

РАСЧЕТ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА  
КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, М. И. НИШТ, О. Н. СОКОЛОВА

(Москва)

Интерес к изучению отрывных течений, значительно возросший в последнее время, объясняется потребностями практики и расширением возможностей их исследования с помощью ЦВМ [1-3]. И все же в пространственных задачах прогресс пока невелик — имеются лишь частные решения отрывных задач, к тому же полученные с рядом дополнительных предположений [4-6].

В настоящей работе для изучения отрывного обтекания крыла произвольной формы в плане развиваются подходы, разработанные при решении стационарных [7] и нестационарных [8] нелинейных задач о безотрывном обтекании крыла. Изучается произвольное движение тонкой несущей поверхности в несжимаемой среде, сопровождающееся сходом вихревой пелены не только с задних и боковых, но и передних кромок. Формулируются некоторые общие принципы схематизации трехмерных отрывных течений в рамках идеальной среды.

Рассматривается весь процесс формирования течения, т. е. задача ставится и решается полностью как нестационарная. Это существенно и для изучения предельного течения, которое в отличие от случая безотрывного обтекания обычно оказывается нестационарным (периодически изменяющимся во времени). На кромках крыла выполняется гипотеза Чаплыгина — Жуковского о конечности скоростей, а на всей поверхности — условие непротекания. Практическая реализация схемы осуществляется численным решением краевых задач гидродинамики на ЦВМ и основывается на применении и дальнейшем развитии метода дискретных вихрей.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим неустановившееся движение тонкой несущей поверхности в несжимаемой невязкой среде, сопровождающееся отрывом потока с острых кромок. Введем связанную систему координат  $x, y, z$ . Пусть  $S$  — поверхность крыла,  $\sigma_i$  — поверхности тангенциального разрыва скорости,  $t$  — время. Предположим, что везде вне крыла и его следа течение является безвихревым, тогда здесь для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi(x, y, z, t)$  справедливо уравнение Лапласа

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Кроме того, имеют место условия непротекания на  $S$  и непрерывности давлений на вихревых поверхностях  $\sigma_i$ . В бесконечности перед крылом возмущенные скорости обращаются в нуль. На всех острых кромках крыла выполняется гипотеза Чаплыгина — Жуковского о конечности скоростей (или об отсутствии перепадов давлений). Вообще говоря, это возможно только при сходе с этих кромок вихревых поверхностей  $\sigma_i$ .

Таким образом наряду с уравнением (1.1) имеем соотношения

$$(1.2) \quad (\nabla \varphi - W_e) \cdot n = 0, \quad (x, y, z) \in S$$

$$(1.3) \quad p_+ = p_-, \quad (x, y, z) \in \sigma_i$$

$$(1.4) \quad \lim \nabla \varphi = 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad z \rightarrow \pm\infty$$

$$(1.5) \quad p_+ = p_-, \quad (x, y, z) \in L$$

Здесь  $W_e$  — вектор переносной скорости точек поверхности крыла,  $n$  — вектор единичной нормали к  $S$ ,  $L$  — линия, соответствующая острым кром-



рольная точка — на линии  $v$  ( $0 \leq v \leq n_{p,p-1}$ ) посередине между соседними поперечными и продольными вихрями. В отличие от безотрывного обтекания свободные вихри сходят не только с задней и боковой кромок, но и с передней. В результате вне крыла образуются три системы свободных вихрей — кормовая система I, торцевая система II и носовая система III (смотри, например, фиг. 1).

В каждый расчетный момент времени  $r$  неизвестными являются циркуляции поперечных вихрей на крыле  $\Gamma_{\mu k}^{\mu, k-1, r}$  ( $1 \leq k \leq N$ ,  $1 \leq \mu \leq n_{k, k-1}$ ) и только что сошедших в поток свободных в системе I  $\delta_{k, k-1}^{(1)r}$  и в системе III  $\delta_{k, k-1}^{(3)r}$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Циркуляции остальных дискретных вихрей известны из расчета в предыдущие моменты времени или могут быть вычислены из условия замкнутости вихревых систем. Таким образом, при любом  $r$  число неизвестных равно

