

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
2. Барышев Ю. В., Виноградов Ю. А., Леонтьев А. И., Рождественский В. И. Коэффициенты восстановления на проницаемой поверхности и в области газовой завесы в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.

УДК 532.527.2

РАСЧЕТ ВТОРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ  
ЦИЛИНДРАМИ

И. П. АНДРЕЙЧИКОВ

(Ростов-на-Дону)

Исследуется движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися концентрическими цилиндрами после потери устойчивости течения Куэтта.

Изучению характера потери устойчивости течения Куэтта вблизи точки ветвления посвящены работы [1-3], где имеются ссылки на ряд работ других авторов. В статье [3] методом Ляпунова - Шмидта рассчитан вторичный стационарный режим движения при малой сверхкритичности.

В настоящей работе вторичный стационарный режим (вихри Тейлора) строится численными методами. Периодические вдоль оси цилиндров решения уравнений Навье - Стокса разыскиваются в виде рядов Фурье. Для коэффициентов получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача для этой системы решается путем сведения к задаче Коши. Метод, близкий к использованному, для случая узкого зазора между цилиндрами применялся в [4].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя концентрическими цилиндрами радиусов  $r_1, r_2$ , вращающимися с угловыми скоростями  $\omega_1, \omega_2$ . Будем искать решения  $2\pi/\alpha$ -периодические вдоль оси цилиндров с заданным волновым числом  $\alpha$ . Расход жидкости через поперечное сечение считается равным нулю.

Безразмерная скорость  $v(r, \theta, z, t) = \{v_r, v_\theta, v_z\}$  и давление  $p(r, \theta, z, t)$  удовлетворяют уравнениям Навье - Стокса,  $R = \omega_1 r_1^2 / \nu$  - число Рейнольдса.

На поверхностях цилиндров заданы условия

$$(1.1) \quad v|_{r=r_1} = \{0, 1, 0\}, \quad v|_{r=r_2/r_1} = \{0, \omega_2 r_2 / \omega_1 r_1, 0\}$$

Кроме этого, должны выполняться равенства

$$(1.2) \quad \int_0^{2\pi} \int_1^{r_2/r_1} v_z(r, \theta, z, t) r dr d\theta = 0$$

$$v, p(r, \theta, z, t) = v, p(r, \theta, z + 2\pi/\alpha, t)$$

Всем этим условиям удовлетворяет течение Куэтта

$$(1.3) \quad v^0(r) = \{0, ar + b/r, 0\}, \quad a = \frac{\omega_2}{\omega_1} + \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) \left( \frac{r_2^2}{r_1^2} - 1 \right)^{-1}, \quad b = 1 - a$$

Оно не зависит от числа Рейнольдса  $R$  и определяется параметром  $a$ .

Будем предполагать, что параметры  $\omega_2/\omega_1$  и  $r_2/r_1$  фиксированы и удовлетворяют условию  $a < 0$ . Тогда почти для всех  $\alpha$  существует критическое значение  $R_*$  [1, 2], являющееся точкой бифуркации решений нелинейной системы. При переходе числа Рейнольдса  $R$  через критическое значение  $R_*$  течение (1.3) теряет устойчивость и возникает вторичный стационарный режим - вихри Тейлора. Для малой сверхкритичности вторичный поток устойчив относительно вращательно-симметричных возмущений, его расчет сделан в [3].

**2. Методика вычислений.** Рассмотрим стационарные осесимметричные решения  $v(r, z)$ ,  $p(r, z)$ . Они определяются уравнениями

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - R \left[ v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - v_r \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{r} \right] \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) - \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + R \left[ v_r \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial p}{\partial z} + R \left[ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

и условиями (1.1), (1.2).

Функции  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $v_z$ ,  $p(r, z)$  будем искать в виде разложений в ряды Фурье по  $z$ . Ограничиваясь конечным числом ( $m$ ) гармоник, имеем

$$(2.2) \quad \{v_r, v_\theta, v_z, p\}(r, z) = \sum_{k=-m}^m e^{ik\alpha z} \{v_{kr}, v_{k\theta}, v_{kz}, p_k\}(r)$$

При этом  $v_{kr}$ ,  $v_{k\theta}$ ,  $p_k$  считаются вещественными функциями,  $v_{kz}$  — чисто мнимой ( $v_{-kz} = -v_{kz}$ ). Последние требования исключают произвольные сдвиги по  $z$  в решениях (2.2).

Согласно граничным условиям (1.1) из первого и четвертого уравнений (2.1) следует, что  $v_{0r} = v_{0z} = 0$ , а компонента  $v_z$  удовлетворяет (1.2).

