

ВЛИЯНИЕ ШИРОТНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ
НА СФЕРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА

И. М. ЯВОРСКАЯ

(Москва)

Изучается движение вязкой термически стратифицированной жидкости в сферическом слое, возникающее вследствие вращения границ слоя с различными угловыми скоростями при неравномерном по широте нагреве внешней границы слоя. Исследуемая задача может рассматриваться как простейшая качественная модель некоторых астро- и геофизических явлений, например течений в атмосферах планет.

Определяющими параметрами задачи являются число Рейнольдса $Re = r_e^2 \Omega_i / \nu$, отношение угловых скоростей вращения $\omega = \Omega_e / \Omega_i$ и радиусов $a = r_e / r_i$ внешней и внутренней сфер, параметр неравномерности нагрева α . Исследование проводится в аппроксимации Буссинеска; предполагается, что числа Рейнольдса Re достаточно малы и решение ищется в виде ряда по целым положительным степеням Re . В аналитическом виде найдены первые два члена ряда при произвольных значениях других определяющих параметров. Установлены возможные типы меридиональных течений и определены области параметров, где осуществляется тот или иной тип циркуляции. Показано, что широтный градиент температуры на внешней границе приводит к появлению новых по сравнению с изотермическим случаем типов меридиональных течений. Получена асимптотика для функции тока меридионального течения в очень тонких и очень толстых слоях.

1. Постановка задачи. В сферическом слое $r_i \leq r \leq r_e$ за счет различных угловых скоростей вращения Ω_i и Ω_e и различных температур T_i и T_e граничных сфер возникает установившееся осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости (индексы i и e относятся ко внутренней и внешней сферам соответственно). Температура внутренней сферы поддерживается постоянной $T_i = T_1$, внешней — переменна и симметрична относительно экватора $T_e(\vartheta)$ (здесь и далее используется сферическая система координат r, ϑ). Жидкость находится в поле центральной гравитационной силы. Подобная постановка задачи может качественно моделировать течения в сферических слоях атмосфер планет при нагреве их солнечной радиацией. Примем простейшую форму для температуры на внешней границе слоя

$$T_e = T_2 [1 - \varepsilon_1 P_2(\mu)]$$

ε_1 и T_2 — постоянные, $\mu = \cos \vartheta$, $P_2(\mu)$ — полином Лежандра.

Используя функцию тока меридионального течения ψ и угловой момент $W = \Omega r^2 \sin^2 \vartheta$ (Ω — угловая скорость вращения жидкости) уравнения движения запишем в безразмерном виде:

$$(1.1) \quad \frac{1}{Re} D^2 W = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} L W$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{Re} D^4 \psi = \frac{2W}{r^2 \sin^2 \vartheta} Q W + \sin \vartheta L \left(\frac{D^2 \psi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{S(a-1)}{r^2} \sin \vartheta \frac{\partial T'}{\partial \vartheta}$$

$$(1.3) \quad \frac{1}{Re} \nabla^2 T' = \frac{Pr}{r^2 \sin^2 \vartheta} L T'$$

$$L = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad S = \frac{\beta g (T_2 - T_1)}{(r_e - r_i) \Omega_i^2}$$

$$Q = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа, $\operatorname{Pr} = \nu/\kappa$ — число Прандтля, β , ν и κ — коэффициенты объемного расширения, кинематической вязкости и теплопроводности соответственно. За характерные масштабы длины и скорости приняты радиус внутренней сферы r_i и линейная скорость $\Omega_i r_i$, а безразмерная температура $T'(r, \theta)$ введена по формуле

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) T'(r, \theta),$$

далее штрих при $T'(r, \theta)$ будет опущен. В уравнении переноса тепла (1.3) пренебрегается выделением тепла за счет вязкости. Система (1.1) — (1.3) решается при следующих граничных условиях:

$$r=1, \quad W = \sin^2 \theta, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = T = 0$$

$$r=a, \quad W = a^2 \omega \sin^2 \theta, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad T = 1 - \varepsilon P_2(\mu),$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 T_2 / (T_2 - T_1)$$

