МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1975

УДК 532.595+612.13

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБКАХ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА. ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

С. А. РЕГИРЕР, И. М. РУТКЕВИЧ

(Москва)

Податливость стенок кровеносных сосудов является одним из основных факторов, определяющих движение крови. Хотя этой проблеме посвящена обширная литература (см., например, сборник [1] и библиографию в нем), остаются мало изученными важные для физиологии специфические эффекты, связанные с присутствием в сосудистой стенке мышечных слоев. Эти эффекты грубо могут быть охарактеризованы как существенное изменение реологических свойств стенки в результате активной деятельности сосудистой мускулатуры. Последняя, в свою очередь, управляется не только внешними, немеханическими воздействиями, но и самим напряженным состоянием стенки (см., например, [2]).

Эксперименты свидетельствуют о наличии у стенок сосудов временных эффектов, характерных для вязкоупругих тел ([1]), и сложной статической характеристики «давление – радиус», которая может иметь падающий участок [3, 4]. Оба эти факта могут быть разумно истолкованы в рамках общей континуальной модели мышечной ткани, предложенной в [5].

Ниже в квазиодномерном приближении исследуется совместное влияние указанных особенностей материала стенок на поведение малых возмущений, наложенных на стационарное течение в трубке. Рассмотрены возможные типы неустойчивостей. Предполагается, что инерционные эффекты несущественны, а реологический закон для стенки есть нелинейное обобщение модели Пойнтинга.

1. Рассмотрим неустановившееся осесимметричное течение несжимаемой вязкой жидкости по длинной трубе $r\leqslant R(x, t)$, $0\leqslant x\leqslant L$ с непроницаемой стенкой. Предположим, что выполнены условия применимости квазиодномерного (гидравлического) приближения, причем инерционные силы пренебрежимо малы. Тогда средняя скорость $u(x, t)$, мгновенный расход $g(x, t)$, сечение трубы $F(x, t)$ и среднее давление $p(x, t)$ связаны уравнениями

$$g=uF, \qquad F=\pi R^2 \tag{1.1}$$

$$\partial p / \partial x=-8\pi\mu g / F^2 \tag{1.2}$$

$$\partial F / \partial t+\partial g / \partial x=0 \tag{1.3}$$

Для замыкания системы (1.1) – (1.3) ее нужно дополнить связью между давлением p и радиусом R. Предположим, что трубка с жидкостью помещена во внешнюю среду, характеризуемую давлением p_e на поверхности $r=R+h$, где $h(x, t)$ – толщина стенки. Пренебрегая радиальными силами инерции, действующими на элемент стенки, запишем условие его равновесия

$$Rp-(R+h)p_e=\sigma h, \qquad \sigma=\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle=h^{-1}\int_R^{R+h}\sigma_{\theta\theta}\,dr \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma_{\theta\theta}$ – азимутальное нормальное напряжение в стенке. Примем, что стенка ведет себя как упругое тело при квазистатическом и мгновенном нагружениях, обладая при этом свойством запаздывающей упругости, обусловленным вязкостью. Ограничиваясь достаточно тонкими стенками

($h/R \ll 1$) и пренебрегая неоднородностью в распределении напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ и деформации $\varepsilon_{\theta\theta}$ по толщине стенки, запишем одномерное модельное реологическое уравнение

$$\partial\sigma/\partial t + \Phi(\sigma, \varepsilon) = K(\sigma, \varepsilon)\partial\varepsilon/\partial t \qquad (\varepsilon = R/R_0 - 1,\ K(\sigma, \varepsilon) > 0) \tag{1.5}$$

Деформация ε введена по отношению к состоянию с $R = R_0$, когда в стенке отсутствуют внутренние напряжения. Уравнение (1.5) представляет собой нелинейную модификацию вязкоупругого тела Пойнтинга [6]. Величина $K(\sigma, \varepsilon)$ имеет смысл мгновенного упругого модуля, а функция $\Phi(\sigma, \varepsilon)$ определяет поведение материала при низких частотах. Для стационарных процессов (1.5) задает связь между σ и ε в виде $\Phi = 0$.

