МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1975

УДК 533.6.011:535.21

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ГАЗЕ, НАГРЕВАЕМОМ НЕРАВНОВЕСНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

К. В. КРАСНОБАЕВ

(Москва)

Рассматривается распространение возмущений в газе, нагреваемом неравновесным излучением. В линейном приближении найдены время затухания и закон дисперсии волн. В нелинейной постановке проведенный анализ показал, что для колебаний, не сильно отличающихся от адиабатических, происходит укручение профиля скорости волны и ее затухание. Распространение возмущений, близких к изотермическим, описывается уравнением Бюргерса, которое допускает стационарное решение типа ударных волн. Структура таких волн определяется радиационными процессами. Конкретные вычисления проведены для типичных значений параметров околозвездного газа.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Одной из характерных особенностей движения межзвездной среды является сильное взаимодействие вещества с излучением [1, 2]. Конкретные механизмы этого взаимодействия весьма разнообразны и определяются плотностью и температурой вещества, его химическим составом, интенсивностью и частотным спектром излучения. В рассматриваемом ниже случае распространения волн в околозвездном газе среда ионизируется и нагревается эмиттируемой центральной звездой ультрафиолетовой радиацией и остывает при фоторекомбинациях, свободно-свободных переходах, а также при возбуждении электронным ударом атомов водорода и метастабильных уровней ряда ионов. Образующуюся область почти полностью ионизованного водорода с температурой $\sim 10^4$ °K принято называть зоной HII, или зоной Стрёмгрена.

Если масштаб изменения температуры и степени ионизации водорода порядка радиуса зоны Стрёмгрена, то структура области HII может быть рассчитана независимо от состояния движения газа [3–6]. Для этого совместно решается система уравнений ионизационного баланса, энергии, переноса ультрафиолетового излучения.

В случае меньших масштабов изменения параметров газа необходимо решать полную систему гидродинамических уравнений с учетом радиационных процессов. Решение этой системы значительно упрощается, если предположить, как это часто делается (см., например, [7]), что коэффициент поглощения газа не зависит от частоты. Тогда в соответствии с принятой в работе [7] моделью одномерное нестационарное течение околозвездного газа, зависящее от координаты x и времени t, будет описываться следующими уравнениями для плотности ρ, скорости u, степени ионизации s, давления p:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}=\sigma(1-s)\Phi-\frac{s^2\rho}{m_H}\alpha(T) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}\frac{p}{\rho}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}\frac{p}{\rho}\right)+\frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}= \tag{1.4}$$

$$=\frac{\sigma kT_+}{m_H}(1-s)\Phi-\frac{s^2\rho}{m_H^2}\beta(T)$$

$$p=[1+s)\rho kT/m_H$$

Здесь σ — сечение фотоионизации атомов водорода; Φ — поток ионизирующей радиации; m_H — масса атома водорода; $\alpha(T)\cong 4\cdot 10^{-11}T^{-1/2}$ — коэффициент фоторекомбинации, зависящий от температуры газа T; k — постоянная Больцмана; kT_+ — средняя энергия, поглощаемая газом при каждом акте фотоионизации. Функция $\beta(T)$ характеризует излучаемую газом энергию и имеет вид $\beta(T)={}^3/_2kT\alpha(T)$ (если учитывается охлаждение только при фоторекомбинациях) или

$$\beta(T)=\frac{3}{2}kT\alpha(T)+\begin{cases}0.97\cdot 10^{-31}(T-4000^\circ\,\mathrm{K})^2, & T\geqslant 4000^\circ\,\mathrm{K}\\ 0, & T\leqslant 4000^\circ\,\mathrm{K}\end{cases}$$

если приближенно принимается во внимание возбуждение метастабильных уровней ионов.

Строго говоря, система (1.1) — (1.4) должна быть дополнена уравнением переноса излучения. Однако ниже всюду принимается допущение $\Phi=\mathrm{const}$.

Условие, при котором это допущение справедливо, можно получить следующим образом.

