

## ВЛИЯНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ЗОНДА

Ю. Н. СМЫСЛОВ, И. Б. ЧЕКМАРЕВ

(Ленинград)

В работе исследуется поперечное обтекание электропроводной плоскости потоком слабоионизованного газа. Дана постановка задачи и алгоритм решения. Для некоторых значений параметров проведено численное интегрирование уравнений для экранирующего и вязкого слоев, позволяющее оценить влияние скорости набегающего потока на вольт-амперную характеристику плоского зонда.

В связи с интенсивными исследованиями течений ионизованного газа в последнее десятилетие проявляется повышенный интерес к экспериментальному и теоретическому изучению поведения электростатических зондов в движущейся плазме. Проблема взаимодействия зонда с потоком рассматривается как с точки зрения изучения влияния конвективных эффектов на характеристики зонда, так и с точки зрения использования зондов для измерения скорости плазмы [1]. Весьма подробный обзор современного состояния теории электростатических зондов в неподвижной и движущейся плазме дан в работе [2].

В этой статье, в частности, для столкновительного режима выделены три характерных случая: 1)  $L \gg \lambda_D \gg \lambda$  — тонкий столкновительный экранирующий слой; 2)  $\lambda_D \gg L \gg \lambda$  — толстый столкновительный экранирующий слой; 3)  $L \gg \lambda \gg \lambda_D$  — тонкий бесстолкновительный экранирующий слой. Здесь  $L$  — характерный макроскопический размер задачи,  $\lambda$  — длина свободного пробега заряженных частиц,  $\lambda_D$  — дебаевская длина.

В первом случае при переходе к безразмерным переменным в уравнении Пуассона перед старшими производными появляется малый параметр  $\nu = (\lambda_D/L)^2 \ll 1$ , что относит задачу к типу «сингулярно возмущенных», эффективным средством исследования которых является метод пограничных слоев [3].

Использованное в [4, 5] разложение «внешнего» и «внутреннего» решения по степеням  $\nu^{1/2}$  приспособлено к приближенным граничным условиям, когда концентрация заряженных частиц на стенке принимается равной нулю. В действительности, однако, условие полного поглощения означает равенство нулю не концентраций, а потоков отраженных частиц. При таких граничных условиях решение следует искать в виде рядов по  $\nu^{1/2}$  [6].

В настоящей работе последнее разложение применяется к исследованию натекания слабоионизованного газа на идеально проводящую плоскость, имитирующую зонд, для случая тонкого столкновительного экранирующего слоя.

Заметим здесь, что «течение в окрестности критической точки» для бесстолкновительного экранирующего слоя рассматривалось в [7]. В работе [8] исследовался случай, когда толщины вязкого и экранирующего слоев сравнимы, а в [9] предполагалось, что толщина вязкого слоя мала по сравнению с толщиной дебаевского слоя.

Сделаем следующие упрощающие предположения: 1) толщина вязкого пограничного слоя много больше толщины дебаевского слоя. В этих

условиях конвективные эффекты в экранирующем слое малы и влияние потока проявляется через перераспределение концентрации заряженных частиц в квазинейтральной области; 2) ионизация осуществляется электронным ударом, а рекомбинация — тройным соударением; 3) степень ионизации мала, так что учитываются только столкновения электронов с ионами и ионов с нейтралами; 4) диффузионные скорости электронов и ионов велики по сравнению с диффузионной скоростью нейтралов; 5) температуры компонентов газа постоянные и мало отличаются друг от друга.

Пятое условие накладывает известные ограничения на скорость потока, разность температур газа и зонда, а также предполагает слабую неизотермичность электронов. Нетрудно показать, что последнее имеет место в плотном слабоионизованном газе по крайней мере для ионной части вольт-амперной характеристики.

Действительно, в простейшей форме уравнение энергии имеет вид

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{2m_e n_e}{m_a \tau_e} \frac{3}{2} k (T_e - T_a)$$

Предположим, что в экранирующем слое все электроны отражаются обратно в плазму и ток определяется диффузионным потоком ионов. Тогда

$$\mathbf{j} = e \Gamma_i \sim e D_a n_e / L, \quad D_a = \frac{k (T_e + T_i) \tau_i}{m_i}$$

где  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии. Полагая далее, что работа электрического поля на дебаевской длине равна по порядку величины тепловой энергии электронов, получим  $E \sim k T_e / e \lambda_D$ .