Предположим, что материал стенки несжимаем и продольная составляющая деформации отсутствует [7]. Тогда площадь кольца $R \leqslant r \leqslant R + h$ сохраняется в процессе деформации, что при малых h/R_0 выражается приближенной формулой

$$h = h_0(1+\varepsilon)^{-1} \tag{1.6}$$

Если функция $p_e(x, t)$ задана, то уравнения (1.1)—(1.6) образуют замкнутую систему. Исключая F, R, σ, h при помощи конечных соотношений (1.1), (1.4)—(1.6), приходим к нелинейной системе трех дифференциальных уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) относительно скорости (или расхода), давления и деформации. Начальные и граничные условия для этой системы должны быть сформулированы исходя из физических соображений и требований корректности математической постановки задачи.

2. Система уравнений (1.1)—(1.6) допускает стационарное решение, отвечающее течению с заданным расходом, такое, что $g = g_* = \mathrm{const}$, а остальные переменные — функции координаты x. Решение с однородным распределением параметров существует при $g_* = 0$ (ниже все параметры стационарного потока отмечаются звездочкой).

Для нахождения решения необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$F^2(\varepsilon_*)\,dp_*/dx = -8\pi\mu g_*, \qquad F = \pi R_0^2(1+\varepsilon_*)^2 \tag{2.1}$$

Входящая сюда зависимость $\varepsilon_* = \varepsilon_*(p_*)$ получается исключением R_*, σ_*, h_* из конечных уравнений (1.4), (1.5). При этом внешнее давление $p_e^*(x)$ войдет в функцию $\varepsilon_*(p_*)$ как параметр.

При однозначной зависимости $\varepsilon_*(p_*)$, отвечающей монотонной или S-образной характеристике на плоскости (ε_*, p_*), всегда можно построить непрерывное решение уравнения (2.1). Единственность решения обеспечивается заданием давления в некотором сечении $x = \mathrm{const}$.

Если функция $\varepsilon_*(p_*)$ неоднозначна (например, при N-образной статической характеристике), то ситуация осложняется. В этом случае нельзя реализовать в течении непрерывный переход с падающей на возрастающую ветвь характеристики, так как, согласно (2.1), давление должно монотонно убывать вниз по потоку. Математически этот факт выражается в появлении особой точки у уравнения, получаемого из (2.1) переходом к зависимой переменной ε_*. Особая точка соответствует сечению, в котором $dp_*/d\varepsilon_* = 0$. Тем не менее для трубки конечной длины при умеренном расходе можно построить непрерывное решение, для которого во всем течении значения ε_* лежат на падающем участке N-образной характеристики. Заметим, что в области течения, где $dp_*/d\varepsilon_* < 0$, радиус трубки увеличивается вниз по потоку.

Аналогичные соображения верны и для решений с неизвестным расходом и граничными условиями на двух концах трубки.

Стационарное течение, удовлетворяющее условию $dp_* / d\varepsilon_* < 0$ вдоль всей трубы, существует, если

$$L \leqslant L_p = (\Delta p)_{\max} R_c^2 / 8\mu u_c \tag{2.2}$$

Здесь R_c, u_c — характерные значения радиуса и скорости, а $(\Delta p)_{\max}$ — максимальная разность давлений между точками падающего участка статической характеристики $p_*(\varepsilon_*)$.

Далее будет исследована устойчивость такого течения. Для малых возмущений параметров вида $\delta f = f(x, t) - f_*(x)$ будут использованы уравнения, полученные линеаризацией уравнений (1.1)—(1.6). Коэффициенты этих уравнений принимаются постоянными, а решения ищутся в виде гармонических плоских волн. Такое приближение справедливо, если выполнено условие $kL_p \gg 1$, где k — волновое число, а L_p определено в (2.2). Если невозмущенное решение соответствует покоящейся жидкости, то $L_p = \infty$, и ограничение на длину волны снимается ввиду строгого постоянства коэффициентов линеаризованной системы.

Остановимся на линеаризованном уравнении (1.5), которое принимает вид

$$(1 - \lambda\partial / \partial t)\delta\sigma = E(1 - \gamma\partial / \partial t)\delta\varepsilon \tag{2.3}$$
$$\lambda = -(\partial\Phi / \partial\sigma)_*^{-1}, \qquad \gamma = K_*(\partial\Phi / \partial\varepsilon)_*^{-1}, \qquad E = \lambda K_* / \gamma$$

Если в плоскости (ε_*, σ_*) статическая характеристика Γ_σ, определяемая уравнением $\Phi = 0$, имеет падающий участок, то должно быть $E < 0$. Поскольку $K_* > 0$, величины λ и γ будут иметь разные знаки. При этом либо $\lambda > 0$, $\gamma < 0$, либо $\lambda < 0$, $\gamma > 0$. Первый случай соответствует росту возмущения $\delta\sigma$ при фиксированной деформации, характерному для материала с S-образной характеристикой Γ_σ; второй случай — росту возмущения деформации при фиксированном напряжении, возникающему при наличии N-образной характеристики.

