

ОБТЕКАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н. Ф. ВОРОБЬЕВ, В. П. ФЕДОСОВ

(Новосибирск)

Задача обтекания сверхзвуковым потоком слабоизогнутых пересекающихся поверхностей, касательные плоскости которых в каждой точке составляют малые углы со скоростью набегающего потока, рассматривается в линейной постановке. Условия на поверхностях сносятся на плоскости, параллельные набегающему потоку и образующие в пересечении двугранные углы $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ [1]. Задача сводится к нахождению решения волнового уравнения для потенциала скорости при граничных условиях, задаваемых на обтекаемых поверхностях и на головной характеристической поверхности. Для решения задачи применяется метод Вольтерра [2].

Метод Вольтерра был применен к задаче обтекания сверхзвуковым потоком неплоского крыла [3] и обтекания пересекающихся неплоских крыльев, образующих двугранный угол $\gamma = \pi/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), с учетом концевой эффектности на крыльях, составляющих двугранный угол [4]. В работе [5] рассмотрен концевой эффект для неплоских крыльев в случае двугранного угла $\gamma = \pi/n$. При произвольном угле $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ задача нахождения потенциала скорости в общем случае сводится к решению интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра, ядра которых имеют особенности [1]. В работе [6] показано, что интегродифференциальные уравнения могут быть решены методом последовательных приближений, причем найдены приближенные решения, мало отличающиеся от точного решения во всей области взаимодействия поверхностей и совпадающие с точным решением на характерных линиях (границе области взаимодействия, ребре двугранного угла).

Решение задачи обтекания пересекающихся плоских крыльев (конический случай) в случае произвольного угла γ получено в элементарных функциях в работе [7], где также рассмотрено влияние граничных условий, задаваемых на участке дифракции головной волны. В работах [8, 9] рассматривалась нестационарная задача дифракции волн на плоском угле $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$.

В настоящей работе на основе найденного в работе [8] решения волнового уравнения получено решение, позволяющее найти в квадратурах решение задачи обтекания сверхзвуковым потоком неплоских крыльев, образующих произвольный угол $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$.

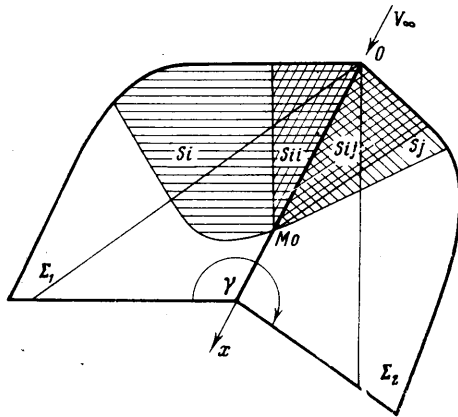
Решения задачи обтекания неплоских пересекающихся поверхностей в случаях $0 \leq \gamma \leq \pi$ [6] и $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$, полученное в настоящей работе, позволяют рассчитывать газодинамические параметры около крыла с призматическими надстройками (фюзеляж, воздухозаборники). В работе приводится схема построения решения в различных зонах взаимодействия крыла с воздухозаборником.

1. Обтекания пересекающихся крыльев при наличии дифракционных явлений ($\pi \leq \gamma \leq 2\pi$). Обтекание сверхзвуковым потоком слабоизогнутых пересекающихся крыльев рассматривается в линейной постановке. Условия на поверхности крыльев сносятся на плоскости, параллельные набегающему потоку. Пересечением этих плоскостей образуется двугранный угол. В качестве системы координат выбирается цилиндрическая система (x, r, θ). Ось x совпадает по направлению со скоростью набегающего потока. Плоскость Σ_1 , на которую снесены граничные условия одного из крыльев, совпадает с плоскостью $\theta = 0$. Плоскость Σ_2 , на которую снесены граничные условия второго крыла, совпадает с плоскостью $\theta = \gamma$. Ребро двугранного угла при этом совпадает с осью x ($r = 0$) (фиг. 1). Область взаимодействия граней лежит внутри характеристического конуса с вершиной в точке пересечения передних кромок граней Σ_1, Σ_2 .