Предполагается, что числа Re достаточно малы. Аналогично [1-3] при малых числах Re будем искать решение в виде рядов по целым положительным степеням Re

$$(1.4) \quad W = \sum_0^{\infty} \operatorname{Re}^{2n} W_{2n}(r, \theta), \quad \psi = \sum_0^{\infty} \operatorname{Re}^{2n+1} \psi_{2n+1}(r, \theta)$$

$$T = \sum_0^{\infty} \operatorname{Re}^{2n} T_{2n}(r, \theta)$$

Подставляя (1.4) в (1.1) — (1.3), получим бесконечную последовательность систем линейных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$(1.5) \quad D^2 W_{2n} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sum_0^{n-1} L_{2k+1} W_{2(n-k-1)}$$

$$(1.6) \quad \nabla^2 T_{2n} = \frac{\operatorname{Pr}}{r^2 \sin \theta} \sum_0^{n-1} L_{2k+1} T_{2(n-k-1)}$$

$$(1.7) \quad D^4 \psi_{2n+1} = \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \sum_0^n W_{2(n-k)} Q W_{2k} - \frac{S(a-1)}{r} \sin \theta \frac{\partial T_{2n}}{\partial \theta} +$$

$$+ \sin \theta \sum_0^{n-1} L_{2k+1} \left(\frac{D^2 \psi_{2(n-k)-1}}{r^2 \sin \theta} \right)$$

$$(1.8) \quad r=1, \quad \psi_{2n+1} = \frac{\partial \psi_{2n+1}}{\partial r} = T_{2n} = 0, \quad W_{2n} = \begin{cases} \sin^2 \theta, & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

$$r=a, \quad \psi_{2n+1} = \frac{\partial \psi_{2n+1}}{\partial r} = 0, \quad T_{2n} = \begin{cases} 1 - \varepsilon P_2(\mu) & \\ 0 & \end{cases} \quad W_{2n} = \begin{cases} a^2 \omega \sin^2 \theta, & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

При $n=0$ уравнения примут вид

$$(4.9) \quad D^2 W_0 = 0; \quad \nabla^2 T_0 = 0$$

$$D^4 \psi_1 = \frac{2W_0}{r^2 \sin^2 \vartheta} Q W_0 - \frac{S(a-1)}{r} \sin \vartheta \frac{\partial T_0}{\partial \vartheta}$$

Очевидно, что разложение по степеням числа Re будет справедливо, если второй член в правой части (1.7) будет того же порядка, что и первый, т. е. параметр $\alpha = S(a-1)\varepsilon$ не должен быть слишком велик; это означает, что движение возникает в основном за счет вращения сфер, а тепловые эффекты имеют второстепенное значение. Однако в тонких слоях, как будет видно далее из асимптотики функции тока при $a \rightarrow 1$, параметр α может быть порядка $(a-1)^{-1}$.

Заметим, что если на внешней границе температура постоянна $\varepsilon=0$, то $T_0 = T_0(r)$ и меридиональное течение в первом приближении по Re не зависит от термической стратификации среды. Тогда из (1.5) при $n=1$ следует, что и W_2 — поправка порядка Re^2 к угловому моменту — также не зависит от тепловых эффектов. Влияние термической стратификации на течение скажется только в третьем приближении по Re , т. е. на функции $\psi_3(r, \vartheta)$.

Существование широтного градиента температуры $\varepsilon \neq 0$, как видно из системы (1.9), влияет на основное меридиональное течение.

2. Анализ меридионального течения. Решение системы (1.9) при граничных условиях (1.8) представляется в следующем виде:

$$(2.1) \quad W_0 = (A_1 r^2 + A_2 r^{-1}) \sin^2 \vartheta$$

$$T_0 = \frac{\alpha}{a-1} (1-r^{-1}) + \varepsilon A_3 (r^{-3} - r^2) P_2(\mu)$$

$$\psi_1 = \Psi(r) P_2^1 \sin \vartheta = \frac{(r-1)^2 (r-a)^2}{r^2} (Ar^3 + Br^2 + Cr + D) P_2^1 \sin \vartheta$$

$$A_1 = \frac{a^3 \omega - 1}{a^3 - 1}, \quad A_2 = -\frac{a^3 (\omega - 1)}{a^3 - 1}, \quad A_3 = \frac{a^3}{a^5 - 1}$$

$$B_1 = -\frac{A_1 A_2}{12}, \quad B_2 = \frac{2A_2^2 - \alpha A_3}{24}, \quad B_3 = \frac{\alpha A_3}{24}$$

где $P_2^1(\mu)$ — присоединенная функция Лежандра. Постоянные A, B, C, D выражаются через A_i и B_i ($i=1, 2, 3$). Отметим, что в этом приближении термические параметры ε и S входят в решение в комбинации $\alpha = \varepsilon S(a-1)$.

