

## О ПУЛЬСАЦИИ СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. И. БЫКОВЦЕВ, Г. С. РОЗАРЕНОВ

(Воронеж)

Начиная с исследований Рэля и Лемба, изучавших движение кавитационной полости, вопросам пульсации газовых пузырьков посвящены работы многих авторов [1-6].

В [1] изучалось схлопывание сферической каверны в предположении, что сопротивлением газа и пара внутри каверны можно пренебречь. В [2] получено дифференциальное уравнение для радиуса пузырька в предположении, что внутри каверны находятся газ и пары жидкости, причем инерцией газа и пара внутри каверны пренебрегалось. В [3-4] интегрировались уравнения Нолтинга и Неппаерса на ЭВМ и было обнаружено, что в стадии схлопывания граница каверны движется со скоростями, в несколько раз превышающими скорость звука. Этот вывод не согласуется с физическими представлениями о процессе и является следствием некорректности уравнений Нолтинга — Неппаерса при этих скоростях.

Обсуждению проблемы схлопывания сферической каверны посвящен недавний обзор [6], в котором обсуждается возможность возникновения высоких давлений и температур, а следовательно, и скоростей при схлопывании сферических пузырьков. Анализируется влияние сжимаемости, теплопроводности и вязкости, на возникновение высоких давлений и делается вывод о том, что эти факторы не могут существенно уменьшить скорость схлопывания. В заключение высказывается предположение, что этот эффект можно связать с влиянием испарения и химических реакций.

В данной заметке показано, что основным механизмом торможения схлопывающейся каверны является инерция газа внутри каверны. Рассматривается пульсация сферической каверны в несжимаемой жидкости с учетом инерции идеального газа внутри пузырька. Движение газа описывается уравнениями газовой динамики в сферической системе координат, которые численно интегрируются методом характеристик.

Показано, что в стадии расширения полученные результаты отличаются от результатов интегрирования уравнений Нолтинга — Неппаерса на величины порядка погрешности вычислений. Однако в стадии сжатия точное решение значительно отличается от поведения решения уравнений Нолтинга — Неппаерса. Это связано с тем, что в точном решении появляются ударные волны, диссипация энергии на которых быстро гасит скорости схлопывания полости. Отметим, что попытка приближенного учета инерции газа в полости была предпринята в [5], в которой, однако, не удалось получить конкретных результатов.

Рассмотрим пульсацию сферической полости, наполненной идеальным газом, в неограниченной несжимаемой вязкой жидкости под действием давления, изменяющегося на бесконечности во времени по заданному закону.

В этом случае движение будет сферически симметричным. Из условия несжимаемости на границе жидкости с полостью при  $r=R(t)$  с учетом силы поверхностного натяжения и вязкости жидкости для гидростатического давления получим

$$P = \rho_1 \left( R\dot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\mu\dot{R}}{R} + P_\infty(t)$$

где  $\rho_1$  — плотность жидкости, а  $\sigma$  и  $\mu$  — коэффициенты поверхностного натяжения и вязкости жидкости.

Будем интегрировать систему уравнений и граничных условий, описывающих сферически симметричное движение газа в полости

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} = -2 \frac{\rho u}{r}$$

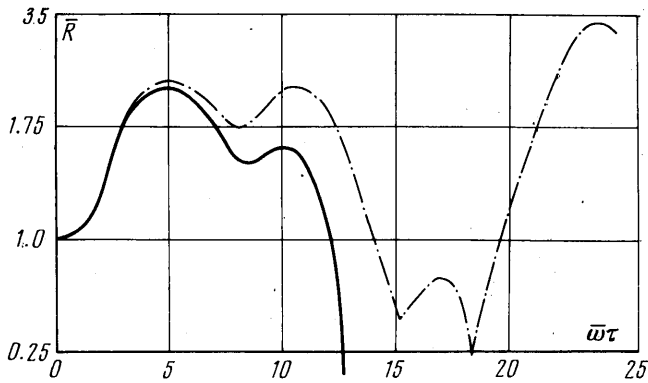
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial r} = 0$$

$$(2) \quad P = k(\dot{S})\rho^*$$

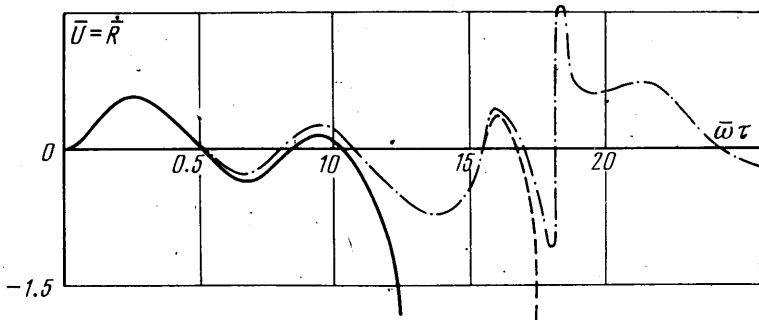
$$\begin{aligned}
 (3) \quad & t=0: r \in [0, R_0], \quad \rho(0, r) = \rho_0, \quad P(0, r) = P_0 \\
 & u(0, r) = 0, \quad S(0, r) = \text{const} \\
 & r=0: u(t, 0) = 0 \\
 & r = R(t): u(t, R(t)) = \dot{R}, \quad P(t, R) = \rho_1 R \frac{du}{dt} + \\
 & + u \left( \frac{3}{2} \rho_1 u + 4\mu R^{-1} \right) + 2\sigma R^{-1} + P_\infty(t)
 \end{aligned}$$

где  $P$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $S$  — энтропия,  $u$  — радиальная скорость движения газа.

