

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРОФИЛИРОВАНИЯ КОРОТКИХ ПЛОСКИХ СОПЛ

Н. А. ПОДСЫПАНИНА, Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Рассматривается один из возможных методов профилирования коротких плоских сопел для аэродинамических труб. Сопло имеет прямую звуковую линию, что позволяет конструировать дозвуковую и сверхзвуковую части отдельно. Задача решается численно в плоскости годографа. В дозвуковой области формулируется задача Дирихле для уравнения Чаплыгина в прямоугольнике, одна из сторон которого — звуковая линия.

В настоящее время в работах по расчетам сопла Лавалья определились два подхода, связанные с решением так называемых «прямой» и «обратной» задач (имеется в виду изучение потока во взаимосвязанной области до- и сверхзвукового течения). Прямая задача определяет поле потока при заранее заданном контуре стенки канала, форма которого из технических соображений подчинена некоторым геометрическим условиям.

Прямая задача может использоваться при конструировании сопла Лавалья, если контур входного участка канала (вообще говоря, довольно произвольный) выбран столь удачно, что в потоке не возникает ни скачков уплотнения, ни отрывных зон. Хотя строгая математическая теория прямой задачи сопла Лавалья в настоящее время только разрабатывается, уже имеются весьма эффективные численные методы ее решения [1, 2].

В обратной задаче (которая по определению является задачей профилирования) отыскивается контур сопла по заданному на оси симметрии распределению скорости. Предполагается, что эта, довольно произвольная зависимость может быть подобрана из условия отсутствия отрывных зон и скачков уплотнения в сопле. По своей формулировке обратная задача является задачей Коши, которая, как известно, некорректна в классическом смысле в области эллиптичности — дозвуковой части сопла. В настоящее время также имеются эффективные методы решения обратной задачи сопла [3], интерпретирующие ее как условно корректную задачу. В обратной задаче могут возникнуть трудности при получении коротких (а следовательно, крутых) сопел из-за резкого возрастания погрешности расчета.

Наряду с указанными задачами можно выделить подход, связанный с решением корректно поставленной задачи для уравнения Чаплыгина в плоскости годографа. Такой подход удобен тем, что удается заранее выполнить важное условие монотонности скорости на стенке, обеспечивающее (при отсутствии скачков уплотнения) безотрывность обтекания при любых числах Рейнольдса.

В настоящей работе выбрано течение с прямой звуковой линией, что позволяет разделить задачу на две: в до- и сверхзвуковых областях.

В дозвуковой области плоскости годографа формулируется задача Дирихле в прямоугольнике со сторонами $\beta = \text{const}$, $\tau = \text{const}$, опирающемся на отрезок звуковой линии $\bar{G} \{ \tau_0 \leq \tau \leq (\kappa - 1) / (\kappa + 1), 0 \leq \beta \leq \beta_0 \}$ ($\tau = \lambda^2 (\kappa - 1) / (\kappa + 1)$, λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости).

Задача Дирихле в прямоугольнике \bar{G} решается для уравнения Чаплыгина

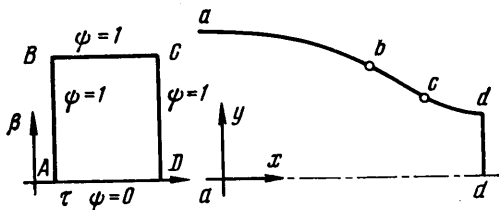
$$(1) \quad \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} - \tau \right) \psi_{\beta\beta} + 4(1 - \tau) \tau^2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \psi_{\tau\tau} + 4\tau \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left[1 - \tau \left(\frac{1}{\kappa - 1} - 1 \right) \right] \psi_{\tau} = 0$$

Указанная задача для уравнения типа (1) корректна [4]. Граничное условие для функции тока задается в виде разрывной кусочно-постоянной

функции

$$\begin{aligned} \psi=0 & \quad (\tau_0 \leq \tau \leq (\kappa-1) / (\kappa+1), \beta=0), \\ \psi=1 & \quad (\tau = (\kappa-1) / (\kappa+1), 0 \leq \beta \leq \beta_0) \\ \psi=1 & \quad (\tau = \tau_0, 0 \leq \beta \leq \beta_0), \\ \psi=1 & \quad (\tau_0 \leq \tau \leq (\kappa-1) / (\kappa+1), \beta = \beta_0) \end{aligned}$$

На фиг. 1 изображена область определения решения в плоскости годографа и ее прообраз в физической плоскости (на фигуре $k = (\kappa-1) / (\kappa+1)$). Прообраз в силу постановки задачи обладает свойством, что границная линия тока (стенка сопла) состоит из прямолинейного участка bc и



Фиг. 1

двух участков постоянной скорости: a_2b (точка a_2 находится в бесконечности) и cd , на котором скорость звуковая.