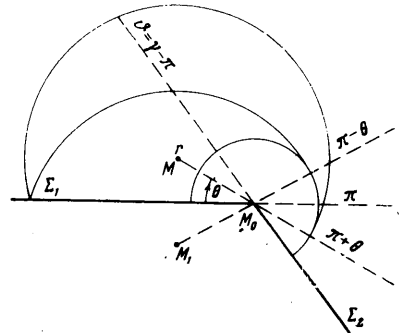
Потенциал скоростей возмущений удовлетворяет волновому уравнению, которое преобразованием координат может быть приведено к виду, не зависящему от числа M [1]

$$(1.1) \quad F(\varphi) = \varphi_{xx} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} - \frac{1}{r} \varphi_r = 0$$

Характеристические конусы этого уравнения имеют прямой угол при вершине, а направление конормалей на них совпадает с направлением касательных к характеристическим конусам. Решение уравнения (1.1) в форме Вольтерра дает выражение потенциала скорости через значения потенциала и его конормальных производных на поверхностях, несущих



Фиг. 1



Фиг. 2

граничные условия. Для получения формулы Вольтерра в преобразованиях, проводимых в процессе решения задачи, используется формула Остроградского — Гаусса, связывающая значения объемного и поверхностного интегралов [2]

$$(1.2) \quad \iiint_v L(\varphi, v) dV = \iint_s \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds$$

где $L(\varphi, v) = \bar{v}F(\varphi) - \varphi F(\bar{v})$, $\partial/\partial N$ — конормальная производная.

В случае двугранного угла $\pi \leq \gamma \leq 2\pi^-$, когда имеют место дифракционные явления, формула Вольтерра для решения волнового уравнения непосредственно неприменима, так как условия пересечения поверхности, несущей граничные условия, характеристическими лучами не более одного раза не выполняются [4, 10]. Область зависимости на гранях Σ_1, Σ_2 в случае $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$ точки $M(x, r, \theta)$, лежащей над крылом Σ_i ($0 \leq \theta_{z_1} \leq \gamma - \pi$, $\pi \leq \theta_{z_2} \leq \gamma$), отличается от области, вырезаемой характеристическим конусом Γ с вершиной в точке $M(x, r, \theta)$ на гранях $\Sigma_i, \Sigma_j (S_i, S_j)$. Область зависимости точки $M(x, r, \theta)$, лежащей над крылом Σ_i , на грани Σ_i определяется линией пересечения характеристического конуса Γ с вершиной в точке M , а на грани $\Sigma_j (j \neq i)$ область зависимости S_{ij} ограничена линией пересечения характеристического конуса $\Gamma_0(x - \xi = r + \rho)$ с вершиной в точке M_0 , которая является точкой пересечения ребра двугранного угла с поверхностью характеристического конуса Γ (фиг. 1). Характеристический конус Γ_0 определяет

ту часть области зависимости точки M , в которой происходит формирование взаимодействия обеих граней на точку M .

Значение потенциала возмущений φ в произвольной точке $M(x, r, \theta)$, лежащей над крылом Σ_i ($i=1, 2$) ($0 \leq \theta_{x_i} \leq \gamma - \pi$, $\pi \leq \theta_{x_2} \leq \gamma$), может быть представлено по формуле Вольтерра [1] через значения потенциала скорости φ и нормальной производной $\partial\varphi/\partial n$ на части крыла Σ_i и на части плоскости T ($\vartheta_{T\Sigma_1} = \theta_{x_1} + \pi$, $\vartheta_{T\Sigma_2} = \theta_{x_2} - \pi$), лежащих внутри характеристического конуса Γ с вершиной в точке M . (На плоскостях $\vartheta = \text{const}$ значения конормальной производной $\partial/\partial N$ и нормальной производной $\partial/\partial n$ совпадают.) Плоскость T проходит через точку M и ребро двугранного угла и представляет собой границу видимости и тени точки M (фиг. 2).