Предположим, что состояние газа не слишком далеко от стационарного, т. е.

$$\sigma(1-s)\Phi\sim\frac{s^2\rho}{m_H}\alpha(T),\qquad \frac{\sigma kT_+}{m_H}(1-s)\Phi\sim\frac{s^2\rho}{m_H^2}\beta(T)$$

Тогда для возмущений с характерным размером L, распространяющихся со скоростью звука c, из (1.3), (1.4) имеем

$$\frac{c}{L}\frac{kT}{m_H}\sim\frac{\sigma kT_+}{m_H}(1-s)\Phi\sim\frac{s^2\rho\alpha(T)}{m_H^2}kT_+$$

Так как в области HII $s\approx 1$, а $T_+\sim T$, то $L\sim cm_H/\rho\alpha(T)$. В то же время поток Φ существенно меняется на расстояниях порядка длины пробега квантов L_c, где $L_c=m_H/\sigma\rho(1-s)$. Следовательно, предположение $\Phi=\mathrm{const}$ будет верным, если

$$L/L_c\sim\frac{c\sigma}{\alpha(T)}(1-s)\ll 1 \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.5) типичное для области HII значение $c=10^6$ *см/сек* и принимая $\sigma\approx 0.5\cdot 10^{-17}$ *см*^{2}, $\alpha(T)=4\cdot 10^{-13}$ *сек*$^{-1}\cdot$*см*^{3}, получаем $25\cdot(1-s)/2\ll 1$. Как следует из проведенных в работах [3–6] расчетов, в большей части области HII (исключая лишь ее самые внешние слои) степень ионизации водорода близка к единице и условие (1.5) можно считать выполненным.

2. Распространение малых возмущений. Пусть в стационарных условиях плотность, степень ионизации и температура газа равны соответственно ρ_0, s_0, T_0. Считая возмущенное прохождением волны состояние газа мало отличающимся от стационарного, из (1.1) — (1.4) получим для определения возмущений ρ', u', s', T' систему уравнений вида

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial u'}{\partial x}=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t}=-\frac{(1+s_0)kT_0}{m_{\text{н}}\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}-\frac{kT_0}{m_{\text{н}}}\frac{\partial s'}{\partial x}-\frac{(1+s_0)k}{m_{\text{н}}}\frac{\partial T'}{\partial x} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t}=-\frac{s_0^2\alpha(T_0)}{m_{\text{н}}}\rho'-\left[\sigma\Phi+\frac{2\rho_0 s_0\alpha(T_0)}{m_{\text{н}}}\right]s'-\frac{s_0^2\rho_0}{m_{\text{н}}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)_0 T' \tag{2.3}$$

$$\frac{3}{2}\frac{kT_0}{m_{\text{н}}}\frac{\partial s'}{\partial t}+\frac{3}{2}\frac{(1+s_0)k}{m_{\text{н}}}\frac{\partial T'}{\partial t}+\frac{(1+s_0)kT_0}{m_{\text{н}}}\frac{\partial u'}{\partial x}= \tag{2.4}$$

$$=-\frac{s_0^2\beta(T_0)}{m_{\text{н}}^2}\rho'-\left[\frac{\sigma kT_+}{m_{\text{н}}}\Phi+\frac{2\rho_0 s_0\beta(T_0)}{m_{\text{н}}^2}\right]s'-\frac{s_0^2\rho_0}{m_{\text{н}}^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial T}\right)_0 T'$$

$$(\partial\alpha/\partial T)_0=(\partial\alpha/\partial T)_{T=T_0},\qquad (\partial\beta/\partial T)_0=(\partial\beta/\partial T)_{T=T_0}$$