Воспользуемся следствием линеаризованного уравнения (1.4)

$$\delta\sigma = a\delta\varepsilon + b\delta p \tag{2.4}$$
$$a = 2(p_e^* + \sigma_*) / (1 + \varepsilon_*), \qquad b = (1 + \varepsilon_*^2) / \xi, \qquad \xi = h_0 / R_0$$

Подставляя $\delta\sigma$ из (2.4) в (2.3), придем к следующей связи:

$$(1 - \lambda\partial / \partial t)\delta p = G(1 + \theta\partial / \partial t)\delta\varepsilon, \qquad G = (E - a) / b, \tag{2.5}$$
$$\theta = \lambda(a - K_*) / (E - a)$$

Здесь $G = dp_* / d\varepsilon_*$ имеет смысл дифференциального модуля упругости на падающем участке статической характеристики Γ_p в плоскости (ε_*, p_*). Так как давление p однозначно определяется заданием величин σ и ε в соответствии с (1.4), то участок S-типа на характеристике Γ_σ переходит в аналогичный участок на характеристике Γ_p. Участок N-типа на Γ_σ переходит либо в аналогичный участок на Γ_p, либо в однозначную спадающую ветвь зависимости $p_*(\varepsilon_*)$. Подчеркнем, что такая ветвь, а также участок N-типа могут существовать на характеристике Γ_p и при монотонно возрастающей зависимости $\sigma_*(\varepsilon_*)$. Для этого достаточно выполнения неравенства $a > E$, которое при $p_e = \mathrm{const}$ эквивалентно условию

$$d\ln(p_e + \sigma_*) / d\ln(1 + \varepsilon_*) < 2.$$

Физический смысл указанного результата вытекает из анализа условия равновесия оболочки (1.4). При конечных деформациях внутреннее давление будет возрастать с увеличением радиуса трубки лишь при достаточно интенсивном росте растягивающего напряжения σ. В дальнейшем, говоря о типе характеристики, будем иметь в виду линию Γ_p.

Высокочастотный модуль H, определяющий связь между мгновенными приращениями давления и деформации

$$H = -G\theta/\lambda = (K_* - a)/b \tag{2.6}$$

будем предполагать положительным. Это обеспечивается неравенством $a < K_*$. Тогда при $G < 0$ величины λ и θ должны иметь одинаковый знак, причем $\lambda > 0$, $\theta > 0$ для характеристики S-типа и $\lambda < 0$, $\theta < 0$ для характеристики N-типа.

После линеаризации уравнений (1.2) и (1.3) и исключения из получившихся соотношений возмущения расхода δg придем к уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2u_* \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\varepsilon = \frac{R_*^3}{16\mu R_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta p \tag{2.7}$$

Применяя к обеим частям (2.8) оператор $G(1+\theta\partial/\partial t)$ и используя формулу (2.5), получим уравнение третьего порядка

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2u_* \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(1-\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right) + \eta\left(1+\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\delta p = 0 \tag{2.8}$$

$$\eta = -GR_*^3/16\mu R_0 > 0; \qquad u_* \geqslant 0$$

Такому же уравнению удовлетворяет и возмущение деформации.

Заметим, что отказ от требования $H > 0$ приведет к неэволюционности линеаризованной системы уравнений. При $H < 0$ должна возникать весьма быстрая раскачка мелкомасштабных возмущений. Для ее корректного описания требуется построение соответствующей эволюционной модели, выходящее за рамки данной работы. Построения такого рода проводились при исследовании волн в вязкоупругой жидкости [8]. Пренебрежение временными эффектами в реологическом поведении стенок трубы ($\lambda = \theta = 0$) привело бы вместо (2.8) к неэволюционному уравнению параболического типа.