Функция Вольтерра точки $M(x, r, \theta)$ в цилиндрической системе координат имеет вид

$$(1.3) \quad v = \ln \frac{(x - \xi) - \sqrt{(x - \xi)^2 - [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \theta)]}}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \theta)}}$$

а ее нормальная производная на плоскостях, проходящих через ребро двугранного угла ($\vartheta = \text{const}$), равна

$$(1.4) \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\vartheta = \text{const}} = \frac{(x - \xi)r\rho \sin(\vartheta - \theta)}{[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \theta)] \sqrt{(x - \xi)^2 - [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \theta)]}}$$

На плоскости T , где $\vartheta_T = [\theta_{x_i} - (-1)^i \pi]$, $i=1, 2$, значение $\partial u/\partial n|_{\vartheta_T} = 0$, в силу чего формула Вольтерра для точки M , лежащей над крылом Σ_i , записывается в виде

$$(1.5) \quad \varphi(M) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (I_{S_i}^{\varphi, v} + K_{\tau(-1)^i}^{\varphi, v})$$

$$I_{S_i}^{\varphi, v} = \iint_S \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS, \quad K_S^{\varphi, v} = \iint_S v \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

где S_i, τ — площади на плоскостях Σ_i, T , вырезаемые конусом Γ ; знак $(-1)^i$ величины τ означает, что нормаль на плоскости T в случае $(-)$ направлена в сторону убывания угла ϑ , а в случае $(+)$ — в сторону возрастания угла ϑ .

В формуле (1.5) член, в который входит незадаваемое на поверхности крыла значение φ , может быть исключен, если использовать формулу (1.2) для оператора $L(\varphi, v_i)$ и объема V_i . В операторе $L(\varphi, v_i)$ v_i — функция Вольтерра точки M_i , симметричной точке M относительно плоскости Σ_i . Объем V_i , не содержащий точку M , ограничен головной характеристической поверхностью, где значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ равны нулю (на крылья набегает равномерный поток), характеристическим конусом Γ_i с вершиной в точке M_i и плоскостью T_i ($\vartheta_{T_i} = \pi - \theta_{x_i}$, $\vartheta_{T_2} = 2\gamma - \pi - \theta_{x_2}$), которая проходит через точку M_i и ребро двугранного угла (фиг. 2). Формула (1.2) для оператора $L(\varphi, v_i)$ и объема V_i дает зависимость

$$(1.6) \quad I_{S_i + \tau_i(-1)^i}^{\varphi, v_i} = 0$$

где S_i , τ_i — площади на плоскостях Σ_i , T_i , вырезаемые характеристическим конусом Γ_i , причем площади S_i , вырезаемые конусами Γ и Γ_i , совпадают. На плоскости T_i значение $[\partial v_i / \partial n]_{\tau_i} = 0$, а значение функций Вольтерра точек M и M_i связаны соотношениями [1]

$$v_i|_{\Sigma_i} = v|_{\Sigma_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = - \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i}$$

Используя эти свойства функций v и v_i и соотношение (1.6), формулу (1.5) для потенциала скорости в точке M , лежащей над крылом Σ_i , можно представить в виде

$$(1.7) \quad \varphi(M) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{S_i}^{v,v} + \frac{1}{2} (K_{\tau_i(-1)^i}^{v,v} + K_{\tau_i(-1)^i}^{v,v_i}) \right]$$

причем согласно формуле (1.3) имеет место соотношение

$$(1.8) \quad v|_{\tau} = v_i|_{\tau_i} = \ln \frac{(x - \xi) - \sqrt{(x - \xi)^2 - (r + \rho)^2}}{r + \rho} = f$$

В работе [2] при рассмотрении нестационарной задачи дифракции волн на плоском угле $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$ найдено решение волнового уравнения в дифракционной зоне, которое в цилиндрической системе координат (t, r, θ) имеет вид

$$(1.9) \quad G(t, r, \rho, \theta, \vartheta, \kappa) = \int_0^D \frac{Q(\theta, \vartheta, \psi, \kappa) d\psi}{\sqrt{t^2 - (r^2 + \rho^2 + 2r\rho \operatorname{ch} \psi)}}$$

$$Q(\theta, \vartheta, \psi, \kappa) = - \sum_{m,n=1,2} \frac{\sin \kappa \{ \pi + (-1)^n [\vartheta + (-1)^m \theta] \}}{\operatorname{ch} \kappa \psi - \cos \kappa \{ \pi + (-1)^n [\vartheta + (-1)^m \theta] \}}$$

$$D = ar \operatorname{ch} \frac{t^2 - r^2 - \rho^2}{2r\rho}, \quad \kappa = \frac{\pi}{\gamma}$$

