МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1975

УДК 534.26

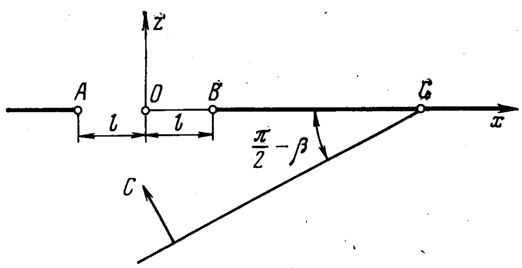
# ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ЩЕЛИ

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

*(Москва)*

Задача о дифракции акустической волны на щели в неограниченной плоскости рассматривается как начально-краевая задача с подвижной границей для двумерного волнового уравнения. Начально-краевая задача решается путем построения и обращения интегральных уравнений Вольтерра. Решение получено в замкнутом виде, в квадратурах, для произвольного угла наклона фронта падающей волны к плоскости. Решение представлено в виде рекуррентных формул, учитывающих влияние дифракционных волн, последовательно возникающих на границах щели.

1. Слабая ударная волна распространяется вдоль неограниченной плоскости в идеальной сжимаемой среде. В плоскости находится бесконечно длинная прямая щель ширины $2l$. Фронт волны представляет собой плоскость, движущуюся со скоростью звука $c$. Будем предполагать, что волна




Фиг. 1

падает на щель из нижнего полупространства (фиг. 1). Вектор скорости движения фронта волны **c** образует с плоскостью угол $\beta$ $(0<\beta\leqslant\pi/2)$.

Рассмотрим плоскопараллельные безвихревые течения газа [1-3]. Возьмем прямоугольную систему осей координат, как указано на фиг. 1.

Потенциал скорости возмущенного течения газа удовлетворяет волновому уравнению

$$\Phi_{xx}+\Phi_{zz}-\frac{1}{c^2}\Phi_{tt}=0 \tag{1.1}$$

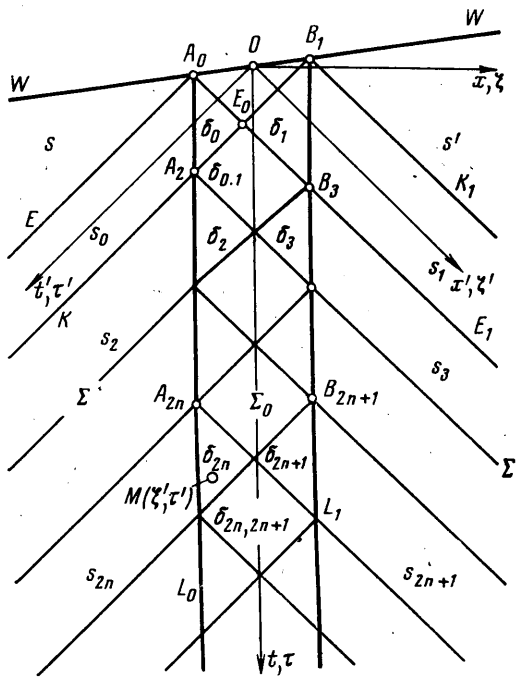
В точках плоскости выполняется условие обтекания: $\Phi_z=0$. Потенциал скорости представим в виде $\Phi=\varphi_\omega+\varphi$. Функция $\varphi_\omega(x, z, t)$ есть заданный потенциал скорости в падающей волне. Посредством функции $\varphi_\omega(x, z, t)$ задаются параметры газа в падающей волне [4, 5].

