

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОДОБИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ
СВЕРХЗВУКОВЫМИ РАВНОМЕРНЫМИ И НЕРАВНОМЕРНЫМИ
ПОТОКАМИ ГАЗА

Е. Г. ШАПИРО

(Москва)

В работе предложена аппроксимационная формула для градиента скорости в критической точке для эллипсоидов вращения, пригодная как для равновесного, так и для совершенного газа. Показано, что приближенное решение задачи об обтекании сферы потоком, поступающим от сверхзвукового источника, можно получить, имея решение задачи об обтекании сферы равномерным потоком.

1. Обтекание тела заданной формы совершенным газом определяется показателем адиабаты γ и числом Маха набегающего потока M_∞ , а равновесное обтекание — параметрами набегающего потока M_∞ , p_∞ , T_∞ и уравнением состояния. Однако приближенные законы подобия, установленные для сверхзвуковых обтеканий, позволили сократить число определяющих параметров. В частности, отнесенный к максимальной скорости потока u_{\max} градиент скорости в критической точке (скорость растекания) $R_s dv_0 / u_{\max} ds$ оказался зависящим для равновесного газа только от сжатия в прямом скачке $\kappa = \rho_\infty / \rho_s |_{\phi=0}$ [1-4]. Там же показано, что точки, полученные при расчете обтекания сферы и эллипсоидов вращения совершенным газом с различными значениями γ , ложатся на универсальные кривые, если заменить κ величиной $(\gamma-1) / (\gamma+1)$.

В [5] приводится обоснование такой замены, а также показывается, что необходимость в ней отпадает, если в качестве масштаба скорости выбрать u_∞ , а не u_{\max} . В этой связи следует отметить, что наличие в эмпирической формуле для скорости растекания, предложенной в [3, 4] для случая обтекания сферы, дополнительных параметров (число Маха и давление) и ее сравнительно большие отклонения от результатов численных расчетов, особенно при малых числах Маха и значениях γ , близких к единице (достигающие 24% при $M_\infty=1,5$), связаны, по-видимому, с неудачным выбором масштаба скоростей. В [5] на основании данных для эллипсоидов вращения показано, что скорость растекания может быть аппроксимирована формулой

$$(1.1) \quad \frac{b}{u_\infty} \frac{dv_0}{ds} = \left[\frac{1.72}{\delta^{1.18}} + \left(0.7 - \frac{1.5}{\delta^{1.25}} \right) \sqrt{\kappa} \right] \sqrt{\kappa}$$

где $\delta = b/a$ — отношение полуосей. Для случая обтекания сферы эта формула давала точность не ниже 4% во всем рассмотренном диапазоне чисел Маха ($1.45 \leq M_\infty \leq 6$).

2. В ряде случаев поток, набегающий на тело, оказывается неравномерным по величине и направлению. Простейший случай неравномерного осесимметричного течения — течение от пространственного источника — помимо самостоятельного значения представляет интерес еще и потому, что им можно моделировать многие другие неравномерные течения¹.

¹ Лебедев М. Г. Исследование течений газа при сверхзвуковом обтекании затупленных тел в сверхзвуковых струях, гл. 2. Канд. дисс., МГУ, 1971.

Уже в первых работах, связанных с неравномерными обтеканиями [4], замечены существенные изменения формы ударной волны и полей газодинамических параметров в ударном слое.

Рассмотрим обтекание сферы единичного радиуса потоком от пространственного источника, центр которого находится на расстоянии l от центра сферы. На фиг. 1 показано положение ударной волны и звуковой линии при обтекании сферы равномерным потоком равновесного воздуха с параметрами $M_\infty = M_{0s} = 4.5$, $p_\infty = p_{0s} = 0.023$ атм, $T_\infty = T_{0s} = 4058^\circ \text{K}$ (линии 1) и потоком от источника радиусом $r_* = 0.0625$ с теми же значениями газодинамических параметров на оси симметрии перед ударной волной (линии 2). Интенсивность источника характеризуется его радиусом r_* . Поля газодинамических параметров перед фронтом ударной волны получим из решения общего уравнения радиального установившегося течения

$$(2.1) \quad \frac{dV}{d\xi} [1 - M^2] + \frac{V}{\xi} = 0, \quad \xi = \left(\frac{L}{r_*} \right)^2$$

Граничными условиями для нахождения газодинамических параметров в ударном слое будут условия непротекания на поверхности сферы и законы сохранения на ударной волне. Расстояние от центра источника до точек ударной волны определялось по формуле

$$(2.2) \quad \xi = [(1 + \varepsilon) \sin \vartheta]^2 + [l - (1 + \varepsilon) \cos \vartheta]^2$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\vartheta)$ — расстояние вдоль луча $\vartheta = \text{const}$ от сферы до ударной волны (задача решалась в сферической системе координат, r, ϑ с центром, помещенным в центр сферы).