Решение (1.9) удовлетворяет на сторонах угла условию $[\partial G / \partial n]_{\Sigma_i} = 0$ и дает возможность получить решение дифракции волн на плоском угле в явном виде. Функция v_0 также является решением волнового уравнения (1.1)

$$(1.10) \quad v_0(x, \xi, r, \rho, \theta, \vartheta, \kappa) =$$

$$= \int_0^Z Q(\theta, \vartheta, \psi, \kappa) \ln \frac{(x - \xi) - \sqrt{(x - \xi)^2 - (r^2 + \rho^2 + 2r\rho \operatorname{ch} \psi)}}{\sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho \operatorname{ch} \psi}} d\psi$$

$$Z = ar \operatorname{ch} \frac{(x - \xi)^2 - r^2 - \rho^2}{2r\rho}$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Решение (1.10) связано с решением (1.9) соотношением $\partial v_0(t, r, \rho, \theta, \vartheta, \kappa) / \partial t = G(t, r, \rho, \theta, \vartheta, \kappa)$, где $x - \xi = t$.

Функция v_0 определена для значений (ξ, ρ, ϑ) , расположенных внутри характеристического конуса Γ_0 . Функция v_0 обладает рядом свойств, позволяющих выразить в формуле (1.7) члены, содержащие на плоскостях T , T_i в области взаимодействия граней неизвестные значения производных $[\partial \varphi / \partial n]_{\tau, \tau_i}$, через известные на поверхности крыльев значения

$[\partial\varphi/\partial n]_{\Sigma_i}$. Функция v_0 внутри конуса Γ_0 имеет особенности и непосредственно применить формулу (1.2) для оператора $L(\varphi, v_0)$ в объеме V_0 , ограниченном поверхностью характеристического конуса Γ_0 , плоскостями граней Σ_i и поверхностью головного характеристического конуса, нельзя. На плоскостях T, T_i функция v_0 терпит разрыв, причем

$$(1.11) \quad v_0|_{\tau^\pm} = \Phi \pm \frac{\pi}{\kappa} f, \quad v_0|_{\tau_i^\pm} = \Phi_i \pm \frac{\pi}{\kappa} f$$

где Φ, Φ_i — непрерывные функции на плоскостях T, T_i , а значение функции f определено формулой (1.8). Нормальная производная функции v_0 при переходе через плоскости T, T_i меняется непрерывно, причем имеют место соотношения

$$(1.12) \quad \frac{\partial v_0}{\partial n} \Big|_{\tau^-} = -\frac{\partial v_0}{\partial n} \Big|_{\tau^+}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial n} \Big|_{\tau_i^-} = -\frac{\partial v_0}{\partial n} \Big|_{\tau_i^+}$$

На оси характеристического конуса $\Gamma_0 (\rho=0)$, совпадающей с ребром двугранного угла, сама функция v_0 не имеет особенности, а ее производная $\partial v_0/\partial \rho$ имеет особенность вида $\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \rho$. Если внутри конуса Γ_0 вырезать ось характеристического конуса Γ_0 цилиндром радиуса δ , а плоскости T и T_i вырезать соответственно плоскостями $(\vartheta_T - \varepsilon), (\vartheta_T + \varepsilon)$ и $(\vartheta_{T_i} - \varepsilon), (\vartheta_{T_i} + \varepsilon)$, то в каждом из трех объемов, на которые распался объем V_0 , можно применять формулу (1.2). В силу того, что значение v_0 при $\rho \rightarrow 0$ конечно, а конормальная производная $\partial v_0/\partial N$, равная на поверхности цилиндра нормальной производной $\partial v_0/\partial \rho$, имеет особенность типа $\lim_{\delta \rightarrow 0} \ln \delta$,