Искомый потенциал $\varphi$ в области дифракции найдем из следующей начально-краевой задачи. Функция $\varphi(x, z, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1), условию $\varphi(x, -z, t)=-\varphi(x, z, t)$ и условиям на оси $x$: на плоскости за фронтом падающей волны и на щели соответственно

$$\varphi_z=-[\varphi_{\omega z}(x, z, t)]_{z=0}=A(x, t) \tag{1.2}$$

$$\varphi=0 \tag{1.3}$$

2. Для решения задачи применим метод интегральных уравнений Абеля, предложенный ранее в теории крыла конечного размаха [6]. Рассмотрим пространство переменных $x$, $z$ и $t$ [7]. Определим в плоскости $xt$ области $\Sigma$ и $\Sigma'$, в которых задано условие (1.2), и область $\Sigma_0$, в которой задано условие (1.3). Область $\Sigma$ ограничена прямой $W$, изображающей закон движения точки пересечения фронта падающей волны с осью $x$ (точка $C$ на фиг. 1) и прямой $L_0$. Прямая $L_0$ параллельна оси времени $t$ и находится от нее на расстоянии $l$ в области отрицательных значений $x$. Об-




Фиг. 2

ласть $\Sigma'$ ограничена прямой $W$ и прямой $L_1$, параллельной оси $t$ и отстоящей от нее на расстоянии $l$ в области положительных значений $x$. Границами области $\Sigma_0$ служат прямые $W$, $L_0$ и $L_1$ (фиг. 2).

Точки $A_{2n}(-l, t_{2n})$ и $B_{2n+1}(l, t_{2n+1})$ на фиг. 2 отвечают соответственно точкам $A$ и $B$ — границам щели — в моменты возникновения на них цилиндрических дифракционных волн ($n$=0, 1, 2, 3,...). Характеристические конусы уравнения (1.1) с вершинами, расположенными в точках $A_{2n}$ и $B_{2n+1}$ разделяют пространство $xzt$ на области с различным аналитическим видом решения задачи. В частности, с этой точки зрения плоская область $\Sigma_0$ разделяется на области $\delta_{2n}$, $\delta_{2n+1}$, $\delta_{2n,\,2n+1}$, область $\Sigma$ — на области $s$, $s_{2n}$ и область $\Sigma'$ — на области $s'$, $s_{2n+1}$.

Характеристические конусы с вершинами, расположенными в точках $A_0$ и $B_1$ и обращенные в сторону возрастающих значений времени, ограничивают область, где сказывается влияние дифракционных волн, возникающих на границах щели. Пары прямых $A_0E$, $A_0E_1$ и $B_1K$, $B_1K_1$ представляют собой линии пересечения этих конусов с плоскостью $xt$. Следовательно, область влияния границ щели в плоскости $xt$ есть $M$-образная область, ограниченная прямыми $A_0E$, $B_1K_1$ и отрезками $A_0E_0$, $E_0B_1$ (фиг. 2).

Решение уравнения (1.1) возьмем в виде формулы, связывающей функцию $\varphi$ в произвольной точке плоскости $(xz)$ с производной $\varphi_z$ на оси $x$ для любого момента времени $t$

$$\varphi^*(x', z', t') = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S'} [\varphi_{z'}^*(\xi', z', \tau')]_{z'=0} \frac{d\xi'\, d\tau'}{\sqrt{(x'-\xi')(t'-\tau')-(z')^2}}$$

Область $S''$ есть часть плоскости $x't'$, расположенная внутри характеристического конуса с вершиной в точке с координатами $x'$, $z'$, $t'$ и обращенного в сторону убывающих значений времени. Координаты $x'$, $z'$, $t'$ связаны с координатами $x$, $z$, $t$ соотношениями $c(x'-t')=2x$, $cz'=z$, $x'+t'=2t$. Через $\varphi^*$ и $\varphi_{z'}^*$ обозначены потенциал скорости $\varphi$ и его производная $\varphi_z$ в новых переменных.

Для того чтобы можно было вычислить по формуле (2.1) потенциал $\varphi^*$ в произвольной точке $P(x', z', t')$, расположенной в области влияния границ щели, необходимо найти производную $\varphi_{z'}^*$ в области $\Sigma_0$.