Тогда из приведенных выше трех соотношений находим, что

$$\frac{T_e - T_a}{T_e} = \frac{\pi}{24} \frac{T_e + T_i}{T_e} \left( \frac{c_e}{c_i} \right) \frac{\lambda_e \lambda_i}{L \lambda_D} \ll 1, \quad c_a = \sqrt{\frac{8kT_a}{\pi m_a}}$$

Использование в работе метода сингулярных возмущений позволило естественным путем выделить область заряженного слоя и область квазинейтрального вязкого слоя. Полученные уравнения для дебаевского слоя интегрируются, что дает возможность получить соотношения, играющие роль граничных условий для уравнений в квазинейтральной области. Из последних вытекают простые формулы для ионного и электронного токов насыщения.

При сделанных выше допущениях поведение слабоионизованного газа описывается следующими безразмерными уравнениями:

$$(1) \quad (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p^\circ + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0$$

$$\nabla [S R g_e \mathbf{u} + \mathbf{G}_e] = D (g_e - g_e^2 g_i), \quad \nabla [S R g_i \mathbf{u} + \mathbf{G}_i] = D (g_e - g_e^2 g_i)$$

$$\nabla g_e - g_e \nabla \Phi = -\frac{T_e + T_i}{T_e} \frac{\mu_i}{\mu_e} \mathbf{G}_e, \quad \frac{T_i}{T_e} \nabla g_i + g_i \nabla \Phi = -\frac{T_e + T_i}{T_e} \mathbf{G}_i$$

$$v \Delta \Phi = g_e - g_i$$

Если цилиндрическую систему координат ввести так, чтобы ее начало находилось в критической точке, а ось  $z$  была перпендикулярна к обтекаемой поверхности и направлена внутрь области, занятой плазмой, то без-

размерные граничные условия будут иметь вид

$$(2) \quad \zeta=0, \quad u_r=u_z=\Phi=0, \quad p^\circ=p_0^\circ$$

$$G_{iz}-G_{ez}=j_0, \quad g_e=-h\left(\frac{c_i}{c_e}\right)G_{ez}, \quad g_i=-hG_{iz}$$

$$(3) \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad u_r \rightarrow \xi, \quad u_z \rightarrow -2\xi, \quad g_e \rightarrow 1, \quad g_i \rightarrow 1$$

$$\xi = \frac{r}{L}, \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad p^\circ = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

$$g_\alpha = \frac{n_\alpha}{n_0}, \quad \Phi = \frac{e\varphi}{kT_e}, \quad G_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_0}$$

$$\Gamma_0 = \frac{D_\alpha n_0}{L}, \quad R = \frac{\rho v_0 L}{\eta}, \quad S = \frac{\eta}{\rho D_\alpha}$$

$$D = \frac{v_i L^2}{D_\alpha}, \quad \mu_\alpha = \frac{e\tau_\alpha}{m_\alpha}, \quad v = (\lambda_D/L)^2$$

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon k T_e}{e^2 n_0}}, \quad h = \frac{\pi}{4} \frac{T_e + T_i}{T_i} \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)$$

( $L$ ,  $v_0$ ,  $n_0$ ,  $\Gamma_0$  — масштабы длины, скорости, плотности и диффузионных потоков; используемые обозначения общеприняты).

В силу предположения  $v \ll 1$  естественно использовать метод сингулярных возмущений [3].

Внешнее решение задачи будем искать в виде степенного ряда по  $\sqrt{v}$ . В нулевом приближении получим из (1) «квазинейтральную» систему

$$(4) \quad g_e = g_i = g, \quad (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p^\circ + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{u}, \quad \nabla\mathbf{u} = 0$$

$$\nabla[SRg\mathbf{u} + G_e] = D(g - g^3) \quad \nabla[SRg\mathbf{u} + G_i] = D(g - g^3)$$

$$\nabla g - g\nabla\Phi = -\frac{T_e + T_i}{T_e}\mu G_e, \quad \mu = \mu_i/\mu_e$$

$$\frac{T_i}{T_e}\nabla g + g\nabla\Phi = -\frac{T_e + T_i}{T_e}G_i$$

Введем в рассмотрение безразмерную плотность тока  $\mathbf{j} = G_i - G_e$ . Из последних двух уравнений (4) находим соотношения  $G_e = -(\nabla g + \mathbf{j})$ ,  $G_i = -(\nabla g - \mu\mathbf{j})$ , с помощью которых система (4) преобразуется к виду

$$(5) \quad (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p^\circ + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{u}, \quad \nabla\mathbf{u} = 0, \quad \nabla\mathbf{j} = 0$$

$$\Delta g - SR\nabla(g\mathbf{u}) + D(g - g^3) = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{T_e}{T_e + T_i}(\nabla g - g\nabla\Phi)/\mu$$