$$m = \sum_{k=1}^N (n_{k, k-1} + 2)$$

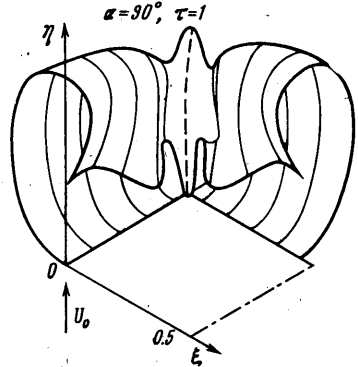
Выполняя в каждый расчетный момент  $r$  граничное условие о непротекании крыла, гипотезу Чаплыгина — Жуковского и теорему о постоянстве циркуляции по замкнутому жидкому контуру, получим  $m$  линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных циркуляций

$$(2.2) \quad \sum_{k=1}^N \left( \sum_{\mu=1}^{n_{k, k-1}} \Gamma_{\mu k}^{\mu, k-1, r} a_{\mu k 0v} + \delta_{k, k-1}^{(1)r} a_{n+1, k 0v} + \delta_{k, k-1}^{(3)r} a_{0, k-1, p, p-1} \right) = H_{0v}^{p, p-1, r}$$

$p=1, 2, \dots, N; v=0, 1, \dots, n_{p, p-1}$

$$\sum_{\mu=1}^{n_{k, k-1}} \Gamma_{\mu k}^{\mu, k-1, r} + \sum_{s=1}^3 (\delta_{k, k-1}^{(s)r} + \delta_{k, k-1}^{(3)r}) = C_{k, k-1}$$

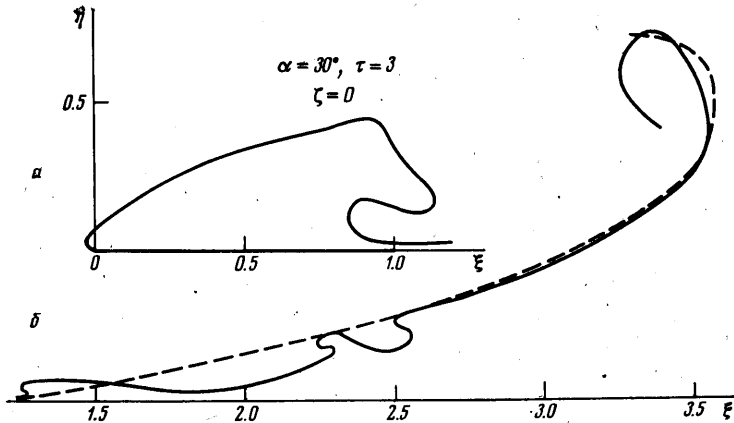
$k=1, 2, \dots, N; r=1, 2, \dots$



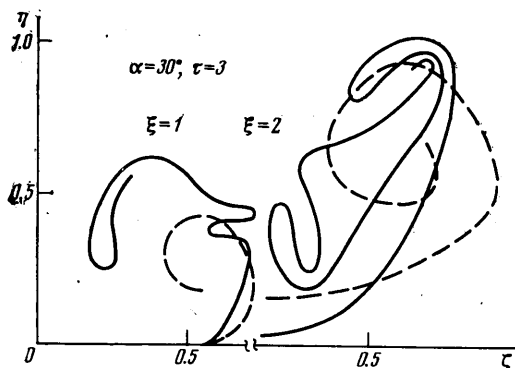
Фиг. 2

Коэффициенты этой системы, в том числе и правые части, являются функциями безразмерных скосов и известных циркуляций свободных вихрей, следовательно, зависят от формы следа. Константы  $C_{k, k-1}$  определяются начальными условиями задачи.