Неравномерность внешнего поля течения по величине проявляется в том, что значения газодинамических параметров в разных точках перед фронтом ударной волны различны за счет изменения ξ , а неравномерность по направлению — в том, что вектор скорости набегающего потока наклонен под углом φ к оси симметрии, что приходится учитывать в выражении для угла между касательной к фронту ударной волны и вектором скорости (см. фиг. 1)

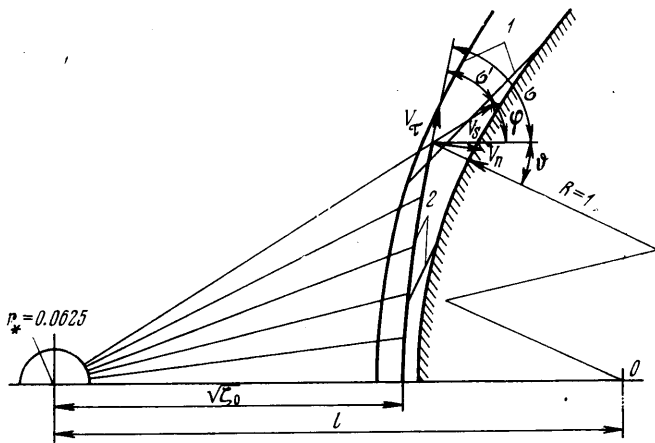
$$(2.3) \quad \sigma' = \sigma - \varphi, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} - \vartheta + \arctg \frac{\varepsilon_0'(\vartheta)}{1 + \varepsilon(\vartheta)}, \quad \varphi = \arctg \frac{(1 + \varepsilon) \sin \vartheta}{l - (1 + \varepsilon) \cos \vartheta}$$

В случае равномерного обтекания σ совпадает с углом между скоростью и касательной к ударной волне.

Расчеты обтекания сферы потоком равновесного воздуха, проведенные автором для $M_{0s} = 4.5$ и 2 в широком диапазоне изменения радиуса источника, показали, что, как и при обтекании плоскости, влияние неравномерности внешнего потока на поля газодинамических параметров в ударном слое оказывается тем сильнее, чем дальше находится точка от оси симметрии; на самой оси симметрии распределение газодинамических параметров определяется практически только условиями непосредственно перед скачком.

Анализ зависимостей профилей газодинамических параметров от ϑ на линиях $\xi = (r - 1) / \varepsilon = \text{const}$ при различных радиусах источника и одинаковых условиях перед фронтом ударной волны на оси симметрии выявил наличие подобия. Если в качестве параметра подобия выбрать положение звуковой точки на поверхности тела ϑ_* и рассматривать поведение функ-

ций в зависимости от переменной $\Theta = \vartheta / \vartheta_*$, то профили газодинамических параметров для различных r_* на линиях $\xi = \text{const}$ будут совпадать с высокой точностью. Универсальной оказывается и зависимость $E = \varepsilon / \varepsilon_0$ от Θ . На фиг. 2 в качестве примера приведено распределение температур, а также форма ударной волны для обтекания сферы как равномерным



Фиг. 1

поток равновесного воздуха (сплошные линии), так и потоками от источников $r_* = 1.0 - 0.0625$ (1, 2, 3, 4 соответствуют $r_* = 1, 0.5, 0.1, 0.0625$) при $M_{0s} = 4.5$.

Поскольку значения всех газодинамических функций в точке торможения и звуковой точке определяются только условиями перед фронтом ударной волны, а распределение скорости на поверхности сферы оказалось близким к линейному, для градиента скорости в критической точке приближенно имеем

$$(2.4) \quad \frac{dv_{0*}}{d\vartheta} = \frac{dv_\infty}{d\vartheta} \frac{\vartheta_\infty}{\vartheta_*}$$

где $dv_\infty / d\vartheta$ — скорость растекания, а ϑ_∞ — угловая координата звуковой точки на сфере в случае обтекания равномерным потоком. Ошибка (2.4) ни в одном из проведенных расчетов не превышала 5%.