3. Производную $\varphi_{z'}^*$ в области $\Sigma_0$ найдем из интегральных уравнений. Обозначим производную $\varphi_{z'}^*$ в областях $\delta_{2n}$, $\delta_{2n+1}$, $\delta_{2n,\,2n+1}$ соответственно через $\Theta_{2n}$, $\Theta_{2n+1}$, $\Theta_{2n,\,2n+1}$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Возьмем произвольную точку $M(\xi', \tau')$, расположенную в области $\delta_{2n} \subset \Sigma_0$ (фиг. 2). Выражая по формуле (2.1) в точке $M$ потенциал скорости $\varphi^*(\xi', o, \tau')$, равный нулю всюду в области $\Sigma_0$, согласно условию (1.3) придем к интегральному уравнению для функций $\Theta_{2n}$

$$\int\limits_{t_{2n}'}^{\tau'} \int\limits_{\tau''-T}^{\xi'} \Theta_{2n}(\xi'', \tau'') \frac{d\xi''\, d\tau''}{\sqrt{(\xi'-\xi'')(\tau'-\tau'')}} = \Phi_{2n}(\xi', \tau'), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2n}(\xi', \tau') = \Phi^*(\xi', \tau') &- \int\limits_{x_{2n-1}'}^{\xi'} \int\limits_{\xi''-T}^{t_{2n-2}'} \Theta_{2n-1}(\xi'', \tau'')\, K d\tau'' d\xi'' - \\ &- \int\limits_{t_{2n-2}'}^{t_{2n}'} \int\limits_{\tau''-T}^{x_{2n-1}'} \Theta_{2n-2}(\xi'', \tau'')\, K d\xi'' d\tau'' - \int\limits_{t_{2n-2}'}^{t_{2n}'} \int\limits_{x_{2n-1}'}^{\xi'} \Theta_{2n-2,2n-1}(\xi'', \tau'')\, K d\xi'' d\tau \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{(\xi'-\xi'')(\tau'-\tau'')}}, \quad T = \frac{2l}{c}$$

$$\begin{aligned} \Phi^*(\xi', \tau') = &- \int\limits_{x_1'}^{\xi'} \int\limits_{-\xi''\operatorname{ctg}^2\beta/2}^{\xi''-T} A^*(\xi'', \tau'')\, K d\tau'' d\xi'' - \\ &- \int\limits_{t_0'}^{\tau'} \int\limits_{-\tau''\operatorname{tg}^2\beta/2}^{\tau''-T} A^*(\xi'', \tau'')\, K d\xi'' d\tau'' - \\ &- \sum_{i=0}^{n-2} \int\limits_{t_{2i}'}^{t_{2i+2}'} \int\limits_{\tau''-T}^{x_{2i+1}'} \Theta_{2i}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau'' - \sum_{i=0}^{n-2} \int\limits_{x_{2i+1}'}^{x_{2i+3}'} \int\limits_{\xi''-T}^{t_{2i}'} \Theta_{2i+1}(\xi'', \tau'') K d\tau'' d\xi'' - \\ &- \sum_{i=0}^{n-2} \int\limits_{t_{2i}'}^{t_{2i+2}'} \int\limits_{x_{2i+1}'}^{x_{2i+3}'} \Theta_{2i,\,2i+1}(\xi'', \tau'')\, K d\xi'' d\tau'' \end{aligned}$$

Пределы интегрирования $t_{2i-2}$ и $x'_{2i-1}$ представляют собой координаты точек $A_{2i-2}$ и $B_{2i-1}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$. Через $A^*$ обозначена заданная функция $A$ в новых переменных; функция $\xi''=-\tau''\,\mathrm{tg}^2\beta/2$ есть уравнение прямой $W$. Сумма в выражении $\Phi^*$ определена для $n\geqslant 2$.