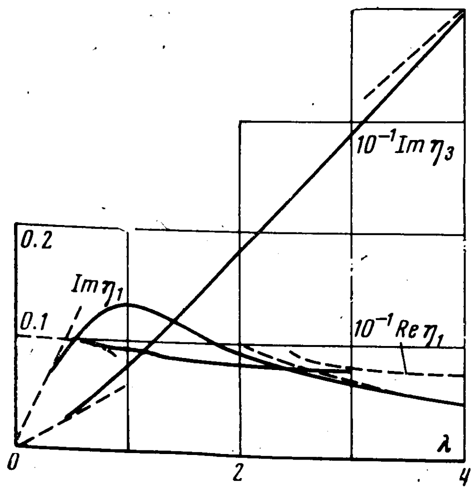
Решение уравнений (2.1) — (2.4) целесообразно искать в форме

$$\rho'=A_1\rho_0\exp i(\omega t+hx),\qquad u'=A_2c_0\exp i(\omega t+hx)$$

$$s'=A_3\frac{\tau_i}{\tau_r}\exp i(\omega t+hx),\qquad T'=A_4T_0\exp i(\omega t+hx)$$

$$c_0^2=\frac{5}{3}\frac{(1+s_0)kT_0}{m_{\text{н}}},\qquad \tau_r=\frac{m_{\text{н}}}{s_0^2\rho_0\alpha(T_0)},\qquad \tau_i=\frac{1}{\sigma\Phi}$$

Заметим, что τ_r и τ_i есть соответственно характерные времена фоторекомбинации и фотоионизации, причем в рассматриваемом случае $\tau_i/\tau_r\ll 1$. Действительно, так как $\sigma(1-s_0)\Phi=s_0^2\rho_0\alpha(T_0)/m_{\text{н}}$, то $\tau_i/\tau_r=(1-s_0)\ll 1$ в силу условия (1.5).



Фиг. 1

Вводя обозначения $\eta=\omega/hc_0$, $L_0=c_0m_{\text{н}}/s_0^2\rho_0\alpha(T_0)$ (L_0 есть расстояние, проходимое волной, распространяющейся со скоростью c_0, за характерное время τ_r), $L=2\pi/h$ и пренебрегая в (2.2) — (2.4) величиной τ_i/τ_r по сравнению с единицей, из условия обращения в нуль детерминанта линейной системы уравнений, которым удовлетворяют постоянные A_1, A_2, A_3, A_4, находим

$$(5\eta^2-3)(i\eta+\lambda)-2i\eta=0, \tag{2.5}$$

$$\lambda=\frac{1}{2\pi}\frac{L}{L_0}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\beta}{3k\alpha}\right)\right]_0$$

Легко убедиться, что при $L/L_0\to 0$ $\eta\to\pm 1$, т. е. возмущения распространяются с адиабатической скоростью звука c_0 (в данном случае имеется также корень $\eta=0$, соответствующий $p'=0$, $u'=0$). Если $L/L_0\to\infty$, то $\eta\to\pm(^3/_5)^{1/2}$ и фазовая скорость волн равна изотермической скорости звука $c_i=(2kT/m_{\text{н}})^{1/2}=(^3/_5)^{1/2}c_0$.

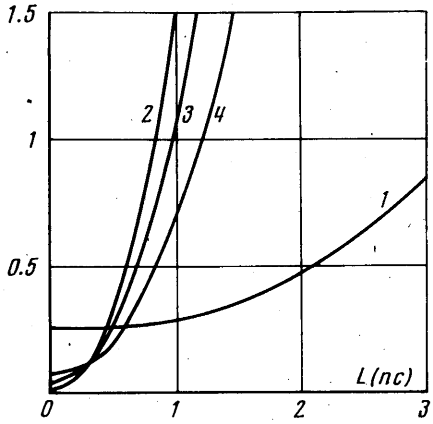
Представляя η в виде ряда по степеням L/L_0 ($L/L_0\ll 1$) или L_0/L ($L/L_0\gg 1$) и ограничиваясь членами до второго порядка включительно, находим, что

$$\eta_{1,2}=\pm(1-0.14\lambda^2)+i\frac{\lambda}{5},\quad \eta_3=i\frac{3}{5}\lambda \qquad (L/L_0\ll 1)$$

$$\eta_{1,2}=\pm\left[(^3/_5)^{1/2}+\frac{1}{2\sqrt{15}\,\lambda^2}\right]+i\frac{1}{5\lambda},\quad \eta_3=i\lambda \qquad (L/L_0\gg 1)$$