Будем считать E универсальной функцией Θ и пренебрежем неравномерностью внешнего течения по величине, тогда из универсальности профилей газодинамических параметров следует геометрическое подобие картины обтекания, т. е.

$$(2.5) \quad \sigma|_{r_*=\infty} = \sigma'|_{r_*}, \quad (\sigma + \vartheta)|_{r_*=\infty} = (\sigma + \vartheta)|_{r_*}$$

Здесь слева стоят значения углов, соответствующие равномерному обтеканию, справа — обтеканию от источника радиуса r_* .

Воспользовавшись (2.3), из (2.5) получим

$$(2.6) \quad \vartheta|_{r_*=\infty} = \vartheta + \arctg \frac{(1+\varepsilon) \sin \vartheta'}{l - (1+\varepsilon) \cos \vartheta} \Big|_{r_*}, \quad \frac{\varepsilon_0'(\vartheta)}{1+\varepsilon(\vartheta)} \Big|_{r_*=\infty} = \frac{\varepsilon_0'(\vartheta)}{1+\varepsilon(\vartheta)} \Big|_{r_*}$$

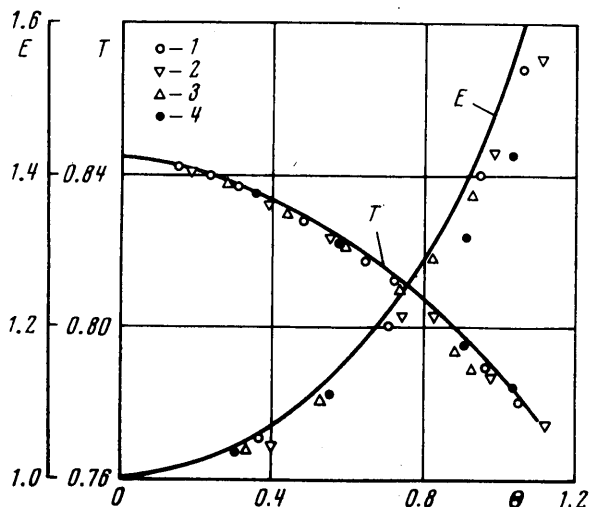
Переходя к универсальной координате Θ , при $\Theta \rightarrow 0$ получим окончательно

$$(2.7) \quad \frac{\vartheta_*}{\vartheta_\infty} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{k} + 1 \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{k} - 1 \right)^2 + \frac{4}{kl}} \right]$$

$$\varepsilon_{0*} = \frac{\vartheta_*}{\vartheta_\infty} \frac{k}{1 - k\vartheta_*/\vartheta_\infty}, \quad k = \frac{\varepsilon_{0\infty}}{1 + \varepsilon_{0\infty}}$$

С предложенными формулами хорошо согласуются и данные точных расчетов для обтекания сферы равновесным воздухом, проведенных автором, и данные для совершенного газа¹.

Таким образом, используя зависимости (2.7), можно построить приближенную картину обтекания сферы потоком от сверхзвукового источни-



Фиг. 2

ка, если имеется решение задачи об обтекании равномерным потоком с теми же значениями газодинамических параметров на оси симметрии перед ударной волной. Отдельные параметры (скорость растекания, отход ударной волны на оси симметрии) можно определить, не рассматривая картины в целом, а рассчитав их по приближенным формулам, предложенным в [3, 5], а затем при помощи соотношений (2.4) и (2.7) перейдя к неравномерному обтеканию.

Институт механики МГУ

Поступила 23 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев М. Г., Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Приближенный метод учета влияния реальности газа при гиперзвуковом обтекании сегментальных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
2. Гилинский С. М., Макарова Н. Е. Расчет сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком воздуха с учетом равновесных физико-химических превращений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
3. Базжин А. П., Благодсколов В. И., Минайлос А. Н., Пирогова С. В. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком совершенного газа, Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 3.
4. Минайлос А. Н. Параметры подобия и аппроксимационные зависимости осесимметричного сверхзвукового течения у эллипсоидов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
5. Шапиро Е. Г. Исследование сверхзвукового обтекания сферы потоком воздуха при высокой статической температуре. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1972, № 19.
6. Храмов Н. Е. Расчет обтекания сферы неравномерным потоком газа. Изв. АН СССР, ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.

¹ См. сноску на стр. 83.