Решение поставленной задачи нетрудно представить с помощью функций Чаплыгина в виде тригонометрического ряда Фурье. Однако для практических целей более эффективно численное решение.

Непосредственная разностная аппроксимация этой задачи на равномерной сетке фактически сглаживает указанные разрывы в точках A, D , что может, вообще говоря, привести к потере точности. В [5] изучалась соответствующая погрешность в некотором классе разностных схем для уравнения Лапласа. Оказалось, что ошибка порядка единицы сосредоточена только вблизи самой точки разрыва, а вдали от нее в худшем случае имеет порядок $O(h^2)$, где h — шаг сетки.

Часто такая погрешность оказывается вполне допустимой. При необходимости получения более высокой точности целесообразно учитывать сингулярный характер решения в точках разрыва A, D , применяя, например, один из двух приводимых ниже способов.

Первый способ состоит в том, что из основной области \bar{G} выделяется окрестность точки разрыва с предписанным сингулярным решением уравнения (1), удовлетворяющим разрывному граничному условию. Это сингулярное решение ввиду непрерывного продолжения определяет краевую задачу с регулярным граничным условием в остальной части области. Погрешность этого способа связана с невыполнением условия непрерывности нормальной производной на общей границе областей (для уравнения второго порядка эллиптического типа); она имеет порядок диаметра вырезанной области сингулярности. При построении регулярного решения методом сеток с погрешностью $o(h)$ указанный способ применять неэкономно, так как вырезанная область должна содержать по крайней мере несколько ячеек сетки.

В связи с тем, что в работе использовался численный метод с погрешностью порядка $O(h^2)$, оказалось предпочтительнее представить решение в виде суммы регулярной и сингулярных компонент.

Сингулярные составляющие определяются в аналитической форме как асимптотики решения с разрывными граничными условиями. Для непре-

рывной компоненты получается уравнение с правой частью, если указанные выражения не являются точными решениями уравнения Чаплыгина. Правая часть, вообще говоря, может оказаться неограниченной (например, из-за неограниченности первых производных сингулярных компонент). В этом случае, конечно, численные операции становятся затруднительными. Однако в рассматриваемой работе эти трудности удалось обойти.

При описании сингулярности в звуковой точке D ($\beta=0$, $\tau=(\kappa-1)/(\kappa+1)$) используется решение уравнения Трикоми, аппроксимирующего в переменных τ , β вблизи звуковой линии уравнение Чаплыгина [6, 7]

$$(2) \quad \psi(\tau, \beta) = k \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{(1-c\eta^2)^{3/2}}, \quad \eta = \beta \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} - \tau \right)^{-3/2}$$

$$c = 18(\kappa-1)^3(\kappa+1)^{-4}, \quad k = -2c^{1/2} \Gamma(5/8) / \Gamma(1/3) \Gamma(1/2)$$

Компонента правой части от решения (2) в точке D обращается в нуль.

В дозвуковой точке $\beta=0$, $\tau=\tau_0$ (τ_0 — значение, соответствующее скорости на входе в сопло) сингулярность можно описывать гармонической функцией

$$(3) \quad \psi(\tau, \beta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(A \frac{\beta}{\tau - \tau_0} \right)$$

Решение (3) определяет неограниченную составляющую в правой части уравнения для непрерывной компоненты. Ограниченную правую часть удается получить, если воспользоваться записью уравнения Чаплыгина в форме [8]

$$\psi_{\beta\beta}^{\circ} + \operatorname{sign} t \psi_{\tau\tau}^{\circ} + N(t) \psi^{\circ} = 0$$

Численная схема решения задачи Дирихле для оператора Чаплыгина была получена при замене в дифференциальном уравнении производных центральными разностными формулами. Метод итераций организован по явной двухслойной схеме Якоби на пятиточечном шаблоне с погрешностью $O(h^2)$. Как известно, для уравнения Лапласа в этом случае получается устойчивая и быстродействующая схема, если центральная точка пятиточечного шаблона переносится в последующий слой [9].

Для уравнения Чаплыгина был выбран аналогичный параметр итерационного процесса по признаку переноса центральной точки в последующую итерацию.

Установление с точностью $O(10^{-7})$ на сетке 50×50 достигалось при числе итераций ~ 3500 .

Для получения конечной информации — координат сопла $x=x(\tau, \beta)$, $y=y(\tau, \beta)$ — необходимо выполнить контурное интегрирование по границе области по формулам [10], линейным относительно производных ψ_{τ} , ψ_{β} . Вычисление производилось по квадратурным формулам [11] с погрешностью $O(h^3)$.