Детальное исследование корней уравнения (2.5) позволяет найти зависимость $\operatorname{Re}\eta$ и $\operatorname{Jm}\eta$ от λ в общем случае. Оказывается, что всегда $\operatorname{Re}\eta_3=0$. Функции $\operatorname{Re}\eta_1$, $\operatorname{Jm}\eta_1$, $\operatorname{Jm}\eta_3$ представлены на фиг. 1 (пунктирные линии соответствуют полученным выше разложениям η при малых и больших L).

Зависимость характерного времени затухания колебаний $\tau=(\operatorname{Jm}\omega)^{-1}=L(2\pi c_0\operatorname{Jm}\eta_1)^{-1}$ от L иллюстрируется фиг. 2 (по оси ординат отложены величины $\tau\cdot 10^{-13}$). Для кривой *1* температура $T_0=10^4$ °К и принималось во внимание только охлаждение газа при фоторекомбинациях, т. е. $\beta(T)=^3/_2kT\alpha(T)$. Кривые *2—4* построены с учетом потерь энергии на возбуждение метастабильных уровней (см. приведенное выше приближенное выражение $\beta(T)$) для температур 10^4, $0.7\cdot10^4$, $0.5\cdot10^4$ °К.



Фиг. 2

3. Волны конечной амплитуды. Полученные в предыдущем параграфе результаты показывают, что учет радиационных процессов в линейном приближении приводит к дисперсии и затуханию возмущений. Нелинейность может быть принята во внимание, если воспользоваться достаточно общим методом исследования волн малой, но конечной амплитуды в диспергирующих средах [8]. Сущность метода заключается во введении наряду с амплитудой возмущения другого малого параметра (по порядку величины равного первому), который характеризует эффекты дисперсии и диссипации. При этом в уравнениях, описывающих распространение волн, удерживаются члены второго порядка малости по амплитуде.

Следуя указанному методу, рассмотрим сначала колебания, не сильно отличающиеся от адиабатических. Тогда, предполагая правые части уравнений (1.3), (1.4) достаточно малыми, целесообразно представить давление и плотность в виде

$$p(x,t)=p(u)+\psi(x,t),\qquad \rho(x,t)=\rho(u)+\varphi(x,t)$$

где функции $\psi(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ считаются малыми второго порядка, а $p(u)$ и $\rho(u)$ связаны теми же соотношениями, что и в простой волне, распространяющейся в положительном направлении оси x

$$c(u)\frac{d\rho(u)}{du}=\rho(u),\qquad c(u)=c_0+\frac{\gamma-1}{2}u,$$

$$\frac{dp(u)}{du}=c^2(u)\frac{d\rho(u)}{du}=c(u)\rho(u)\qquad (\gamma=^5/_3)$$

Принимая, как и выше, $\tau_i \ll \tau_r$ (тогда правая часть (1.3) будет равна нулю), из (1.4) получим

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+c^2\rho\frac{\partial u}{\partial x}= \tag{3.1}$$

$$=(\gamma-1)\left(\frac{\rho}{m_{\text{н}}}\right)^2\{kT_+\alpha(T)-\beta(T)\} \qquad (c^2=\gamma p/\rho)$$

Комбинируя (1.2) и (3.1), с точностью до членов второго порядка имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left[u+c(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-c_0\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma k}\frac{\rho_0^2}{m_{\text{н}}}c_0\left[\frac{\partial}{\partial T}\{kT_+\alpha(T)-\beta(T)\}\right]_0 u \tag{3.2}$$