Вычисления ведутся последовательно, по шагам. В первый момент ( $r=1$ ) форма следа известна — он сопрягается с крылом по касательным поверхностям. Это позволяет вычислить правые части уравнений (2.2) и, решив их, найти циркуляции вих-



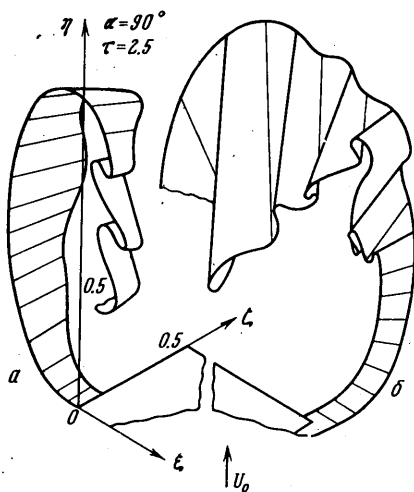
Фиг. 3



Фиг. 4

рей. После этого с помощью соотношений (2.1) выстраиваются вихревые структуры и т. д. Относительные скорости потока в точках следа вычисляются с учетом возмущенных скоростей, вызванных системами суммарных вихрей крыла и свободных вихрей систем I, II и III. Итерационный процесс, обеспечивающий последовательное построение формы следа и решение системы уравнений, может быть организован различным образом. Для расчета аэродинамической нагрузки используется интеграл Коши — Лагранжа [8].

**3. Примеры.** Приведены результаты расчета нестационарного срывного обтекания прямоугольного крыла с удлинением  $\lambda=1$  под углами атаки  $\alpha=30^\circ$  и  $90^\circ$  в случае, когда оно из состояния покоя внезапно начинает

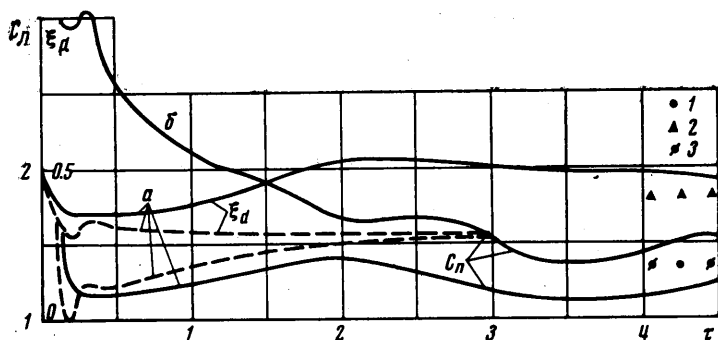


Фиг. 5

двигаться с постоянной скоростью  $U_0$ . В расчетах половина крыла заменялась 50 вихрями ( $N=5$ ,  $n=10$ ). Шаг по безразмерному времени составлял  $\Delta\tau=0.1$  ( $\tau=U_0 t/b$ ,  $b$  — хорда крыла).

На фиг. 1 и 2 в системе относительных координат  $\xi=x/b$ ,  $\eta=y/b$ ,  $\xi=z/b$  приведены вихревые структуры крыла при  $\tau=1$  для углов атаки  $\alpha=30^\circ$  и  $90^\circ$  соответственно, причем вследствие симметрии течения для  $\alpha=90^\circ$  показана только четвертая часть следа, а для  $\alpha=30^\circ$  — его половина. Сплошными линиями в следе показаны продольные свободные вихри. Чтобы не усложнять чертежи, поперечные вихревые отрезки опущены. Сходящая с кромок крыла пелена сворачивается в вихревой жгут. С течением времени в пелене

появляются петлеобразные формы, предшествующие ее разрушению. На фиг. 3—5 показана форма следа для  $\alpha=30^\circ$  и  $90^\circ$  при  $\tau=3$  и 2.5 (сплошные линии — отрывное обтекание, штриховые — безотрывное [8]). Ввиду сложности структуры для  $\alpha=30^\circ$  приведены форма носовой (фиг. 3, а) и кормовой (фиг. 3, б) пелен в сечении  $\xi=0$  и форма боковой пелены в сечениях  $\xi=1$  и 2 (фиг. 4), а для  $\alpha=90^\circ$  (фиг. 5) — форма вихревых полос а около плоскости симметрии и б вблизи угловой точки. На фиг. 3 и 5 часть пелены не показана. Взаимное влияние носовой