Применяя дважды формулу обращения интегрального уравнения Абеля, получим решение уравнения (3.1) в виде

$$\Theta_{2n}(\xi',\tau')=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{(\xi'-\tau'+T)(\tau'-t_{2n}')}}\Phi_{2n}(\tau'-T,t_{2n}')+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\tau'-t_{2n}'}}\int\limits_{\tau'-T}^{\xi'}\frac{\partial}{\partial\xi''}\Phi_{2n}(\xi'',t_{2n}')\frac{d\xi''}{\sqrt{\xi'-\xi''}}+ \tag{3.3}$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\xi'-\tau'+T}}\int\limits_{t_{2n}'}^{\tau'}\frac{\partial}{\partial\tau''}\Phi_{2n}(\tau'-T,\tau'')\frac{d\tau''}{\sqrt{\tau'-\tau''}}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\tau'-T}^{\xi'}\int\limits_{t_{2n}'}^{\tau'}\frac{\partial^2}{\partial\xi''\,\partial\tau''}\Phi_{2n}(\xi'',\tau'')K\,d\tau''\,d\xi''$$

Таким же путем получим решения $\Theta_{2n+1}$ и $\Theta_{2n,\,2n+1}$

$$\Theta_{2n+1}(\xi',\tau')=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{(\tau'-\xi'+T)(\xi'-x'_{2n+1})}}\Phi_{2n+1}(x'_{2n+1},\xi'-T)+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\tau'-\xi'+T}}\int\limits_{x'_{2n+1}}^{\xi'}\frac{\partial}{\partial\xi''}\Phi_{2n+1}(\xi'',\xi'-T)\frac{d\xi''}{\sqrt{\xi'-\xi''}}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\xi'-x'_{2n+1}}}\int\limits_{\xi'-T}^{\tau'}\frac{\partial}{\partial\tau''}\Phi_{2n+1}(x'_{2n+1},\tau'')\frac{d\tau''}{\sqrt{\tau'-\tau''}}+ \tag{3.4}$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\xi'-T}^{\tau'}\int\limits_{x'_{2n+1}}^{\xi'}\frac{\partial^2}{\partial\tau''\,\partial\xi''}\Phi_{2n+1}(\xi'',\tau'')\,K d\xi'' d\tau''$$

$$\Phi_{2n+1}(\xi',\tau')=\Phi^*(\xi',\tau')-\int\limits_{x'_{2n-1}}^{x'_{2n+1}}\int\limits_{\xi''-T}^{t'_{2n-2}}\Theta_{2n-1}(\xi'',\tau'')\,K d\tau'' d\xi''-$$
$$-\int\limits_{t'_{2n-2}}^{\tau'}\int\limits_{\tau''-T}^{x'_{2n-1}}\Theta_{2n-2}(\xi'',\tau'')\,K d\xi'' d\tau''-\int\limits_{x'_{2n-1}}^{x'_{2n+1}}\int\limits_{t'_{2n-2}}^{\tau'}\Theta_{2n-2,\,2n-1}(\xi'',\tau'')K d\xi'' d\tau'' \tag{3.5}$$

Решение $\Theta_{2n,\,2n+1}$ может быть получено из формулы (3.3), если в ней вместо выражения $(\tau'-T)$, представляющего собой нижний предел интегрирования по $\xi''$, положить $x'_{2n-1}$ и вместо функции $\Phi_{2n}(\xi', \tau')$ положить функцию $\Phi_{2n,\,2n+1}(\xi', \tau')$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{2n,\,2n+1}(\xi', \tau'') = \Phi^*(\xi', \tau') - \int\limits_{t'_{2n}}^{\tau'} \int\limits_{\tau''-T}^{x'_{2n+1}} \Theta_{2n}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau'' - \\
- \int\limits_{x'_{2n+1}}^{\xi'} \int\limits_{\xi''-T}^{t'_{2n}} \Theta_{2n+1}(\xi'', \tau'') K d\tau'' d\xi'' - \int\limits_{t'_{2n-2}}^{t'_{2n}} \int\limits_{\tau''-T}^{x'_{2n-1}} \Theta_{2n-2}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau'' - \\
- \int\limits_{x'_{2n-1}}^{x'_{2n+1}} \int\limits_{\xi''-T}^{t'_{2n-2}} \Theta_{2n-1}(\xi'', \tau'') K d\tau'' d\xi'' - \int\limits_{t'_{2n-2}}^{t'_{2n}} \int\limits_{x'_{2n-1}}^{x'_{2n+1}} \Theta_{2n-2,\,2n-1}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau''
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Решения $\Theta_{2n}$, $\Theta_{2n+1}$, $\Theta_{2n,\,2n+1}$ при $n=0$ имеют вид [6, 7]