и что поверхность элемента цилиндра равна $\delta d\theta dx$, поверхностный интеграл в формуле (1.2) по поверхности цилиндра в каждом из трех объемов обращается в нуль при $\delta \rightarrow 0$. Учитывая, что на поверхности граней Σ_i конормальная производная функции v_0 , равная $\partial v_0/\partial \theta$, обращается в нуль ($[\partial v_0/\partial N]_{\Sigma_i} = 0$), а на поверхности конуса Γ_0 обращается в нуль сама функция и ее конормальная производная ($v_0|_{\Gamma_0} = [\partial v_0/\partial N]_{\Gamma_0} = 0$) и что на поверхности головного характеристического конуса имеют место равенства $\varphi = \partial\varphi/\partial N = 0$, применение формулы (1.2) к оператору $L(\varphi, v_0)$ в каждом из трех объемов дает следующие соотношения:

$$(1.13) \quad K_{S_{11}}^{\varphi, v_0} + I_{\tau_i^+}^{\varphi, v_0} = 0, \quad I_{\tau_i^+}^{\varphi, v_0} + I_{\tau^-}^{\varphi, v_0} = 0, \quad I_{\tau^+}^{\varphi, v_0} + K_{S_{12}}^{\varphi, v_0} = 0$$

где S_{11}, S_{12} — площади, вырезаемые характеристическим конусом Γ_0 на гранях Σ_1, Σ_2 , а τ, τ_i — площади, вырезаемые конусом Γ_0 на плоскостях T, T_i соответственно. При этом площадь τ совпадает с площадью τ , вырезаемой конусом Γ на плоскости T ((1.5)–(1.7)), а площадь τ_i совпадает с площадью τ_i , вырезаемой конусом Γ_i на плоскости T_i .

Если учесть, что на плоскостях T, T_i имеют место равенства

$$(1.14) \quad \varphi|_{\tau^-} = \varphi|_{\tau^+}, \quad \varphi|_{\tau_i^-} = \varphi|_{\tau_i^+}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tau^-} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tau^+},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tau_i^-} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tau_i^+}$$

и равенства (1.8), (1.11), (1.12), то равенства (1.13) могут быть объединены в одно

$$(1.15) \quad K_{S_{11}+S_{12}}^{\varphi, v_0} - \frac{2\pi}{\kappa} (K_{\tau^-}^{\varphi, f} + K_{\tau_i^+}^{\varphi, f}) = 0$$

Если умножить производную по переменной x от левой части выражения (1.15) на $\kappa/4\pi^2$ и сложить с правой частью формулы (1.7), учитывая при этом соотношение (1.8), то из выражения для потенциала скорости будут исключены члены, содержащие неизвестные на плоскостях T , T_i значения производных $\partial\varphi/\partial n$. Окончательно после проведения операции дифференцирования интегралов по переменной x формула для значения потенциала скорости в точке M , лежащей над крылом Σ_i ($0 \leq \theta_{\Sigma_i} \leq \gamma - \pi$, $\pi \leq \theta_{\Sigma_2} \leq \gamma$), записывается через известные на поверхности крыльев значения производных $\partial\varphi/\partial n$

$$(1.16) \quad \varphi(M) = \frac{1}{\pi} \left(R_{S_i}^{\varphi, v} + \frac{\kappa}{4\pi} R_{S_{ii} + S_{ij}}^{\varphi, v_0} \right), \quad R_s^{\varphi, v} = \iint_s \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\Sigma_i} = - \{ (x - \xi)^2 - [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta_i - \theta)] \}^{-1/2}$$

$$\left. \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{\Sigma_i} = - \int_0^{\text{arch } z} Q(\varphi, \vartheta_i, \psi, \kappa) \{ (x - \xi)^2 - (r^2 + \rho^2 + 2r\rho \text{ch } \psi) \}^{-1/2} d\psi$$

Значение потенциала скорости в точке M , лежащей в области $\pi - \gamma \leq \theta \leq \pi$, когда для точки M нет области тени, может быть записано непосредственно по формуле Вольтерра

$$(1.17) \quad \varphi(M) = \frac{1}{2\pi} P_{S_{i1} + S_{i2}}^{\varphi, v}, \quad P_s^{\varphi, v} = \iint_s \left[\frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \right] dS$$

причем незадаваемые на поверхности крыльев значения φ , стоящие под знаком интеграла в правой части формулы (1.17), определяются по формуле (1.16) в явном виде через известные на поверхностях Σ_1 , Σ_2 значения нормальных производных.

