

О СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Ю. Т. БОРЩЕВСКИЙ, Э. М. ЛИТВИНЕНКО

(Киев)

Нестационарная вихревая модель турбулентного течения, введенная в предыдущей статье [1] на основе идей работы [2], позволила аналитически получить выражение для продольной компоненты скорости жидкости, обусловливаемой только первичной турбулентностью (т. е. выбросами). При решении задачи непрерывные функции были заменены ступенчатыми. В данной статье ставится задача, основываясь на принятой ранее модели, найти поле пульсационных скоростей.

1. Пусть турбулентный поток движется вдоль  $x_1$  по плоскости  $x_3=0$ . Вихревая компонента продольной скорости  $\Delta v_{1\omega}$  жидкости определяется уравнениями [1]

$$(1.1) \quad \frac{1}{2m} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 = \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}$$

$$(1.2) \quad \frac{\omega v}{v_*^2} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \nabla^2 \eta = \sum^p f_p(x, \tau) \quad (x=x(x_1, x_2, x_3))$$

где  $m$  — постоянная,  $\varphi$  — аналог потенциала скорости ( $\Delta v_{k\omega} = \partial\varphi/\partial x_k$ ,  $k=1, 2, 3$ ),  $\omega$  — угловая частота,  $v$  — коэффициент кинематической вязкости,  $v_*$  — динамическая скорость,  $\tau$  — время,  $f_p$  — обобщенные финитные функции, сосредоточенные на источниках возмущений и определяющие их интенсивность.

Решение уравнения (1.2) записывается в виде свертки фундаментального решения оператора теплопроводности  $\mathcal{E}$  с правой частью

$$(1.3) \quad \eta_p(x, \tau) = \mathcal{E} \times f_p = \int f_p(\varepsilon, \tau) \mathcal{E}(x-\varepsilon, \tau) d\varepsilon$$

представляющей собой суперпозицию данных возмущений. Возьмем фундаментальное решение (1.2) в виде

$$(1.4) \quad \mathcal{E}(x, \tau) = \exp \left[ - \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* \right) \right] \left( \tau_* = \frac{v_*^2}{\omega v} \tau, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \right)$$

Если  $f_p(x, \tau)$  принимают постоянные значения и имеют смысл только в тех областях четырехмерного пространства, в которых существуют данные возмущения, то

$$(1.5) \quad \eta_p = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3}} \left\{ \exp \left[ - \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* + c \right) \right] - 1 \right\}$$

где постоянная определяется соотношением  $|f_p| = \text{Re}(e^c)$ . Решение уравнения (1.1) дается формулой

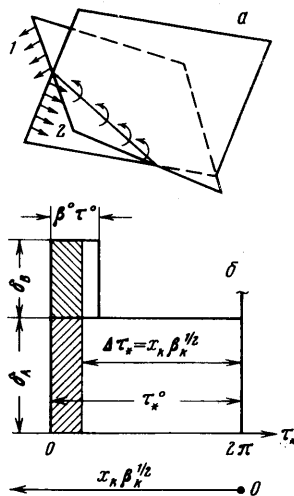
$$(1.6) \quad \varphi = c_2 - 2m \ln(c_1 - \eta)$$

Поэтому, считая решения (1.3) ÷ (1.5) связанными с волновыми возмущениями (вторичной турбулентностью [3]) и используя принцип супер-

позиции, согласно (1.6) и учете соответствующих постоянных имеем

$$(1.7) \quad \Delta\varphi = 2m \sum^p \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* + c \right)$$

2. С учетом результатов работы [1] картина движения жидкости выглядит следующим образом: система выбросов генерирует свою волну, движущуюся в виде плоскости, так как в (1.7) величины  $\sqrt{\beta_k}$  есть направляющие косинусы. При  $\beta_2=0$  имеем известные волны Толлмина — Шлихтинга; в общем же случае это волны Бенни — Линя. В результате взаимодействия всех волн возникают так называемые пятна Эммонса (выбросов) [4], а также трансверсальные стоячие волны. Очевидно, что жидкость, эжектируемая выбросом из пристеночной области, компенсируется эффектами волн, генерируемыми соседними выбросами. Если волны распространяются под различными углами, то при их взаимодействии происходит закручивание жидкости, как показано на фиг. 1, а. Пользуясь фильтрующим свойством  $\delta$ -функций, волновые возмущения можно «рассортировать» по амплитуде, фазе, периоду, направлению распространения и т. д. В результате (1.7) окажется возможным представить в виде