$$
\Theta_0(\xi', \tau') = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\xi'-\tau'+T}} \int\limits_{-\tau' \operatorname{tg}^2 \beta/2}^{\tau'-T} A^*(\xi'', \tau') \frac{\sqrt{\tau'-T-\xi''}}{\xi'-\xi''} d\xi'' \tag{3.7}
$$

$$
\Theta_1(\xi', \tau') = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\tau'-\xi'+T}} \int\limits_{-\xi' \operatorname{ctg}^2 \beta/2}^{\xi'-T} A^*(\xi', \tau'') \frac{\sqrt{\xi'-T-\tau''}}{\tau'-\tau''} d\tau'' \tag{3.8}
$$

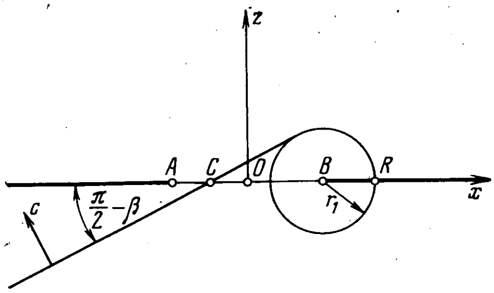
$$
\Theta_{0,1}(\xi', \tau') = \Theta_0(\xi', \tau') + \Theta_1(\xi', \tau') \tag{3.9}
$$

Отправляясь от решений $\Theta_0$, $\Theta_1$, $\Theta_{0,1}$, последовательно находятся по формулам (3.3), (3.4) функции $\Theta_2$, $\Theta_3$, $\Theta_{2,3}$, $\Theta_4$, $\Theta_5$, $\Theta_{4,5}, \ldots, \Theta_{2n}$, $\Theta_{2n+1}$, $\Theta_{2n,\,2n+1}$ для любого номера $n$.

В частности, задача о дифракции акустической волны от щели на неограниченной поверхности, когда волна перемещается в направлении нормали к поверхности и достигает обеих границ щели одновременно (угол $\beta=\pi/2$), исследована в [8, 9].

4. Найдем давление акустической волны на плоскость в интервале времени $t_1<t<t_2$, где $t_1=-(l/c)\cos\beta$ и $t_2=(l/c)\times\times(2-\cos\beta)$. Согласно интегралу Лагранжа, для неустановившихся безвихревых течений газа разность давлений в точках плоскости связана с функцией $\varphi^*$ посредством соотношения

$$
p(x', t') = p_+ - p_- = 2\rho[\varphi^*_{x'}(x', t') + \varphi^*_{t'}(x', t')] \tag{4.1}
$$




Фиг. 3

где $p_+$ и $p_-$ — давление газа на верхней и нижней сторонах плоскости, $\rho$ — плотность невозмущенного газа. Используя формулу (2.1), соотношение (4.1) и решения (3.7), (3.8), получим формулы распределения давления в областях $s_0$ и $s_1$ (фиг. 2).

В области $s_0$, где сказывается влияние дифракционной волны, возникающей на границе $A$ щели в момент времени $t_0=(l/c)\cos\beta$ (радиус волны $r_0=c(t-t_0)$), разность давлений выражается формулой

$$p(x',t')=-\frac{\rho}{\pi}\int\limits_{x'+T}^{t'}\int\limits_{-\tau'\operatorname{tg}^2\beta/2}^{x'}\frac{A_{\xi'}^{*}(\xi',\tau')+A_{\tau'}^{*}(\xi',\tau')}{\sqrt{(x'-\xi')(t'-\tau')}}d\xi'\,d\tau'-$$