При стремлении точки $M(x, r, \theta)$ к ребру двугранного угла ($r \rightarrow 0$) функции $\partial v/\partial x$ и $\partial v_0/\partial x$ принимают следующие значения:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\substack{r=0 \\ \Sigma_i(\vartheta=\vartheta_i)}} = - [(x - \xi)^2 - \rho^2]^{-1/2}, \quad \left. \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{\substack{r=0 \\ \Sigma_i(\vartheta=0)}} = \frac{4\pi(1 - \kappa)}{\kappa} [(x - \xi)^2 - \rho^2]^{-1/2}$$

$$\left. \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{\substack{r=0 \\ \Sigma_2(\vartheta=\gamma)}} = -4\pi [(x - \xi)^2 - \rho_2]^{-1/2}$$

и формула (1.16) дает выражение для потенциала скорости на ребре двугранного угла [11]

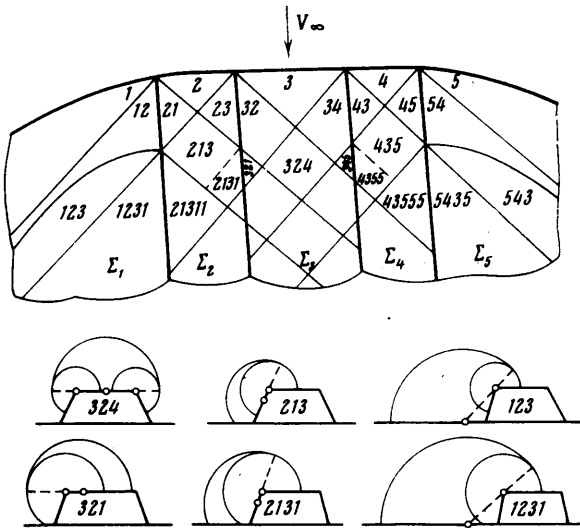
$$\varphi(r=0) = - \frac{1}{\pi} R_{S_{i1} + S_{i2}}^{\varphi, v}$$

В случае $\gamma = 2\pi$ ($\kappa = 1/2$), когда $[\partial\varphi/\partial n]_{\Sigma_1} = [-\partial\varphi/\partial n]_{\Sigma_2}$, из формулы (1.16) получается известный результат о концевом эффекте тонкого крыла конечного размаха [12]

$$\varphi(M) = \frac{1}{\pi} R_{S_{i1} - S_{i2}}^{\varphi, v}$$

В случае $\gamma = \pi$ ($\kappa = 1$) значение потенциала в точке M , лежащей над изолированным крылом без влияния концевого эффекта, может быть получено из формулы (1.17) исключением члена, который содержит значение потенциала φ , как это сделано в работе [3].

2. Обтекание комбинации крыло — призматическая надстройка. В летательном аппарате содержатся элементы, представляющие собой пересекающиеся поверхности, близкие к призматическим: крыло — фюзеляж, крыло — воздухозаборники. Характерные особенности, встречающиеся при расчете обтекания сверхзвуковым потоком таких элементов, могут быть рассмотрены на примере призматического воздухозаборника, установленного на крыле. Наружная конфигурация воздухозаборника и крыла представляет собой комбинацию двугранных углов $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$ и $\pi/2 \leq \gamma \leq \pi$ и расчет ее обтекания может быть произведен на основе решений, по-



Фиг. 3

лученных в данной работе и работе [6]. При этом без нарушения общности построения расчетной схемы рассматривается случай обтекания равномерным набегающим потоком крыла и воздухозаборника со сверхзвуковыми передними кромками, когда не учитываются концевые эффекты крыла и когда внешнее и внутреннее течения воздухозаборника разделяются. В случае, когда комбинация крыло — воздухозаборник находится в возмущенном потоке, при выводе формулы Вольтерра и применения формулы (1.2) к оператору $L(\varphi, v)$ следует учитывать на поверхности головного характеристического конуса значения потенциала φ и его конормальной производной $\partial\varphi/\partial N$, определяемые набегающим потоком, в общем отличные от нуля.