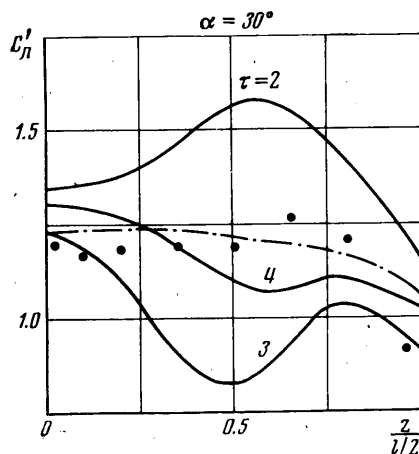
Фиг. 6

(фиг. 3, а) и кормовой (фиг. 3, б) пелен приводит их к периодическому разрушению, а также вызывает деформацию бокового жгута по сравнению с безотрывным обтеканием (фиг. 4).

На фиг. 6 показано изменение по безразмерному времени  $\tau$  коэффициента нормальной силы  $C_n = N(1/2\rho U_0^2 S)^{-1}$  и безразмерной координаты центра давления  $\xi_a = x_a/b$  ( $N$  — нормальная сила,  $S$  — площадь крыла, координата  $x_a$  отсчитывается от передней кромки). Кривые  $a$  относятся к случаю  $\alpha = 30^\circ$ , кривая  $b$  — к  $\alpha = 90^\circ$ . Для сравнения приведены характеристики безотрывного обтекания при  $\alpha = 30^\circ$  (штриховые линии), взятые из работы [8], и опытные данные, полученные в стационарном эксперименте на тонком крыле (относительная толщина  $s = 0.03$ ) с острыми кромками (1 — для  $C_n$ , 2 — для  $\xi_a$  при  $\alpha = 30^\circ$ , 3 — для  $C_n$  при  $\alpha = 90^\circ$ ). Периодическое изменение формы следа приводит к периодическому нагружению крыла, особенно четко выраженному при  $\alpha = 30^\circ$ . При  $\alpha = 90^\circ$  и в расчете, и в эксперименте центр давления располагается на середине хорды.

На фиг. 7 для  $\alpha = 30^\circ$  показаны коэффициенты нормальной силы сечений  $C_n'$  на полуразмахе крыла ( $l$  — размах), полученные расчетом при  $\tau = 2, 3$  и 4 (сплошные линии), осредненные по времени величины этих коэффициентов (штрихпунктир), а также взятые из эксперимента (точки) их стационарные значения. Из приведенных на фиг. 6 и 7 данных следует, что как суммарные, так и распределенные расчетные характеристики крыла удовлетворительно согласуются с опытными данными.

Результаты многочисленных расчетов показали, что носовая пелена у треугольных крыльев и близких к ним форм в плане в ряде случаев может быть получена и в рамках стационарной нелинейной теории [6, 7]. У крыльев малой стреловидности, прежде всего прямоугольных, реализуется только нестационарная схема отрывного обтекания (в том числе и при  $\tau \rightarrow \infty$ ).



Фиг. 7

Авторы благодарят В. Г. Табачникова за любезно предоставленные экспериментальные данные.

Поступила 30 IV 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
2. *Фжен П. К.* Отрывные течения. М., «Мир», 1972.
3. *Никольский А. А., Бегяев С. К., Малышев И. П.* О предельной форме отрывного автомодельного течения идеальной жидкости. В сб. «Проблемы прикладной математики и механики». М., «Наука», 1971.
4. *Smith J. H. B.* Improved calculations of leading-edge separation from slender, thin, delta wings. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1968, vol. 306, No. 1484.
5. *Legendre R.* Condition de Joukowski en écoulement tridimensionnel. XIII Международный конгресс по теоретической и прикладной механике (Сборник аннотаций). М., «Наука», 1972.
6. *Minoru O., Tsutomu T.* Predictions of vortex-lift characteristics by an extended vortex-lattice method. J. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., 1972, vol. 20, No. 226.
7. *Белоцерковский С. М.* Расчет обтекания крыльев произвольной формы в плане в широком диапазоне углов атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
8. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И.* Нестационарная нелинейная теория тонкого крыла произвольной формы в плане. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.