] для нахождения параметров, определяющих данное течение жидкости.

В физической плоскости $z=x+iy$ введем прямоугольную систему координат x, y и предположим, что на линии тока AE $\psi=0$, тогда на ABC $\psi=-q$ (q – расход жидкости через насадок). В плоскости комплексного потенциала $W=\varphi+i\psi$ область течения – полуплоскость $\psi>-q$ с разрезом по положительной части действительной оси. В плоскости логарифмического годографа $\ln\xi=\ln(v_0/v)+i\theta$ область течения – полуполоса $-\alpha<\theta<0$, $\ln(v_0/v)>0$. Отобразим области W и $\ln\xi$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t>0$ параметрического переменного t, полагая, что $E\to t=\infty$, $B\to t=0$, $D\to t=1$, $A\to t=-a$, $C\to t=c$. Отображение найдем по формуле Шварца — Кристоффеля

$$W=A_1\int(t+a)^{-2}(t-c)^{-1}\,dt+A_2=\frac{A_1}{a+c}\left(\frac{1}{t+a}+\frac{1}{a+c}\ln\frac{t-c}{t+a}\right)+A_2 \qquad (1)$$

$$\ln\zeta=B_1\int t^{-1/2}(t-1)^{-1/2}\,dt+B_2=2B_1\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+B_2 \qquad (2)$$

$$A_1=-\frac{q}{\pi}(a+c)^2,\qquad A_2=0,\qquad B_1=\frac{\alpha}{\pi},\qquad B_2=-i\alpha$$

$$a=\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{v_\infty}{v_0}\right)^{\pi/\alpha}\right]^2\left(\frac{v_\infty}{v_0}\right)^{-\pi/\alpha},\qquad c=\frac{1}{2}\left(1-\cos\pi\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

где a и c – образы точек A и C.

Используя условие $q=v_0\delta$, найдем

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{\delta}{\pi}(a+c)^2\frac{(1-2t-2\sqrt{t^2-t})^{\alpha/\pi}}{(t+a)^2(t-c)} \qquad (3)$$

Из (3) для случая $\alpha=\pi/3$

(4) $$z=-48\frac{\delta}{\pi}(a+c)^2\int\frac{v^6(v^6-1)\,dv}{[v^6-2v^3(1-2a)+1]^2[v^6-2v^3(1-2c)+1]}$$

Применяя теорию вычетов и разлагая подынтегральную функцию на простые дроби с последующим интегрированием их почленно, получаем

(5) $$z=-48\frac{\delta}{\pi}(a+c)^2\left[A\ln(v-b)+B\ln\left(v-\frac{-b+b\sqrt{3}\,i}{2}\right)+\right.$$
$$+C\ln\left(v-\frac{-b-b\sqrt{3}\,i}{2}\right)+D\ln(v-d)+E\ln\left(v-\frac{-d+i\sqrt{3}\,d}{2}\right)+$$
$$+F\ln\left(v-\frac{-d-i\sqrt{3}\,d}{2}\right)+P\ln(v-p)+Q\ln\left(v-\frac{-p+i\sqrt{3}\,p}{2}\right)+$$
$$+M\ln\left(v-\frac{-p-i\sqrt{3}\,p}{2}\right)+N\ln(v-q)+R\ln\left(v-\frac{-q+i\sqrt{3}\,q}{2}\right)+$$
$$\left.+S\ln\left(v-\frac{-q-i\sqrt{3}\,q}{2}\right)-\frac{1}{12(a+c)}\frac{v^4}{v^6-2(2a+1)v^3+1}\right]+\text{const}$$

$$v=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}-\sqrt{t}}},\quad b=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^{2/3};\ d=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^{2/3};$$
$$p=(\sqrt{1-c}+i\sqrt{c})^{2/3}$$

$$q=(\sqrt{1-c}-i\sqrt{c})^{2/3},\qquad A=\frac{b[a+c-3\sqrt{a(a+1)}]}{144(a+c)^2\sqrt{a(a+1)}},\qquad B=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}A$$

$$C=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}A,\qquad D=-\frac{d(a+c+3\sqrt{a(a+1)})}{144(a+c)^2\sqrt{a(a+1)}},\qquad E=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}D$$

$$F=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}D,\qquad P=\frac{p}{48(a+c)^2},\qquad Q=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}P,\qquad M=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}P$$

$$N=\frac{q}{48(a+c)^2},\qquad R=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}N,\qquad S=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}N$$

Найдем const. Для этого в точке D полагаем $t=0$ (тогда $v=1$), $z=0$. При всех дальнейших вычислениях берем главные значения корней и логарифмов, причем действия производим в тригонометрической форме. После всех упрощений, отделения действительной и мнимой частей получаем

(6) $$\text{const}=\frac{\delta}{\pi}\left[-A'\ln\frac{b-1}{\sqrt{1+b+b^2}}-D'\ln\frac{1-d}{\sqrt{1+d+d^2}}+\frac{a+c}{a}-\right.$$
$$-\sqrt{3}A'\,\mathrm{arctg}\frac{b\sqrt{3}}{b+2}-\sqrt{3}D'\,\mathrm{arctg}\frac{d\sqrt{3}}{d+2}+\cos\gamma\ln\frac{\cos\theta'}{1-\cos\gamma}-$$
$$\left.-\sqrt{3}\sin\gamma\ln(2\cos\theta')+\pi\sin\gamma+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cos\gamma-A'\pi i\right]$$

$$A'=-\frac{b[a+c-\sqrt{3(a+1)}]}{3\sqrt{a(a+1)}},\qquad D'=\frac{d[a+c+3\sqrt{a(a+1)}]}{3\sqrt{a(a+1)}},$$

$$\gamma=\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{c}{1-c}},\qquad d=b^{-1}=\frac{v_\infty}{v_0},\qquad \theta=\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2},\qquad \theta'=\frac{\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}$$

Детальный анализ показывает, что $\gamma=\beta$.