Фиг. 1

$$\Delta\varphi = 2m \sum^n \delta_1 \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* + 2\pi n + c_1 \right) +$$

$$+ 2m \sum^n \delta_2 \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* + 2\pi n + c_2 \right) + \dots$$

где  $\delta_i$  — дельта-функции, выделяющие подобные (с определенной вероятностью) возмущения. Если (2.1) понимать в смысле соотношения

$$2\pi \sum^n \delta(\varepsilon - 2\pi n) = \sum^n \exp(in\varepsilon)$$

известного в теории обобщенных функций [10], то оно запишется так:

$$(2.2) \quad \Delta\varphi = A_1 \sum^n \exp \left[ in \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* \right) + \alpha_1 \right] +$$

$$+ A_2 \sum^n \exp \left[ in \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* \right) + \alpha_2 \right] + \dots$$

где  $A_i$  — амплитуды разложений,  $\alpha_i$  — соответствующие сдвиги фаз. потребовав, чтобы компоненты скорости вторичной турбулентности [3] удовлетворяли условиям

$$(2.3) \quad \Delta v_{k\omega}' = 0 \quad (x_3 = 0)$$

$$|\Delta v_{k\omega}'| \leq M \quad (M = \text{const}, x_3 \rightarrow \infty)$$

с учетом работы [1] получим следующий результат:

$$(2.4) \quad \Delta v_{k\omega}' = \text{erf } \xi \sum_{n=1}^n A_{nk} \cos \left[ n \left( \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{\beta_k} - \tau_* \right) + \Delta \alpha_{nk} \right]$$

где  $\text{erf } \xi$  — интеграл вероятности;  $\xi = x_3 / \gamma(\tau)$ ;  $\gamma(\tau)$  — некоторая функция времени.

3. Для получения полных значений компонент пульсационной скорости необходимо учесть эффекты первичной турбулентности, т. е. добавки  $\Delta v_k'$ , связанные с самими выбросами. Поэтому имеем

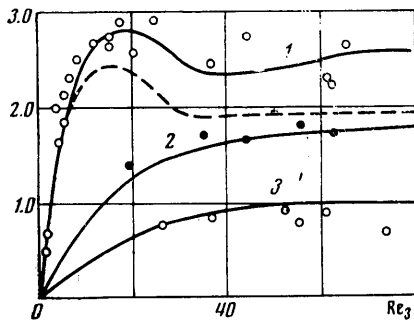
$$(3.1) \quad v_k' = \Delta v_{k\omega}' + \Delta v_k'$$

Турбулентная добавка  $\Delta v_1'$  определяется как разность между выражением «мгновенной» скорости и выражением для усредненной скорости  $\langle v_1 \rangle$  [1]

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Delta v_1' &= v_1 - \langle v_1 \rangle \\ v_1 &= kx_3 [1 - \text{erf } \xi] + \\ &+ [c_1 + c_2 \ln \eta] \text{erf } \xi \\ \langle v_1 \rangle &= kx_3 [1 - \text{erf } \langle \xi \rangle] + \\ &+ [c_1 + c_2 \ln \langle \eta \rangle] \text{erf } \langle \xi \rangle \\ (\langle \eta \rangle &\approx x_3). \end{aligned}$$

Воспользуемся далее уравнением неразрывности

$$(3.3) \quad \frac{\partial (\Delta v_{k\omega}')}{\partial x_k} + \frac{\partial (\Delta v_k')}{\partial x_k} = 0$$



Фиг. 2

Основываясь на анализе опубликованного экспериментального материала работ [5-8] и др., при принятой модели турбулентности в (3.3) можно положить

$$(3.4) \quad \Delta v_2' \sim \frac{\partial \Delta v_2'}{\partial x_2} \sim 0$$

так как возможность выброса в трансверсальном направлении маловероятна. Далее учтем, что для области течения, где  $\text{erf } \xi \approx 1$ , уравнение (3.3) принимает вид  $\partial (\Delta v_{k\omega}') / \partial x_k = 0$ . Последнее как частный случай может соблюдаться в интервале  $0 < x_3 < \infty$ . Для этого случая при допущении (3.4) на основании (3.3) найдем, что

$$(3.5) \quad \Delta v_3' \approx - \frac{\text{const}}{v_0} \int \frac{\partial (\Delta v_1')}{\partial \tau} dx_3$$