Остановимся вкратце на случае, когда динамика жидкости в сферическом слое определяется только вращением границ ($\varepsilon=0$). Такое течение по аналогии с течением между вращающимися цилиндрами назовем сферическим течением Куэтта. Ранее такие течения при малых числах Re исследовались в [1, 2, 4], причем в [2] найдены аппроксимации не только первого, но и более высоких порядков.

Функция тока при $\varepsilon=0$ имеет вид [4]

$$(2.2) \quad \psi_1 = \Psi_0(r) P_2^1 \sin \vartheta = \frac{(r-1)^2 (r-a)^2}{r^2} (A_0 r^3 + B_0 r^2 + C_0 r + D_0) P_2^1 \sin \vartheta$$

$$A_0 = N(\omega-1) [\omega a^2 (2a^4 + 8a^3 + 5a^2 - 2a - 3) + 3a^4 + 2a^3 - 5a^2 - 8a - 2]$$

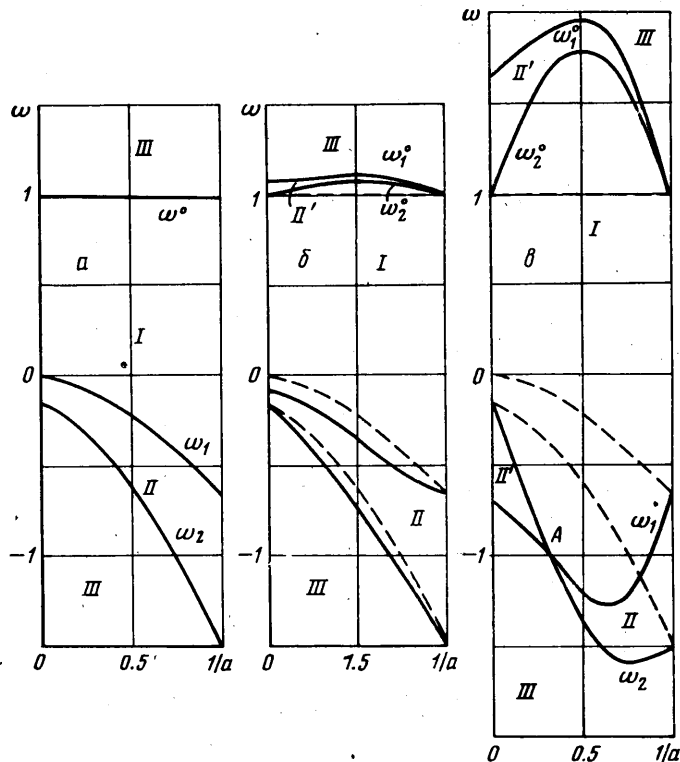
$$D_0 = Na^2(\omega-1) [\omega (2a^5 - a^4 - 16a^3 - 20a^2 - 8a - 2) + 2a^5 + 8a^4 + 20a^3 + 16a^2 + a - 2]$$

$$B_0 = 2(a+1)A_0, \quad C_0 = 2 \frac{a+1}{a} D_0 + \frac{a^4(\omega-1)^2}{12(a^3-1)^2}, \quad N = \frac{a^3}{12\Delta(a^3-1)^2}$$

$$\Delta = 4a^6 + 16a^5 + 40a^4 + 55a^3 + 40a^2 + 16a + 4$$

Как видно из (2.2), функция тока меридионального течения симметрична относительно экватора, обращается в нуль вместе с производной на границах и определяется двумя безразмерными параметрами a и ω [3, 4].

В плоскости параметров a и ω имеются области трех типов, в которых меридиональное течение имеет различный характер. При $0 < \omega < 1$ обе сферы вращаются в одну сторону, причем угловая скорость вращения



Фиг. 1

внешней сферы меньше, чем внутренней. Циркуляция в этом случае состоит из одного вихря с отрицательным направлением вращения. Область с циркуляцией такого типа в плоскости параметров (a, ω) назовем областью влияния внутренней сферы и обозначим I. При $\omega > 1$ сферы вращаются в одну сторону, но внешняя вращается быстрее. Меридиональное течение также состоит из одного вихря, но с положительным направлением вращения. Области такого типа в плоскости (a, ω) называются областями влияния внешней сферы и будут обозначаться III.