После приведения задачи (1)–(3) к безразмерному виду воспользуемся методом характеристик. Вводя термодинамическую величину  $\Phi$  по формуле  $\rho c d\Phi = dP + \rho c N dS$ ,



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $N$  — некоторая термодинамическая величина,  $\partial\Phi/\partial P = (\rho c)^{-1}$ , используя инварианты Римана  $A = \Phi + u$ ,  $B = \Phi - u$  и обозначая  $\alpha = u + c$ ,  $\beta = u - c$ , запишем уравнения (1) вдоль характеристик в виде

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & dr = \alpha dt, \quad dA = F dt + N dS \\
 & dr = \beta dt, \quad dB = F dt + N dS \\
 & dr = u dt, \quad dS = 0
 \end{aligned}$$

Численная схема интегрирования системы (4) при некоторых начальных и граничных условиях известна [7].

Алгоритм для расчета гладкого течения газа включает в себя расчет точек пересечения  $\alpha$  и  $\beta$  характеристик, расчет точек границы  $r = R(t)$ , расчет точек границы  $r = \varepsilon$  (при  $r = 0$  уравнения (1) имеют особенность) и анализ возникновения ударных волн (пересечение одноименных характеристик).

Соотношения на ударной волне имеют вид

$$(5) \quad \begin{aligned} D-u_- &= \rho_+ (u_+ - u_-) (\rho_+ - \rho_-)^{-1} \\ (u_+ - u_-)^2 &= -(P_+ - P_-) (\rho_+^{-1} - \rho_-^{-1}) \\ E_+ - E_- &= -\frac{1}{2} (P_- - P_+) (\rho_+^{-1} - \rho_-^{-1}) \end{aligned}$$

где индексы «плюс» и «минус» обозначают величины перед и за фронтом ударной волны соответственно,  $D$  — скорость распространения ударной волны. Соотношения (5) используются при расчете прохождения ударной волны, а также отражения ее от границ  $r=0$  и  $r=R(t)$ . При этом отраженная от первой границы волна будет ударной, а отраженная от границы  $r=R(t)$  — волной разряжения.

По описанному алгоритму была составлена программа для ЭВМ «БЭСМ-4», которая учитывала возможность ослабления как ударных волн, так и слабых разрывов, ограничивающих волну разряжения.

Расчет динамики кавитационной полости был выполнен при  $P=P_0+P_1 \sin \omega t$ ,  $P_0=1$  ат,  $P_1=10$  ат,  $R_0=0,01$  см,  $\omega=450$  кГц,  $\sigma=72,75$  дн,  $\mu=0,02$  г/см·сек,  $\kappa=1,4$ .

Одновременно был проведен расчет задачи по уравнению Нолтинга — Неппаерса. Сравнение результатов показано на фиг. 1, 2. Из результатов расчета следует, что в стадии расширения уравнения Нолтинга — Неппаерса и предложенная модель дают практически совпадающие результаты. Однако в стадии сжатия, когда уравнения Нолтинга — Неппаерса приводят к скоростям схлопывания порядка скорости звука, уточненная теория дает существенно отличающиеся результаты. Это связано с тем, что в стадии сжатия внутри каверны возникают сильные ударные волны, которые приводят к переходу кинетической энергии в тепловую и тормозят пульсацию каверны.

В стадии расширения сильных ударных волн не возникает, поэтому можно ожидать, что при расширении движение каверны хорошо описывается уравнениями Нолтинга — Неппаерса. С целью проверки этой гипотезы были проведены пробные расчеты на ЭВМ. Результаты одного из них показаны на фиг. 2. При расчете в момент времени  $t\omega=14,25$  ставилось начальное условие, соответствующее решению уточненной теории, и решалось уравнение Нолтинга — Неппаерса.

Полученные результаты показывают близость решений.

Таким образом, учет инерции газа в кавитационной полости приводит к резкому снижению скоростей схлопывания каверны и устраняет парадокс, который обсуждался в работах [1–6]. Причиной снижения скорости схлопывания является не испарение и химические реакции в полости, как предполагалось в [6], а диссипация в ударных волнах, возникающих внутри каверны. В стадии расширения модель Нолтинга — Неппаерса дает результаты, практически не отличающиеся от результатов уточненной теории.

Поступила 1 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Birkhoff G., Plesset M., Simmons N. Wall effects in cavity flow. 1. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 8, No. 2. 2. Quart. Appl. Math., 1952, vol. 9, No. 4.
2. Noltingk B. E., Neppiras E. A. Cavitation produced by ultrasonics. Proc. Phys. Soc., London, 1950, vol. 63B, pt 9; 1951, vol. 64B, pt 12.
3. Акуличев В. А. Пульсации кавитационных пузырьков в поле ультразвуковой волны. Акуст. ж., 1967, т. 13, вып. 2.
4. Ворогнникова М. И., Солоухин Р. И. Расчет пульсаций газовых пузырьков в несжимаемой жидкости под действием периодически изменяющегося давления. Акуст. ж., 1964, т. 10, вып. 1.
5. Trilling L. The collapse and rebound of a gas bubble. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, No. 1.
6. Флинь Г. Динамика кавитационных пузырей, приведенных в движение с большой амплитудой акустическим полем давления. Механика, Период. сб. перев. иностр. статей, 1972, № 6.
7. Жуков А. И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1960, вып. 58.