где  $v_0$  — характерная скорость. Наконец, при оценке  $A_k$  в (2.4) ограничимся первой гармоникой и положим, что  $\Delta \alpha_2 \sim 0$  и  $\Delta \alpha_1 - \Delta \alpha_3 \sim \pi/3$  [8]. Тогда, если  $\beta_k = \text{idem}$ , в (2.4)  $A_1 \approx 2A_3$  и  $A_2 \approx A_3$ . Сопоставление результатов, получаемых с помощью (3.1)–(3.5) и последних соотношений, с опытными данными [9] показало, что расчетные значения  $\sqrt{(v_2')^2} / v_*$  и  $\sqrt{(v_3')^2} / v_*$  согласуются с опытами (фиг. 2, кривые 2 и 3 соответственно). Что касается значений  $\sqrt{(v_1')^2} / v_* = f(\text{Re}_3)$ , ( $\text{Re}_3 = v_* x_3 / \nu$ ), то оказалось, что расчетные значения (штриховая линия) ложатся ниже опытной кривой 1. Совпадение результатов расчета и опытных данных достигается при  $A_1 = 2.6A_3$ , что можно объяснить, по-видимому, ограниченным количеством учтенных

в (2.4) гармоник. Анализ опубликованных опытных данных [6, 8] показывает, что в общем случае  $A_1 \approx 2A_3$ .

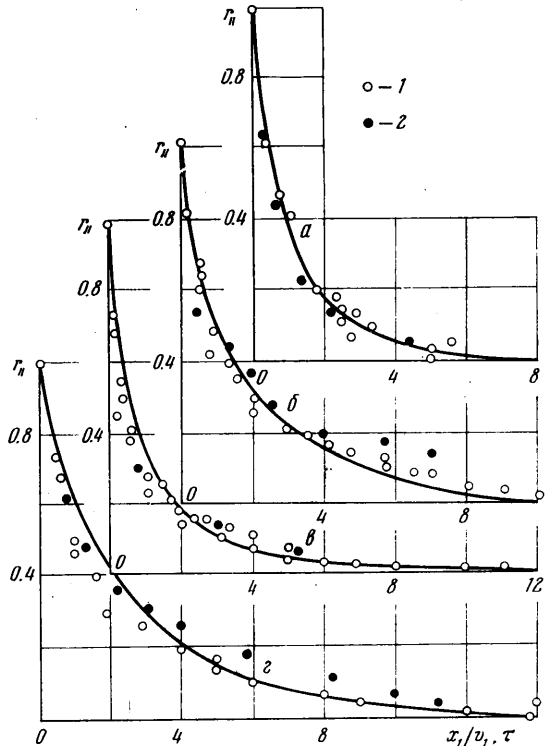
4. Ступенчатая модель турбулентности дает возможность достаточно просто интерпретировать смысл пространственно-временных корреляционных функций. Чтобы учесть эффекты первичной и вторичной турбулентности, рассмотрена двухступенчатая модель распространения возмущений (фиг. 1, б), в соответствии с которой  $\delta_A$  — амплитуда волнового возмущения за время его существования, а  $\delta_B$  — изменение скорости выброса за тот же период, так что волна существует более длительное время, чем выброс. Используя понятие обобщенных функций, для определения значения нормированной корреляционной функции  $r_{ii}(\Delta\tau) = \langle v_i'(\tau)v_i'(\tau+\Delta\tau) \rangle / \langle v_i'(\tau)^2 \rangle$  нетрудно получить формулу

$$(4.1) \quad r_{ii}(\Delta\tau) = \chi \left[ 1 - \frac{\Delta\tau}{\beta^\circ \tau_*^\circ} \right]^2 + (1-\chi) \left[ 1 - \frac{\Delta\tau}{\tau_*^\circ} \right]^2$$

где  $\beta^\circ$  — относительная (к периоду  $\tau_*^\circ$ ) продолжительность выброса;  $\chi$  — отношение амплитуды выброса к суммарной амплитуде возмущения.