Когда сферы вращаются в разные стороны $\omega < 0$, кроме двух рассмотренных меридиональных течений, возможно течение, состоящее в каждой полусфере из двух вихрей, вращающихся в разные стороны, причем вихрь вблизи внутренней (внешней) сферы имеет то же направление, что и в случае $\omega < 1$ ($\omega > 1$). Области с такой циркуляцией в плоскости (a, ω) будем называть областями смешанного влияния и обозначать II. Математи-

чески течение в области смешанного влияния соответствует наличию корня внутри интервала $(1, a)$ у функции $\Psi_0(r)$.

На фиг. 1, a в плоскости $(1/a, \omega)$ представлены области, где осуществляется тот или иной тип циркуляции. (Так как параметр a меняется от 1 до ∞ , на фиг. 1 и 2 области влияния сфер представлены в плоскости $(1/a, \omega)$, а не (a, ω) .) Границы областей влияния различных сфер есть кривые

$$(2.3) \quad \omega_0 = 1$$

$$(2.4) \quad \omega_1(a) = -\frac{15a^4 + 51a^3 + 77a^2 + 53a + 14}{6a^6 + 42a^5 + 93a^4 + 102a^3 + 56a^2 + 14a + 2} \equiv -\frac{K_2(a)}{K_1(a)}$$

$$(2.5) \quad \omega_2(a) = -\frac{2a^6 + 14a^5 + 56a^4 + 102a^3 + 93a^2 + 42a + 6}{a^2(14a^4 + 53a^3 + 77a^2 + 51a + 15)} \equiv -\frac{I_2(a)}{I_1(a)}$$

Кривые (2.4) и (2.5) соответствуют обращению в нуль второй производной по r функции тока $\Psi_0''(r)$ на верхней и нижней границах сферического слоя соответственно, а кривая (2.3) — твердотельному вращению жидкости в слое, т. е. $\Psi_0(r) \equiv 0$.

Формально можно рассмотреть случай, когда обе сферы вращаются с одинаковыми скоростями $\omega = 1$, а меридиональное течение возникает за счет широтного градиента температуры. Тогда

$$(2.6) \quad \psi_1 = -\alpha \Psi_T(r) P_2^1 \sin \theta \equiv -\alpha \frac{(r-1)^2 (r-a)^2}{r^2} (A_T r^3 + B_T r^2 + C_T r + D_T) P_2^1 \sin \theta$$

$$A_T = M(2a^6 + 8a^5 + 20a^4 + 20a^3 + 5a^2 - 2a - 3)$$

$$B_T = M(4a^6 + 16a^5 + 25a^4 + 10a^3 - 10a^2 - 14a - 6)$$

$$C_T = M(6a^6 + 14a^5 + 10a^4 - 10a^3 - 25a^2 - 16a - 4)$$

$$D_T = M(3a^6 + 2a^5 - 5a^4 - 20a^3 - 20a^2 - 8a - 2)$$

$$M = a^2/24(a^5 - 1)\Delta$$

Как видно из (2.6), меридиональное течение зависит от 2 параметров: сложным образом через постоянные A_T, B_T, C_T, D_T от a и линейно от α . Независимо от конкретных значений этих параметров меридиональная циркуляция состоит из одного вихря с отрицательным направлением вращения при $\alpha > 0$ и положительным при $\alpha < 0$. Значения параметров a и α влияют лишь на интенсивность циркуляции и на положение ее максимума.

В случае, когда меридиональное течение определяется как вращением граничных сфер, так и градиентом температуры, приложенным на границах, функция тока (2.1) представляется суммой $\Psi(r) = \Psi_0(r) - \alpha \Psi_T(r)$.

В плоскости $(1/a, \omega)$, как и ранее, можно найти кривые, которые соответствуют обращению в нуль вторых производных функции тока на границах, однако теперь ω_1 и ω_2 будут функциями не только a , но и α