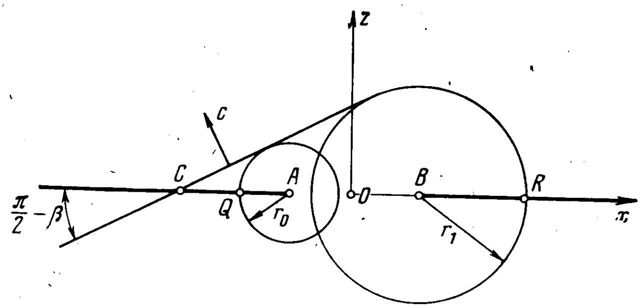
$$(4.2)\qquad -\frac{\rho}{\pi}[1+\operatorname{tg}^2\beta/2]\int\limits_{x'+T}^{t'}\frac{A^{*}(-\tau'\operatorname{tg}^2\beta/2,\tau')}{\sqrt{(t'-\tau')(x'+\tau'\operatorname{tg}^2\beta/2)}}d\tau'$$

В области $s_1$, где сказывается влияние дифракционной волны, возникающей на границе $B$ щели в момент времени $t_1$, разность давлений выражается формулой

$$p(x',t')=-\frac{\rho}{\pi}\int\limits_{t'+T}^{x'}\int\limits_{-\xi'\operatorname{ctg}^2\beta/2}^{t'}\frac{A_{\xi'}^{*}(\xi',\tau')+A_{\tau'}^{*}(\xi',\tau')}{\sqrt{(x'-\xi')(t'-\tau')}}d\tau'\,d\xi'-$$

$$(4.3)\qquad -\frac{\rho}{\pi}[1+\operatorname{ctg}^2\beta/2]\int\limits_{t'+T}^{x'}\frac{A^{*}(\xi',-\xi'\operatorname{ctg}^2\beta/2)}{\sqrt{(x'-\xi')(t'+\xi'\operatorname{ctg}^2\beta/2)}}d\xi'$$

Следовательно, разность давлений на отрезке $BR(l\leqslant x\leqslant l+ct+l\cos\beta)$ в момент времени $t$, принадлежащий интервалу $t_1<t<t_2$ (фиг. 3 и 4), выражается формулой (4.3). Разность давлений на отрезке $QA(-l-ct+$ $+l\cos\beta\leqslant x\leqslant -l)$ в момент времени $t$ (радиус волны $r_1=c(t-t_1)$), принадлежащий интервалу $t_0<t<t_2$ (фиг. 4), выражается формулой (4.2).




Фиг. 4

Разность давлений на отрезке $CQ$ (фиг. 4), где $(-ct/\cos\beta)\leqslant x\leqslant -l-$ $-ct+l\cos\beta$, также может быть вычислена по формуле (4.2), если в ней выражение $(x'+T)$ представляющее собой нижний предел интегрирования по $\tau'$, заменить на выражение $(-x'\operatorname{ctg}^2\beta/2)$ в обоих интегралах. На отрезке $CQ$ не сказывается влияние дифракционных волн от щели. Разность давлений на $CQ$ обусловлена отраженными волнами.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 21 XII 1973

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1, М., «Наука», 1973.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
3. *Седов Л. И.* Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
4. *Хаскинд М. Д., Вайнштейн Л. А.* Дифракция плоских волн на щели и ленте. В кн. «Третий Всесоюзный симпозиум по дифракции волн», Тбилиси, 1964. Рефераты докладов. М., «Наука», 1964.
5. *Красильщикова Е. А.* Обтекание тонких тел потоком газа при наличии набегающей ударной волны. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». М., «Наука», 1969.
6. *Красильщикова Е. А.* Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
7. *Красильщикова Е. А.* Дифракция акустической волны на неподвижной пластинке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
8. *Афанасьев Е. Ф.* К задаче о дифракции нестационарной волны относительно щели. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 4.
9. *Fox E. N.* The diffraction of two-dimensional sound pulses incident on an infinite uniform slit in a perfectly reflecting screen. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1949, vol. 242, No. 839.