Сравнение результатов по (4.1) для  $v_i'$  при  $\chi=0.7$  и  $\beta^\circ=0.1$  с опытными данными [8] показано на фиг. 3: а —  $x_3/\delta=0.77$  и  $Re_0=v_0\delta/\nu=27900$  (здесь  $\delta$  — толщина пограничного слоя); б —  $x_3/\delta=0.03$ ,  $Re_0=27900$ ; в —  $x_3/\delta=0.24$ ,  $Re_0=1400$ ; г —  $x_3/\delta=0.15$ ,  $Re_0=27900$ . На фиг. 3 обозначения 1 соответствуют опытным значениям автокорреляции  $r_{ii}(\Delta\tau)$ , а 2 — пространственной корреляции  $r_{ii}(x_i/v_i)$ . При построении кривых значение  $\chi$  подобрано, а  $\beta^\circ$  принято по значениям чисел Рейнольдса в соответствии с [7].

Обращаясь к фиг. 1, б, нетрудно заметить, что  $\beta^\circ \tau_*^\circ$  и  $\tau_*^\circ$  пропорциональны полным площадям соответствующих ступенек, причем в соответствии с физическим смыслом  $\omega_1=2\pi/\tau_*^\circ$  и  $\omega_2=2\pi/\beta^\circ \tau_*^\circ$ . Поэтому второй член в каждой квадратной скобке (4.1) с геометрической точки зрения представляет собой относительный «прирост» площади соответствующей ступеньки; на фиг. 1, б эти площади для произвольного интервала  $\Delta\tau$  показаны штриховкой. Построенная функция  $r_{ii}(\Delta\tau)$  учитывает, таким образом, «коррелятивность» каждого возмущения в отдельности. Имеется много оснований полагать, что в реальных условиях амплитуды возмущений  $\delta_A$  и  $\delta_B$  не остаются постоянными за время их существования. Допустим, что изменения как  $\delta_A$ , так и  $\delta_B$  могут быть аппроксимированы произ-



Фиг. 3

вольной комбинацией из двух ступенек, аналогичной приведенной на фиг. 1, б. Тогда каждая квадратная скобка в (4.1) будет иметь вид

$$(4.2) \quad r_{ii}(\Delta\tau) \sim \left[ 1 - \frac{\omega_i(\tau)}{2\pi} \frac{1 + \chi_i(\tau)}{1 + (\chi_i(\tau)\omega_i)/2\pi} \right] \quad (i=1, 2)$$

где знаменатель, если  $\chi_i(\tau)$  понимать в смысле обобщенной функции, будет пропорционален полной площади ступенчатого графика изменения  $\delta_A$  или  $\delta_B$  соответственно. С учетом (4.2) функция для  $r_{ii}(\Delta\tau)$  будет учитывать, таким образом, еще «совместность» крупномасштабных и мелкомасштабных возмущений, но останется полностью эквивалентной функции (4.1).

Используя косинус-преобразование Фурье, на основании (4.1) и (4.2) для спектральных функций получаем формулу

$$(4.3) \quad e(\omega) = \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_{ii}(\Delta\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \sim \begin{cases} \omega^{-1} \\ \omega^{-1} \left( 1 + \chi \frac{\omega}{\pi} \right)^{-2} \end{cases}$$

В соответствии с оценкой (4.3) оказалось, что нормированный энергетический спектр при низких частотах пропорционален  $\omega^{-1}$ , при больших же частотах — пропорционален  $\sim \omega^{-3}$ . Основываясь на [4], нетрудно показать, что пространственные и временные масштабы изменяются одинаково (пропорционально  $\operatorname{Re}_0$ ; см. также фиг. 3). Поэтому оценка (4.3) правомерна также и для спектров, составленных по волновым числам  $k$ . Этот результат согласуется с экспериментами не только для пульсационной скорости, но и для моментов корреляции Рейнольдса. На фиг. 4 показаны опытные данные из [6] для течения при  $\operatorname{Re}_0 = v_0\delta/\nu \approx 7.5 \cdot 10^4$  и  $v_*/v_0 \approx 0.037$  и кривые, построенные по (4.3). Опытные точки соответствуют:  $1 - x_3/\delta = -0.0011$ ,  $2 - x_3/\delta = 0.05$ ,  $3 - x_3/\delta = 0.80$ . Оказалось, что в силу идентичности процессов переноса субстанций (4.3) правомерно также для одномерных спектров скаляров  $e_0(k)$  (см. точки 4 на фиг. 5 [12]).