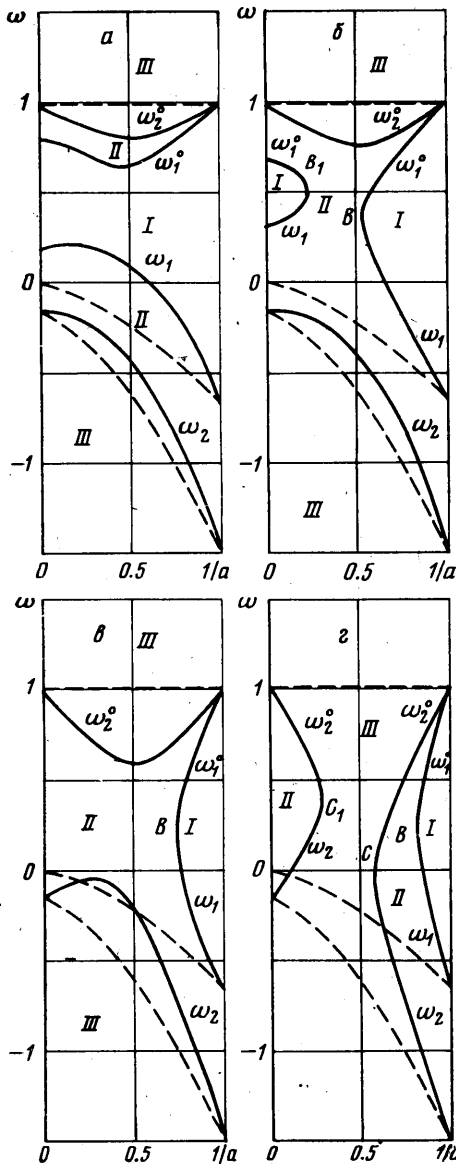
$$(2.7) \quad \omega_1(a, \alpha) = [K_1 - K_2 - F(\alpha, K)]/2K_1,$$

$$\omega_2(a, \alpha) = [I_1 - I_2 - F(\alpha, I)]/2I_1,$$

$$F(\alpha, H) = \sqrt{(H_1 + H_2)^2 + 4\alpha H_1 H_3}$$

$$I_3 = \frac{5(a^2 + a + 1)(a^3 - 1)(3a^5 + 11a^4 + 21a^3 + 21a^2 + 11a + 3)}{2a(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)}$$

$$K_3 = \frac{(a^2 + a + 1)(a^3 - 1)(2a^8 + 14a^7 + 56a^6 + 118a^5 + 145a^4 + 118a^3 + 56a^2 + 14a + 2)}{2a^3(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)}$$



Фиг. 2

при $\alpha > 0$ всегда лежит выше кривой ω_2° , между ними образуется область смешанного влияния II' с двухвихревой меридиональной циркуляцией и обратным типу II направлением вращения вихрей. Положение кривых ω_1 и ω_2 существенно зависит от интервала изменения α .

При $0 < \alpha < 48/49$ кривые ω_1 и ω_2 лежат несколько ниже аналогичных кривых при $\alpha = 0$ (фиг. 1, б, $\alpha = 0.5$); положение ω_0 , ω_1 и ω_2 при $\alpha = 0$ на фиг. 1 и 2 отмечено пунктиром.

При $\alpha > 48/49$ кривые ω_1 и ω_2 пересекаются в некоторой точке А (фиг. 1, в, $\alpha = 7$), координаты которой зависят от α и определяются из следующих

Линия твердотельного вращения $\omega_0 = 1$, тождественно удовлетворяющая при $\alpha = 0$ условию равенства нулю второй производной на границах, расщепится при $\alpha \neq 0$ на две кривые

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \omega_1^\circ(a, \alpha) &= [K_1 - K_2 + F(\alpha, K)] / 2K_1, \\ \omega_2^\circ(a, \alpha) &= [I_1 - I_2 + F(\alpha, I)] / 2I_1, \end{aligned}$$

удовлетворяющие условию равенства нулю второй производной на правом и левом концах интервала соответственно. Как видно из (2.7) и (2.8), как ω_1 и ω_1° , так и ω_2 и ω_2° являются соответственно различными ветвями одних и тех же кривых

$$(2.9) \quad (\omega - 1)(\omega I_1 + I_2) - \alpha I_3 = 0$$

$$(2.10) \quad (\omega - 1)(\omega K_1 + K_2) - \alpha K_3 = 0$$

Положение кривых ω_1 , ω_2 , ω_1° и ω_2° в плоскости $(1/a, \omega)$ при различных значениях параметра α изображено на фиг. 1 и 2.