Решение уравнений (5) ищем в виде

$$(6) \quad u_r = \xi f(\zeta), \quad u_z = -2f(\zeta), \quad g = g(\zeta), \quad \Phi = \Phi(\zeta)$$

$$p^\circ = p_0^\circ - 1/2\xi^2 - 4p_1(\zeta), \quad j_z = j_0 \text{ const}, \quad j_r = 0$$

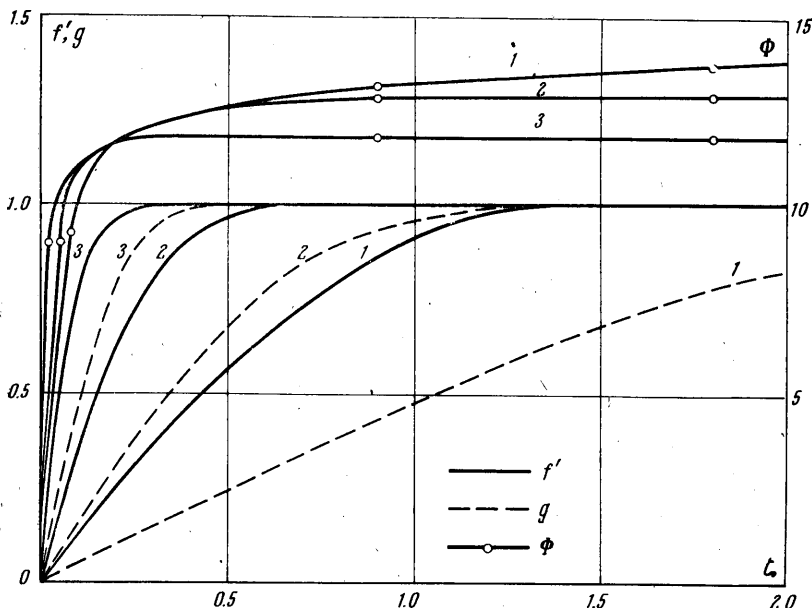
В результате подстановки (6) в (5) получаем

$$(7) \quad \frac{1}{R} f''' + 2ff'' - f'^2 + 1 = 0, \quad g'' + 2SRfg' + D(g - g^3) = 0$$

$$\Phi' = \frac{1}{g} \left( g' - \frac{T_e + T_i}{T_e} \mu j_0 \right), \quad p_1' = ff' + \frac{1}{2R} f''$$

$$G_{ez} = -(g' + j_0), \quad G_{iz} = -(g' - \mu j_0)$$

В области дебаевского пограничного слоя вводим растянутую поперечную координату  $\tau = \zeta / \sqrt{\nu}$  и внутреннее решение системы (1), преобразованной к координатам  $\xi, \tau$ , ищем также в виде рядов по  $\sqrt{\nu}$ . В нулевом приближении получаем



Фиг. 1

зованной к координатам  $\xi, \tau$ , ищем также в виде рядов по  $\sqrt{\nu}$ . В нулевом приближении получаем

$$(8) \quad \frac{\partial G_{ez}^*}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial G_{iz}^*}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial g_e^*}{\partial \tau} - g_e^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{T_i}{T_e} \frac{\partial g_i^*}{\partial \tau} + g_i^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \tau^2} = g_e^* - g_i^*$$

Очевидно, что граничные условия (2) и (3) преобразуются в граничные условия для систем (8) и (7) соответственно

$$(9) \quad \tau = 0, \quad g_e^* = -h \left( \frac{c_i}{c_e} \right) G_{ez}^*, \quad g_i^* = -h G_{iz}^*, \quad \Phi^* = 0$$

$$(10) \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad f' \rightarrow 1, \quad g \rightarrow 1$$

Кроме того, из условий асимптотического сращивания внешнего и внутреннего решений получаем

$$(11) \quad \begin{aligned} \xi \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad f' \rightarrow 0, \quad f \rightarrow 0, \quad p_1 \rightarrow 0 \\ g_e^* \rightarrow g(0) = g_s, \quad g_i^* \rightarrow g(0) = g_s, \quad \Phi^* \rightarrow \Phi(0) = \Phi_s \\ G_{ez}^* \rightarrow G_{ez}(0), \quad G_{iz}^* \rightarrow G_{iz}(0) \end{aligned}$$

В результате частичного интегрирования внутренней системы (8) с использованием условий (9) и (11) приходим к соотношениям

$$(12) \quad \begin{aligned} g_s &= h \left[ \frac{c_i}{c_e} (g_s + j_0) \right]^{T_e/(T_e+T_i)} [g_s' - \mu j_0]^{T_i/(T_e+T_i)} \\ \Phi_s &= \frac{T_i}{T_e+T_i} \ln \left[ \frac{c_e}{c_i} \frac{g_s' - \mu j_0}{g_s' + j_0} \right] \end{aligned}$$

которые можно рассматривать как граничные условия для внешней системы (7).