5. При рассмотрении записей пульсаций давления жидкости на стенке обычно выявляется, что изменения  $p'$  не являются ни периодическими, ни переходными. Поэтому при анализе сигналов  $p'$  нельзя использовать их классического разложения в ряд Фурье или представление в виде интеграла Фурье. Обычно процесс изменения пульсаций давления  $p'$  является стационарным, т. е. любое временное смещение оставляет его статистические характеристики неизменными, особенно в пристеночной области [3], где крупномасштабная турбулентность, связанная с выбросами, упорядочена. Для анализа таких случайных сигналов применяются методы теории вероятностей, после чего с помощью обобщенного гармонического анализа статистическое описание случайного сигнала связывается с его спектром. Поэтому изменения давления, так же как и волновые возмущения скорости жидкости, с достаточной точностью могут быть представлены ступенчатым графиком.

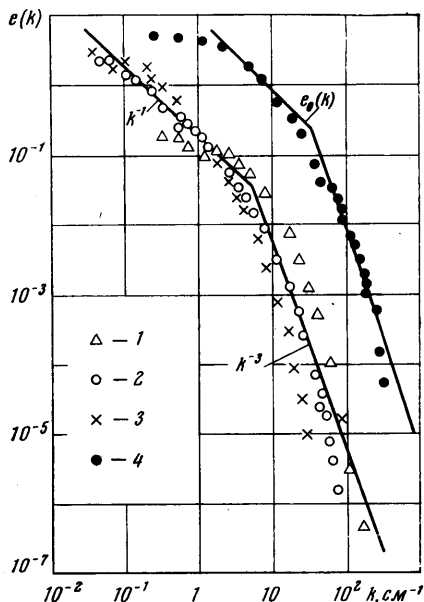
В таком случае график спектральной плотности мощности пульсаций давления на стенке также должен удовлетворять условиям (4.3). Оказалось, что выражения (4.3) действительно хорошо согласуются с единой кривой спектральной плотности как для малых (первичных), так и для больших (вторичных) частот, определяя один универсальный спектр. Это иллюстрируется фиг. 5, заимствованной из [3], на которой данные для трубы с произвольным диаметром представлены в виде

$$(5.1) \quad f_p = \frac{e_{pp}(\omega)}{e_{pp}(\omega_c)} = f\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

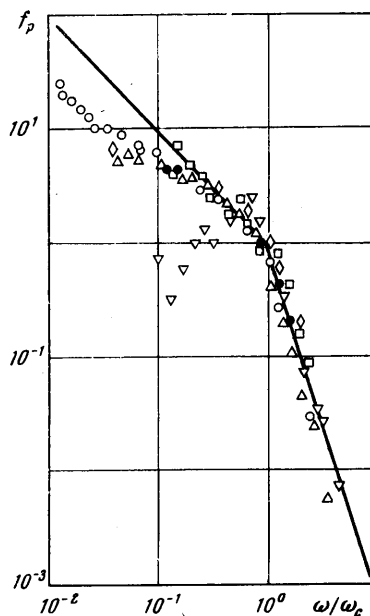
$$e_{pp}(\omega_c) = 5.45\rho^2 v_0 D \left( \frac{v_*}{v_0} \right)^{-40/7}, \quad \omega_c = 0.257 \frac{v_0}{D} \left( \frac{v_*}{v_0} \right)^{-12/7}$$

Здесь выражения для  $e_{pp}(\omega_c)$  и  $\omega_c$  являются эмпирическими формулами.

В заключение отметим, что с помощью (2.4) хорошо описываются также трехмерные волны на поверхности турбулентных жидких пленок. При



Фиг. 4



Фиг. 5

этом, однако, меняются граничные условия на свободной поверхности, сформулированные в [11].

Авторы благодарят В. А. Иоселевича за полезные советы.

Поступила 21 XII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борщевский Ю. Т., Литвиненко Э. М., Нахайчук В. Г. О кинематике турбулентного пограничного слоя. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 5.
2. Миллионщиков М. Д. Основные закономерности турбулентного течения в пристеночных слоях. Атомная энергия, 1970, т. 28, вып. 4.
3. Блэк Т. Дж. Некоторые практические приложения новой теории турбулентности пристеночного слоя. В сб. «Достижения в области теплообмена». М., «Мир», 1970.
4. Молло-Кристиансен. Физика турбулентных течений. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 7.
5. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968.
6. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
7. Корино Е. Р., Бродки Р. С. Визуальное исследование пристеночной области в турбулентном течении, Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1971, № 1.
8. Ротга И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судо-строение», 1967.
9. Миллионщиков М. Д., Турбулентные течения в пристеночном слое и в трубах. Атомная энергия, 1970, т. 28, вып. 3.
10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.