При $\alpha > 0$, что соответствует падению температуры от экватора к полюсам, влияние тепловых эффектов заключается в усилении течений с отрицательной циркуляцией и ослаблении с положительной. В плоскости $(1/a, \omega)$ увеличивается область влияния внутренней сферы I и соответственно уменьшается область влияния внешней III. Появляются области с новыми типами циркуляции. Кривая ω_1°

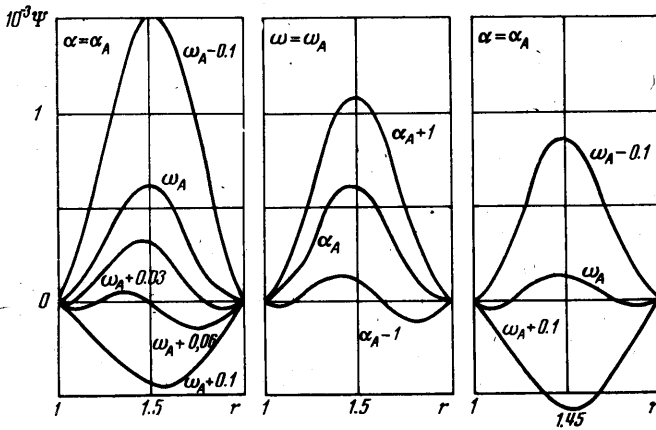
соотношений:

$$\alpha_A = \frac{(I_2 K_1 - I_1 K_2) [(I_2 K_3 - I_3 K_2) + (I_1 K_3 - I_3 K_1)]}{(I_3 K_1 - K_3 I_1)^2} = \alpha(a_A)$$

$$\omega_A = [I_1 - I_2 - F(\alpha_A, I)] / 2I_1 = \omega(a_A, \alpha_A)$$

Вблизи точки пересечения $A(a_A, \omega_A)$ меридиональная циркуляция имеет сложную структуру, не соответствующую ни одному из ранее рассмотренных типов. Действительно, при $a=a_A$ и $\omega=\omega_A$ вторые производные функции тока обращаются в нуль на обоих концах интервала $(1, a)$ одновременно. Однако точка A не соответствует твердотельному вращению и меридиональная циркуляция при $a=a_A$ и $\omega=\omega_A$ отлична от нуля.

Вблизи точки пересечения, например при $a=a_A$ и $\omega=\omega_A \pm \gamma$ (γ — малая величина), вторые производные функции тока либо одновременно положи-



Фиг. 3

тельны в $(a_A, \omega_A - \gamma)$, либо отрицательны в $(a_A, \omega_A + \gamma)$. Так как функция тока $\Psi(r)$ непрерывно зависит от своих параметров и в точке A в нуль тождественно не обращается, то вблизи этой точки должна осуществляться трехвихревая циркуляция того или иного типа. Функция тока в этом случае имеет два нуля внутри интервала $(1, a)$.

На фиг. 3 даны графики функции тока вблизи точки A при $\alpha=27.31$ ($a_A=2$, $\omega_A=-2.567$). Как видно из графиков, вблизи точки A реализуется только трехвихревая циркуляция с положительным направлением вращения в среднем вихре и отрицательным вращением у границ. Аналогичный результат получен для расчета функции тока вблизи точки A при $\alpha=156.0$ ($a_A=1.5$, $\omega_A=-6.456$) и $\alpha=7.41$ ($a_A=1.5$, $\omega_A=-1.066$).

Когда температура на внешней границе на полюсах выше, чем на экваторе ($\alpha < 0$), действие тепловых эффектов на сферическое течение Куэтта заключается в усилении меридиональных вихрей с положительной циркуляцией и ослаблении — с отрицательной. Независимо от конкретных значений α кривые $\omega_1^\circ(a, \alpha)$ и $\omega_2^\circ(a, \alpha)$ расположены ниже прямой $\omega_0=1$, а кривые $\omega_1(a, \alpha)$ и $\omega_2(a, \alpha)$ лежат выше соответствующих кривых $\omega_1(a, 0)$ и $\omega_2(a, 0)$, т. е. в плоскости $(1/a, \omega)$ увеличивается область влияния внешней сферы III и уменьшается область влияния внутренней сферы I. Типы возможных циркуляций те же, что и при $\alpha=0$. Положение областей влияния различных сфер на плоскости $(1/a, \omega)$ определяется интервалом изменения α .