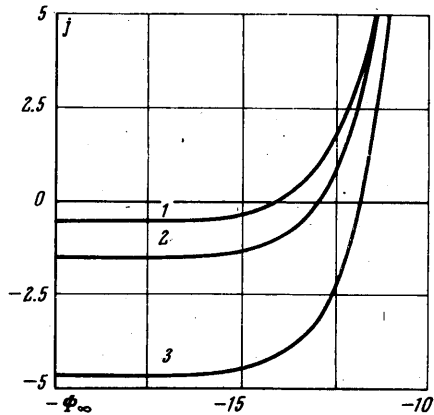
Для выяснения влияния конвективного переноса на ионную часть вольт-амперной характеристики плоского зонда было проведено численное интегрирование первых трех уравнений (7) с граничными условиями (10) для  $\xi \rightarrow \infty$  и следующими условиями на внешней границе экранирующего слоя

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi = 0, \quad f = 0; \quad f' = 0, \quad g = g_s, \\ \Phi = \Phi_s \end{aligned}$$

При расчете принималось

$$T_e = T_i = T_a, \quad S = 0, 3,$$

$$\frac{c_i}{c_e} = 10^{-2}, \quad \frac{\mu_i}{\mu_e} = 10^{-3}, \quad \frac{\lambda_i}{L} = 10^{-4}$$



Фиг. 2

На фиг. 1 приведены полученные распределения скорости, концентрации заряженных частиц и потенциала в диффузионном слое при  $D=0$  и  $R=1, 10, 100$  (кривые 1, 2, 3 соответственно). Как и следовало ожидать, с увеличением числа Рейнольдса  $R$  уменьшаются толщины вязкого и диффузионного слоев и соответственно увеличиваются значения производных  $f_s'$  и  $g_s'$  на внешней границе дебаевского слоя.

С другой стороны, из соотношений для потоков в (7) находим выражения для ионного и электронного токов насыщения

$$(14) \quad \begin{aligned} j_i = j|_{G_{ez}=0} = -g_s', \quad j_e = j|_{G_{iz}=0} = g_s'/\mu \end{aligned}$$

Таким образом, модули токов насыщения пропорциональны производной концентрации заряженных частиц  $g_s'$  на внешней границе дебаевского слоя и увеличиваются с ростом числа  $R$ . Это видно также из приведенной на фиг. 2 ионной части вольт-амперной характеристики. Заметим, что в исследованной области  $1 \leq R \leq 10^2$  зависимость ионного тока от числа Рейнольдса можно приближенно представить в виде  $|j_i| \approx 0.46\sqrt{R}$ . Напротив, величина плавающего потенциала  $\Phi|_{j=0}$  уменьшается с ростом  $R$ .

В заключение отметим, что роль числа Дамкёлера  $D$  такая же, как и числа Рейнольдса: увеличение  $D$  приводит к увеличению  $g_s'$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson B. H., Murphree D. L. Plasma velocity determination by electrostatic probes, AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 10, pp. 2028—2030.
2. Chung P. M., Talbot L., Touryan K. J. Electrical probes in stationary and flowing plasmas. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 2, pp. 133—154.
3. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
4. Lam S. H. A general theory for the flow of weakly ionized gases. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 2, pp. 256—263.
5. Touryan K. J., Chung P. M. Flush — mounted electrostatic probe in the presence of negative ions. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 3, pp. 365—370.
6. Юфеев В. С. К теории пограничного слоя слабоионизованного газа около электрода. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
7. Talbot L. Theory of the stagnation point Langmuir probe. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 2, pp. 289—298.
8. Chung P. M. Weakly ionized nonequilibrium viscous shock — layer and electrostatic probe characteristics. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 5, pp. 817—825.
9. Clements R. M., Smy P. R. Stagnation probe measurements in flowing plasmas. J. Phys. D, Appl. Phys., 1971, vol. 4, No. 11, pp. 1687—1695.