Так как в линейном приближении u удовлетворяет уравнению $\partial u/\partial t+$ $+c_0\partial u/\partial x=0$ и решение этого уравнения с принятой точностью можно подставить в правую часть (3.2), то $\partial\psi/\partial t+c_0\partial\psi/\partial x=0$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(c_0+\frac{\gamma+1}{2}u\right)\frac{\partial u}{\partial x}=\mu u, \tag{3.3}$$

$$\mu=\frac{(\gamma-1)^2\rho_0}{4\gamma k m_{\text{н}}}\left[\frac{\partial}{\partial T}\{kT_+\alpha(T)-\beta(T)\}\right]_0$$

Координаты характеристических кривых уравнения (3.3) удовлетворяют соотношению

$$\frac{dx}{\partial t}=c_0+\frac{\gamma+1}{2}u \tag{3.4}$$

Вдоль характеристик $du/dt=\mu u$ или $u=F(x_0)e^{\mu t}$, где $F(x_0)$ — значение скорости в некоторой точке x_0 в начальный момент времени $t=0$. Интегрируя (3.4), получаем

$$x=c_0t+\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{\mu}u[1-e^{-\mu t}]+x_0$$

$$u=F\left[x-c_0t-\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{\mu}u(1-e^{-\mu t})\right]e^{\mu t}$$

Полезно также иметь представление

$$x=c_0t+\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{\mu}u[1-e^{-\mu t}]+f(ue^{-\mu t}),$$

позволяющее найти момент опрокидывания волны t_0 (функция $f(ue^{-\mu t})$ определяется, конечно, начальными условиями). Поскольку при $t=t_0$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\gamma+1}{2\mu}(1-e^{-\mu t})+f'(ue^{-\mu t})e^{-\mu t}=0, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=f''(ue^{-\mu t})e^{-2\mu t}=0.$$

(см., например, [9]), то

$$t_0=-\frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{\gamma+1}{2\mu}\left(\frac{\gamma+1}{2\mu}-f'\right)^{-1}\right] \tag{3.5}$$

При $\mu\to0$ формула (3.5) совпадает с известной из гидродинамики ([9]).

В другом предельном случае, когда колебания близки к изотермическим, коэффициенты, входящие в правую часть (3.1), велики и малым параметром естественно считать μ^{-1}. Функции $p(u)$ и $\rho(u)$ теперь удовлетворяют соотношениям

$$c_i\frac{d\rho(u)}{du}=\rho(u),\quad c(u)=c_i,\quad \frac{dp(u)}{du}=c_i^2\frac{d\rho(u)}{du}=c_i\rho(u)$$

причем для простых волн $\partial u/\partial t+(u+c_i)\partial u/\partial x=0$. Как и выше, с учетом радиационных процессов это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u+c_i)\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial x}\tag{3.6}$$

Воспользовавшись далее уравнением состояния $p=2\rho kT/m_{\text{н}}$, найдем, что возмущения температуры должны быть второго порядка малости. Тогда из (3.1) следует:

$$\psi-c_i^2\varphi=\frac{1}{5}\rho_0c_i\mu^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{5}{3}c_i\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Согласно (1.1) и (3.6), $\partial\varphi/\partial t=c_i^{-1}\partial\psi/\partial x$, т. е.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-c_i\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{2}{15}\rho_0c_i^3\mu^{-1}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

С другой стороны, очевидно, что $\partial\psi/\partial t+c_i\partial\psi/\partial x=0$. Следовательно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\varepsilon\rho_0\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\qquad\left(\varepsilon=-\frac{1}{15}c_i^2\mu^{-1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u+c_i)\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\tag{3.7}$$

Если перейти к системе отсчета, движущейся со скоростью c_i относительно среды, т. е. положить $\xi=x-c_it$, то (3.7) принимает форму хорошо известного уравнения Бюргерса (см., в частности, [8]), которое описывает распространение конечных возмущений в вязком теплопроводном газе

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial\xi}=\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\tag{3.8}$$