На фиг. 3 приведена развертка призматических поверхностей, представляющих собой комбинацию крыла (Σ_1, Σ_5) и граней воздухозаборника ($\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$), причем двугранные углы, образуемые гранями, принимают значения $\pi/2 \leq \gamma_{\Sigma_1\Sigma_2}, \gamma_{\Sigma_4\Sigma_5} \leq \pi$; $\pi \leq \gamma_{\Sigma_2\Sigma_3}, \gamma_{\Sigma_3\Sigma_4} \leq 2\pi$. На фигуре проведены сплошные линии, являющиеся границами областей влияния вершин призматической комбинации. В зонах 1, 2, 3, 4, 5 значение потенциала скорости находится по формуле потенциала скорости для изолированного крыла. В зонах 23, 32, 34, 43 значение потенциала находится по формуле для двугранного угла $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$, а в зонах 12, 21, 45, 54 — по формулам для по-

тенциала скорости для двугранного угла $\pi/2 \leq \gamma \leq \pi$ [°]. Дальнейшее разбиение на зоны связано с явлениями отражения и дифракции возмущений, вышедших из вершин призматической комбинации, это разбиение на фиг. 3 сделано штриховыми линиями.

Для точек M зоны 324 происходит дифракция возмущений на двух выпуклых углах $\Sigma_3\Sigma_2$ и $\Sigma_3\Sigma_4$, причем формулы для потенциала скорости п. 1 в этом случае могут быть применены непосредственно

$$\varphi(M) = \frac{1}{\pi} \left(R_{S_3}^{\varphi, v} + \frac{\kappa_{32}}{4\pi} R_{S_{323} + S_{324}}^{\varphi, v_0} + \frac{\kappa_{34}}{4\pi} R_{S_{343} + S_{344}}^{\varphi, v_0} \right)$$

где κ_{ij} — величина двугранного угла Σ_{ij} ; S_h — площадь, вырезаемая на грани Σ_h характеристическим конусом Γ с вершиной в точке M , лежащей на грани Σ_h ; $S_{ij} + S_{ij}$ — площади, вырезаемые на гранях Σ_i, Σ_j (третий индекс) характеристическим конусом Γ_{0ij} с вершиной в точке M_{0ij} , лежащей на ребре двугранного угла $\Sigma_i\Sigma_j$ (первые два индекса) и являющейся точкой пересечения этого ребра с поверхностью характеристического конуса Γ .

Для точек зоны 213 происходит дифракция возмущений на выпуклом угле $\Sigma_2\Sigma_3$ и отражение на угле $\Sigma_2\Sigma_1$. Потенциал скорости в этом случае может быть представлен в виде

$$(2.1) \quad \varphi(M) = \frac{1}{\pi} \left(R_{S_2}^{\varphi, v} + P_{S_{21}}^{\varphi, v} + \frac{\kappa_{23}}{4\pi} R_{S_{232} + S_{233}}^{\varphi, v_0} \right)$$

где S_{kj} — площадь, вырезаемая на грани Σ_j характеристическим конусом Γ с вершиной в точке M , лежащей на грани Σ_k . Площадь S_{21} для точки M , лежащей в зоне 213, проходит на грани Σ_1 через зоны 12, 1, где выражение потенциала φ через задаваемые на гранях нормальные производные уже известно и может быть подставлено в формулу (2.1).

Для точек M зоны 123 происходит отражение возмущений на угле $\Sigma_1\Sigma_2$ и дифракция на угле $\Sigma_2\Sigma_3$. Потенциал скорости в этом случае представляется в виде

$$\varphi(M) = \frac{1}{\pi} \left(R_{S_1}^{\varphi, v} + P_{S_{12}}^{\varphi, v} + \frac{\kappa_{23}}{4\pi} R_{S_{232} + S_{233}}^{\varphi, v_0} \right)$$

Площадь S_{12} для точек, лежащих в зоне 123, проходит на грани Σ_2 через зоны 213, 21, 23, 2, где выражение для потенциала φ уже известно.

Для точек M зоны 321 дифракционный конус Γ_{032} с вершиной в точке M_{032} пересекает в отличие от зоны 32 грань Σ_1 , где значение $[\partial v_0 / \partial n]_{\Sigma_1} \neq 0$ для точки M , лежащей на грани Σ_3 . Потенциал скорости в этом случае может быть записан в виде

$$\varphi(M) = \frac{1}{\pi} \left[R_{S_3}^{\varphi, v} + \frac{\kappa_{32}}{4\pi} (R_{S_{323} + S_{322}}^{\varphi, v_0} + P_{S_{321}}^{\varphi, v_0}) \right]$$

где S_{321} — площадь, вырезаемая характеристическим конусом Γ_{032} на грани Σ_1 . Для точек, лежащих в зоне 321, площадь S_{321} проходит через зоны 12, 1, где выражение потенциала φ уже известно.