С учетом этих выражений

$$\text{const} = \frac{\delta}{\pi}\left[-(A'+D')\ln\frac{1-d}{\sqrt{1+d+d^2}} - \sqrt{3}A'\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1+2d} - \right. \tag{7}$$

$$-\sqrt{3}D'\operatorname{arctg}\frac{d\sqrt{3}}{d+2} + \frac{a+c}{a} - \cos\beta\ln\frac{\cos\theta}{1-\cos\beta} -$$

$$\left. -\sqrt{3}\sin\beta\ln(2\cos\theta) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cos 2\theta - A'\pi i\right]$$

В точке D $t=1$, $v={}^1/_2(1+i\sqrt{3})$, $\operatorname{Im} z=-l$. Изменив знак (толщина стенок положительна), после преобразований и отделения мнимых частей, получаем:

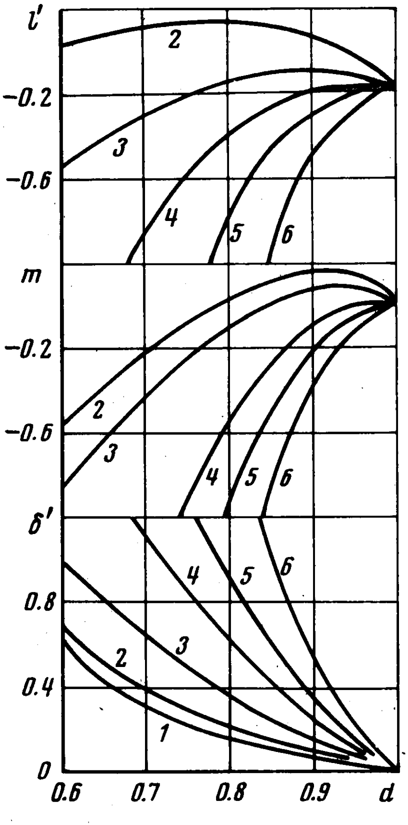
$$\frac{l}{\delta} = \frac{1}{\pi}\left[-A'\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}d}{2-d} - \right. \tag{8}$$

$$-\frac{\pi}{6}(A'+D') + \frac{1}{2}(A'+D')\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(1-d)}{1+d} +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}(A'+D')\ln\frac{\sqrt{1-d+d^2}}{1+d} - D'\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2d-1} +$$

$$+D'\pi - \pi\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\ln\frac{\sin(\pi/6+\beta/2)}{\sin\theta} +$$

$$\left. + \sin\beta\ln\frac{\cos\beta/2}{\sin\theta}\right]$$



Фиг. 2

При стремлении β к предельному углу $\pi/3$ последние два слагаемых стремятся к $+\infty$, т. е. толщина стенок не играет роли. В точке E $t\to\infty$ по действительной оси, тогда $|v|\to\infty$ и $\operatorname{Im} v\to+\infty$, $\operatorname{Re} v\to+\infty$.

Из (5) следует: $\operatorname{Re} z=0+\operatorname{Re}\text{const}$.

Но в точке E $\operatorname{Re} z=h$, откуда

$$\frac{h}{\delta} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}(A'+D')\ln\frac{1+d+d^2}{(1-d)^2} - \right. \tag{9}$$

$$-\sqrt{3}A'\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1+2d} - \sqrt{3}D'\operatorname{arctg}\frac{d\sqrt{3}}{d+2} +$$

$$+\cos\beta\ln\frac{\cos\theta}{1-\cos\beta} - \sqrt{3}\sin\beta\ln(2\cos\theta) +$$

$$\left. + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cos 2\theta + \frac{a+c}{a}\right]$$

Используя условие $\operatorname{Im} z|_E=m$, получаем $A'=-m/\delta$. В случае стенки без уступа $m=0$, $A'=0$, $c=-a+3\sqrt{a(a+1)}$. Выражения (8), (9) с учетом последних соотношений определяют условия, при которых боковое отделение жидкости носит характер безвихревого движения.

На фиг. 2 выражения (8), (9) с учетом $A'=-m/\delta$ представлены графически и могут быть использованы для нахождения параметров l, m, h, обеспечивающих безвихревое истечение, и коэффициента сжатия δ/h ($l'=l/h$, $m'=m/h$, $\delta'=\delta/h$). Кривая *1* соответствует значению $\pi/3$, *2* – $\pi/4$, *3* – $\pi/6$, *4* – $\pi/9$, *5* – $\pi/12$ и *6* – $\pi/18$.

Поступила 28 I 1974