Так как под знак интеграла в формулах для x , y входит нормальная производная решения на границе области, которую можно вычислить только по односторонней разностной формуле, то с целью сохранения погрешности $O(h^2)$ на границе в точках регулярности производилось вычисление второй нормальной производной с помощью уравнения Чаплыгина и второй тангенциальной производной по формулам

$$\psi_{\tau}|_0 = \frac{1}{\Delta\tau} (\psi_1 - \psi_0) - \frac{\Delta\tau}{2} \psi_{\tau\tau}|_0, \quad \psi_{\beta}|_0 = \frac{1}{\Delta\beta} (\psi_1 - \psi_0) - \frac{\Delta\beta}{2} \psi_{\beta\beta}|_0$$

Здесь индексом 0 обозначена граничная точка, а индексом 1 — ближайшая к ней приграничная точка.

Вблизи точки разрыва были использованы асимптотические выражения для x ; y , полученные с помощью решения (2)

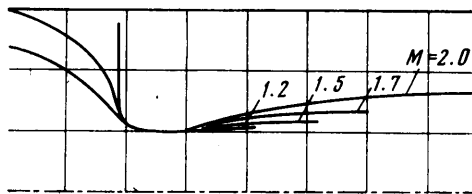
$$x - x_A = c_1 \beta^{1/2}, \quad y - y_A = c_2 \beta^{1/2} \quad \left(\tau = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \beta \rightarrow 0 \right)$$

$$x - x_A = c_3 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} - \tau \right)^{1/2} \quad \left(\beta = 0, \tau \rightarrow \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)$$

Проверка точности окончательного решения производилась вычислением координат x , y и циркуляции скорости на произвольном замкнутом контуре в плоскости годографа.

Отличия этих интегралов от нуля характеризуют невязку решения. Относительные погрешности составили $0.5 \div 1\%$. Эти интегральные проверки равносильны проверкам законов сохранения массы и количества движения.

В сверхзвуковой части было выбрано течение с угловой точкой, в которой поток разворачивается от звуковой линии, что сильно укорачивает сверхзвуковой участок сопла. Для построения характеристики второго семейства, близкой к звуковой линии, использовалось



Фиг. 2

соответствующее точное решение уравнения Трикоми (отличающееся от (2) постоянными), аппроксимирующее в этой области антисимметричное решение задачи Гурса для уравнения Чаплыгина. Несколько иначе поток в указанной области можно найти разложением в ряд по методу [12]. Далее решение строилось методом характеристик до характеристики второго семейства, ограничивающей слева спрямляющий участок сопла.

Следует отметить, что в принципе расчет сверхзвукового участка с угловой точкой не представляет особых трудностей, хотя может возникать опасение, что угловая точка сама по себе служит источником возмущений. Однако при точной профилировке дозвукового контура, обеспечивающего поток с прямой звуковой линией, в сверхзвуковой части сопла будут отсутствовать скачки уплотнения, и отрывные зоны, так как на стенке сверхзвукового участка в рассматриваемом случае скорость монотонно возрастает. Отсутствие скачков уплотнения в области расширения проверялось при проведении расчетов.

Основные результаты расчетов — контуры сопел — приведены на фиг. 2. Сверхзвуковой участок характеризуется числом Маха на выходе. Контуры дозвуковых участков, построенных на фиг. 2, характеризуются значениями $\beta_0 = 45, 75, 90^\circ$, $\tau_0 = 0.01, 0.05, 0$. Наибольший интерес с практической точки зрения представляет, видимо, профиль типа $\beta_0 = 90^\circ$, $\tau_0 = 0$, так как здесь длина профилированного участка минимальна. Фактически этот контур представляет собой границу струи, истекающей из плоского экрана в затопленное пространство с давлением, соответствующим звуковой скорости. Возможность профилирования такого рода сопел наглядно демонстрирует эффективность предлагаемого метода.

В заключение отметим, что благодаря постановке в плоскости годографа задача корректна и с вычислительной точки зрения хорошо сформулирована. Погрешность ее решения может быть сделана сколь угодно малой. Это означает, что при практическом воплощении рассчитанных контуров возможно получение высокого качества потока. Кроме того, описанный

метод может служить для проверки других численных методов решения задачи о расчете сопла Лавалья.

Поступила 19 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киреев В. И., Лифшиц Ю. Б.* О трансзвуковом течении газа в осесимметричных соплах Лавалья с крутыми стенками. Изв. АН СССР, 1970, № 6.
2. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
3. *Пирумов У. Г.* Расчет течения в сопле Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
4. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., «Наука», 1966.
5. *Андреев В. Б., Кряквина С. А.* Аппроксимация задачи о несовершенной скважине. В сб. «Исследование по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений». М., Изд-во МГУ, 1973.
6. *Гудерлей К. Г.* Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. *Овсянников Л. В.* Об одном газовом течении с прямой линией перехода. ПММ, 1949, т. 13, вып. 5.
8. *Баранцев Р. Г.* Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л., Изд-во ЛГУ, 1965.
9. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
10. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.
11. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.
12. *Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П.* Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., ВЦ АН СССР, 1961.