При $-1.234 < \alpha < 0$ между расщепившимися кривыми ω_1° и ω_2° появляется дополнительная область смешанного влияния II. Типичное разбиение плоскости ($1/a, \omega$) на различные области влияния при $0 > \alpha > -1.234$ показано на фиг. 2, а ($\alpha = -1$). При $\alpha \approx -1.234$ происходит пересоединение ветвей ω_1° и ω_2° кривой (2.9). В результате чего при $-1.5 < \alpha < -1.234$ область I становится двухсвязной, т. е. влияние внутренней сферы проявляется только в тонких ($a < a_B$) и толстых ($a > a_B$) слоях (фиг. 2, б, $\alpha = -1.3$).

При $-2.619 < \alpha < -1.5$ область отрицательных циркуляций при больших a исчезла, а при малых a значительно уменьшилась (фиг. 2, в, $\alpha = -2$).

При $\alpha < -2.619$ влияние внутренней сферы проявляется только в очень тонких слоях $a < 1.18$. Область смешанной циркуляции становится двухсвязной и режим двухвихревой циркуляции II осуществляется только в тонких ($a < a_c$) или толстых ($a > a_c$) слоях. Типичная картина расположения областей влияния в этом интервале значений α показана на фиг. 2, а при $\alpha = -3$.

3. Асимптотика в тонких и толстых слоях. Асимптотика функции тока $\Psi_0(r)$ и $\Psi_T(r)$ в тонких слоях при $a \rightarrow 1$ имеет вид

$$\Psi_0(x) = \frac{\delta^3 (\omega - 1) x^2 (x - 1)^2}{180} [2\omega + 3 + x(\omega - 1)], \quad \Psi_T(x) = \frac{\delta^4 x^2 (x - 1)^2 (2 + x)}{120}$$

$$\delta = a - 1, \quad x = (r - 1)\delta, \quad 0 \leq x \leq 1$$

т. е. в тонких слоях интенсивность меридиональной циркуляции за счет широтного градиента температуры уменьшается как δ^4 , а интенсивность циркуляции течения Куэтта как δ^3 . Таким образом, в тонких слоях полученное разложением по степеням Re решение будет справедливо и при достаточно больших α порядка δ^{-1} , если $\omega - 1$ конечно.

Асимптотика функций тока при $a \rightarrow \infty$ и конечном α

$$\Psi_0(r) = \frac{(r - 1)^2 (r - a)^2}{24a^3 r^2} (\omega - 1) [\omega r^3 + 2a\omega r^2 + 4a\omega r + a(\omega + 1)] (\omega - 1)$$

$$\Psi_T(r) = \frac{(r - 1)^2 (r - a)^2}{96a^3 r^2} (2r^3 + 4r^2 + 6r + 5)$$

показывает, что относительное влияние тепловых эффектов уменьшается в очень толстых слоях при $a \rightarrow \infty$.

Таким образом, влияние широтного градиента температуры на сферическое течение Куэтта существенно, определяется значением безразмерного параметра α и качественно различно при отрицательных и положительных значениях α . Во многих случаях широтный градиент температуры на границе приводит к расслоению меридионального течения на отдельные вихри с противоположным направлением циркуляции (фиг. 1, 2). Это расслоение вызывает изменение угловой скорости течения в следующем приближении по Re и усиливает тем самым дифференциальность вращения жидкости в слое.

Примером этому могут являться течения в тонких слоях $(a - 1) \ll 1$ при малой относительной скорости вращения граничных сфер $(\omega - 1) \ll 1$ и экваториальном подогреве $\alpha > 0$, т. е. течения наиболее интересные для астро- и геофизических приложений. В этом случае в областях, где при $\alpha = 0$ осуществлялось одновихревое меридиональное течение с положительной циркуляцией, возможно при определенных значениях параметров появление в верхней части слоя циркуляционного меридионального течения противоположного знака с одновременным увеличением угловой скорости вращения вблизи верхней границы слоя.

При использовании полученного решения следует иметь в виду, что разложение в ряд по степеням числа Re перестает быть справедливым, когда тепловые эффекты становятся доминирующими.

Поступила 21 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1964, т. 25, № 5.
2. Munson B. R., Joseph D. D. Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres, pt 1, Basic flow, J. Fluid Mech., 1974, vol. 49, pt 2.
3. Riley T. A., Mack L. R. Thermal effects on slow viscous flow between rotating concentric spheres. Internat. J. Non-Linear Mech., 1972, vol. 7, No. 3.
4. Langlois W. E. Slow viscous flow. N. Y., Macmillan; London, Collier, 1964.