Подставляя (2.2) в (2.1), приходим к системе  $6(m+1)$  вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения векторов

$$(2.3) \quad \mathbf{b}_k(r) = \{v_{kr}, v_{k\theta}, -iv_{kz}, p_k, v_{k\theta}', -iv_{kz}'\}, k=0, 1, 2, \dots, m$$

Эту систему будем интегрировать численно как задачу с начальными данными. Полагая для определенности  $p_0(1) = 0$  и пользуясь первым условием (1.1), имеем

$$(2.4) \quad v_{0\theta}(1) = 1, \quad p_0(1) = 0, \quad v_k(1) = 0, \quad k=1, 2, \dots, m$$

Неизвестные начальные данные запишем в форме

$$(2.5) \quad \mathbf{c} = \{v_{0\theta}', p_1, v_{1\theta}', -iv_{1z}', \dots, p_m, v_{m\theta}', -iv_{mz}'\}$$

Вектор  $\mathbf{c}$  необходимо выбрать таким, чтобы удовлетворялось второе условие (1.1)

$$(2.6) \quad \mathbf{f}(\mathbf{c}) = 0, \quad \mathbf{f} = \{v_{0\theta} - \omega_2 r_2 / \omega_1 r_1, v_{1r}, v_{1\theta}, v_{1z}, \dots, v_{mr}, v_{m\theta}, v_{mz}\}(r_2/r_1)$$

Решая уравнение (2.6), определяем начальные данные (2.5) и одновременно получаем решение (2.3).

Для рассматриваемых значений параметров этот метод позволяет получить решение с заданной точностью. Его применение к уравнениям, имеющим сильно осциллирующие решения, дано в [5].

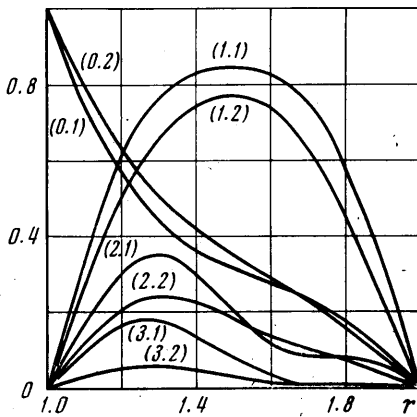
**3. Результаты расчетов.** При решении задачи Коши для определения коэффициентов Фурье (2.3) используется метод Рунге — Кутты с погрешностью  $h^5$  и автоматическим выбором шага  $h$ . Трансцендентное уравнение (2.6) решается методом Ньютона.

Расчеты проведены для случая  $r_2/r_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\alpha = 3$ . Здесь  $R_* = 68.32$ . При вычислениях вторичного течения в разложениях (2.2) учитывались три гармоники ( $m=3$ ). Получены графики коэффициентов Фурье разложений компонент скорости и давления (2.3). Функции  $v_{k\theta}(r)$  для значений числа Рейнольдса  $R=105^{-1}$  и 85.3 представлены на фиг. 1. Кривые помечены парой цифр, первая из которых обозначает номер коэффициента в разложении, вторая — величину числа Рейнольдса. При этом на оси ординат отложено  $v_{0\theta}$ ,  $10v_{1\theta}$ ,  $20v_{2\theta}$ ,  $20v_{3\theta}$  соответственно.

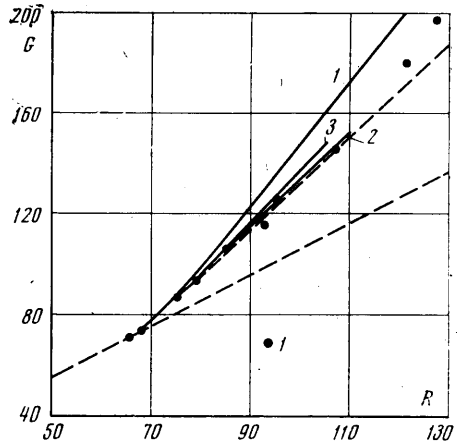
С ростом числа Рейнольдса средний поток  $v_{0\theta}$  незначительно увеличивается вблизи внешнего цилиндра и убывает в остальной части зазора (фиг. 1, кривые (0.1),

(0.2)). С увеличением  $R$  нарастают также значения амплитуд первых гармоник (фиг. 1, кривые (1.1), (1.2)), хотя они сохраняют характер поведения собственных функций [3]. Основной вклад третьих гармоник (кривые (3.1), (3.2)) имеет место вблизи внутреннего цилиндра и при  $R=85.3$  не превышает 10% значений первой гармоники.

На фиг. 2 представлен момент сил вязкости, действующих на внутренний цилиндр  $G=2\pi\rho\nu^2hR(1-\nu_0\theta')_{r=1}$ , где  $h$  — высота цилиндра. Линии 1, 2, 3 соответствуют вычислениям с учетом одной, двух и трех гармоник ( $m=1, 2, 3$ ) соответственно для случая  $\rho=0.8404$ ,  $\nu=0.1226$ ,  $h=5$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Пунктирными прямыми дан момент сопротивления для течения Куэтта (1.3)  $G=1.058R$  и величина  $G$ , вычисленная методом Ляпунова — Шмидта [3],  $G=72.24+1.88(R-R_*)$ .

Значками 1 отмечены экспериментальные данные [6].

Отметим еще расчеты вращающего момента Деви [7], близкие к соответствующим вычислениям работы [3].

Поступила 8 II 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О бифуркации вращательных течений жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 2.
2. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
4. Шкадов В. Я. Стационарные течения вязкой жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами после потери устойчивости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
5. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
6. Donnelly R. J., Simon N. J. An empirical torque relation for supercritical flow between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt. 3.
7. Davey A. The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt. 3.