Для точек M зоны 2131 дифракционный конус Γ_{032} с вершиной в точке M_{032} пересекает в отличие от зоны 213 грань Σ_1 , где значение $[\partial v / \partial N]_{\Sigma_1} \neq 0$ для точки M , лежащей на грани Σ_2 . Потенциал скорости в этом случае имеет вид

$$(2.2) \quad \varphi(M) = \frac{1}{\pi} \left[R_{S_2}^{\varphi, v} + P_{S_{21}}^{\varphi, v} + \frac{\kappa_{23}}{4\pi} (R_{S_{232} + S_{233}}^{\varphi, v_0} + P_{S_{231}}^{\varphi, v_0}) \right]$$

где S_{231} — площадь, вырезаемая характеристическим конусом Γ_{032} на грани Σ_1 . Для точек, лежащих в зоне 2131, площади S_{21} и S_{231} проходят через зоны 12,1, где выражение потенциала φ уже известно.

Для точек M зоны 21311 формула для потенциала скорости может быть представлена в таком же виде, как и для зоны 2131, но в этом случае часть площади S_{21} проходит через зону 1231 на грани Σ_1 , где значение потенциала φ еще не определено. С другой стороны потенциал φ точки M зоны 1231 представляется в виде

$$(2.3) \quad \varphi(M) = \frac{1}{\pi} \left[R_{S_{12}}^{\varphi, v} + P_{S_{12}}^{\varphi, v} + \frac{\kappa_{23}}{4\pi} (R_{S_{232}+S_{233}}^{\varphi, v_0} + P_{S_{231}}^{\varphi, v_0}) \right]$$

где часть площади S_{12} проходит через зону 21311, в которой потенциал в свою очередь выражается через потенциал в зоне 1231. Для зон 21311 и 1231 уравнения (2.2) и (2.3) следует рассматривать совместно, причем хорошим приближением, как показано в работе [9], будет решение, в котором в формулы (2.2), (2.3) вместо еще не определенных в зонах 1231, 21311 значений потенциала подставлены значения потенциала на ребре двугранного угла.

Для точек всех последующих зон можно аналогично рассмотренным зонам выразить значение потенциала через значения потенциала в предыдущих зонах, что в общем приводит к вычислению многократных интегралов. Для проведения практических расчетов представляется более целесообразным находить значение потенциала на некоторой плоскости $x_n = \text{const}$, перед которой вверх по течению находится небольшое количество простых зон типа 1, 12, 21, 2, 23, 32, 3, 34, 43, 4, 45, 54, 5, где имеет место либо только дифракция, либо только отражение на одном угле. Следующее сечение $x_{n+1} = \text{const}$ берется опять таким, чтобы между сечениями x_n и x_{n+1} укладывались только простые зоны. Значение потенциала в возмущенной области, лежащей за плоскостью $x_n = \text{const}$, выражается по формуле Вольтерра через значения потенциала и нормальной производной на поверхности пространственного типа $x_n = \text{const}$ и через значения нормальных производных на гранях призматической комбинации.

Поступила 29 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Н. Ф. Обтекание сверхзвуковым потоком двух пересекающихся и двух параллельных крыльев. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1969, № 8, вып. 2.
2. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1933.
3. Фалькович С. В. К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1947, т. 11, № 3.
4. Фридлиндер Б. И. Крестообразное крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 6.
5. Воробьев Н. Ф. Концевой эффект при обтекании сверхзвуковым потоком двугранного угла. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1970, № 3, вып. 1.
6. Воробьев Н. Ф. К задаче обтекания сверхзвуковым потоком пересекающихся крыльев. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
7. Воробьев Н. Ф., Федосов В. П. Обтекание сверхзвуковым потоком двугранного угла (конический случай). Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
8. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
11. Воробьев Н. Ф., Федосов В. П. Применение метода Вольтерра для решения задач обтекания тел пространственной конфигурации. В сб. «Аэрогазодинамика». Новосибирск, «Наука», 1973.
12. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л., Гостехиздат, 1952.