Решение уравнения (3.8) подробно исследовано ([8]). Характерно, что вид профиля скорости при $t\to\infty$ определяется лишь единственной величиной $M=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,0)d\xi$ (M — так называемый главный момент), зависящей от начальных условий. Когда $\varepsilon\to0$, профиль $u(\xi,t)$ имеет вид треугольника со скачком, интенсивность которого равна $(2M/t)^{1/2}$; основание профиля растет как $t^{1/2}$, так что его площадь не меняется со временем. Кроме того, уравнение Бюргерса имеет стационарное решение, соответствующее волне, перемещающейся без деформации с постоянной скоростью W: $u=f(\xi-Wt)$.

Интегрирование (3.8) дает для $f(x)$ и W выражения

$$f(x)=u_0+\frac{\Delta u}{1+\exp(\Delta ux/2\varepsilon)},\qquad W=u_0+\frac{\Delta u}{2}\tag{3.9}$$

где u_0 и Δu — постоянные интегрирования.

Ясно, что, когда параметр ε определяется коэффициентами вязкости и теплопроводности, функция $f(x)$ представляет собой профиль скорости в ударной волне. При этом именно вязкая диссипация и теплопроводность, как известно, препятствуют укручению профиля. В излучающем газе, однако, как следует из рассмотренного выше, наличие диссипации еще не обеспечивает существования стационарного решения системы (1.1) — (1.4). Это объясняется тем, что процесс укручения профиля скорости сопровождается (вследствие нелинейности) возникновением коротковолновых возмущений и прекращается, если последние достаточно быстро затухают. Из линейной теории следует, что для колебаний, близких к изотермическим, затухание пропорционально квадрату волнового числа h и можно ожидать существования стационарного решения (такая возможность, согласно (3.9), действительно реализуется). Для колебаний, близких к адиабатическим, как было найдено, затухание не зависит от h, что и приводит к укручению профиля.

В заключение отметим, что исследованию распространения волн в излучающем газе посвящен целый ряд работ (см., например, [10–13] и библиографии к ним). В большинстве из них предполагается выполненным закон Кирхгофа. Характерной особенностью принятой выше модели является неприменимость закона Кирхгофа. Поэтому, вообще говоря, отсутствует простая связь между коэффициентами излучения и поглощения вещества. Тем не менее интересно, что (3.3) и (3.7) по существу аналогичны полученным в работах [12, 13] уравнениям для квазиизэнтропического и квазиизотермического течений оптически тонких сред, хотя авторы [12, 13] использовали закон Кирхгофа.

Поступила 19 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spitzer L.* Diffuse matter in space. N. Y., Interscience, 1968.
2. *Каплан С. А.* Межзвездная газодинамика. М., Физматгиз, 1958.
3. *Hjellming R. M.* Physical processes in HII regions. Astrophys. J., 1966, vol. 143, No. 2.
4. *Rubin R. H.* The structure and properties of HII regions. Astrophys. J., 1968, vol. 153, No. 3, pt 1.
5. *Краснобаев К. В.* Статическая зона HII для Солнца. Астрон. ж., 1970, т. 47, вып. 5.
6. *Краснобаев К. В.* Ионизация и нагрев газа, окружающего источник неравновесного излучения. Тезисы докл. и сообщ. на 3-м Всес. совещании по лучистому теплообмену. Краснодар, 1973.
7. *Axford W. I.* Ionization fronts in interstellar gas: the structure of ionization fronts. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1961, vol. A253, No. 1029.
8. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
10. *Прокофьев В. А.* Слабые волны в сжимаемой жидкости с учетом излучения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
11. *Прокофьев В. А.* Влияние излучения на распространение малых возмущений в вязкой и теплопроводной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
12. *Александров В. В., Рыжов О. С.* О нелинейной акустике излучающего газа. I. Общий анализ уравнений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 6.
13. *Александров В. В., Рыжов О. С.* О нелинейной акустике излучающего газа. II. Слабые ударные волны. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 3.