3. Для решений вида $\delta p \sim \exp i(kx - \omega t)$ на основании (2.8) получаем дисперсионное уравнение

$$\lambda\omega^2 + (i\eta\theta k^2 - 2\lambda u_* k - i)\omega - \eta k^2 + 2iu_* k = 0 \tag{3.1}$$

При анализе устойчивости будем изучать поведение комплексной функции $\omega(k)$ при вещественных значениях k. В случае положительных параметров λ и θ обозначим комплексную частоту через ω_s, в случае отрицательных λ и θ — через ω_n. На основании (3.1) устанавливается следующая связь:

$$\omega_n(k;\ \lambda,\ \theta,\ u_*) = -\omega_s(ik;\ -\lambda,\ -\theta,\ iu_*)$$

Введем безразмерные переменные

$$\varkappa = \sqrt{\eta|\theta|}\,k, \qquad \beta = 2|\lambda|u_*\sqrt{\eta|\theta|}, \qquad \tau = \lambda/\theta, \qquad \Omega_s = |\lambda|\omega_s, \tag{3.2}$$

$$\Omega_n = |\lambda|\omega_n$$

Каждая из комплексных функций Ω_s, Ω_n имеет две однозначные ветви, зависящие от трех вещественных аргументов $\varkappa$, β и τ. Эти ветви определяются выражениями

$$\Omega_s^{(1,2)} = {}^1/_2[\beta\varkappa + i(1-\varkappa^2) \pm \sqrt{D}] \tag{3.3}$$

$$D(\varkappa;\ \beta,\ \tau) = -(1-\varkappa^2)^2 + (4\tau + \beta^2)\varkappa^2 - 2i\beta\varkappa(1+\varkappa^2)$$

$$\Omega_n^{(1,2)}(\varkappa;\ \beta,\ \tau) = -\Omega_s^{(1,2)}(i\varkappa;\ i\beta,\ \tau)$$

Для функции $\sqrt{D}$ в (3.3) выбрана ветвь, принимающая при $\varkappa = 0$ значение, равное i.

Исследуем поведение ветвей $\Omega_s^{(1,2)}$. Можно убедиться, что $\operatorname{Im}\Omega_s^{(1,2)}$ — четные, а $\operatorname{Re}\Omega_s^{(1,2)}$ — нечетные функции параметра $\varkappa$. Имеют место следующие неравенства:

$$\operatorname{Im}\Omega_s^{(1)}>0 \quad |\varkappa|<\varkappa_s^{(1)}; \qquad \operatorname{Im}\Omega_s^{(2)}\geqslant 0 \quad |\varkappa|<\varkappa_s^{(2)} \tag{3.4}$$

$$\varkappa_s^{(1,2)}=\sqrt{1+M_s^2}\pm M_s, \qquad M_s=u_*/c_s, \qquad c_s=\sqrt{\eta/\lambda}$$

Таким образом, в случае S-образной характеристики возникает длинноволновая неустойчивость стационарного потока, причем максимальным инкрементом обладает однородное возмущение ($\varkappa=0$), для которого $\operatorname{Im}\Omega_s^{(1)}=$ $=1$. Величина c_s, определенная в (3.4), имеет смысл скорости звука в модели с нулевым временем ретардации θ на покоящемся фоне ($u_*=0$). В этом случае (2.9) переходит в обычное волновое уравнение с характеристической скоростью c_s. Диапазон неустойчивых длин волн расширяется с ростом скорости потока благодаря возрастанию параметра $\varkappa_s^{(1)}$.

При $\varkappa=\varkappa_s^{(1,2)}$ существуют консервативные волны, распространяющиеся без затухания или раскачки с фазовыми скоростями

$$V_s^{(1,2)}=u_*\mp\sqrt{c_s^2+u_*^2} \tag{3.5}$$

Следовательно, происходит «дозвуковое» распространение короткой консервативной волны вверх по потоку и «сверхзвуковое» распространение длинной волны вниз по потоку. Частота колебаний одинакова для обеих волн и равна $1/\sqrt{\lambda\theta}$.

Поведение функций $\operatorname{Im}\Omega_s^{(1,2)}$ и $\operatorname{Re}\Omega_s^{(1,2)}$ в зависимости от $\varkappa$ при $\tau=1$ (когда $2M_s=\beta$) и разных значениях β представлено на фигуре сплошными линиями.

В случае N-образной статической характеристики свойства волн существенно отличаются от разобранных выше. Если $u_*<c_n=\sqrt{-\eta/\lambda}$, то ветвь $\Omega_n^{(2)}$ неустойчива для всех значений $\varkappa\neq 0$. При $u_*>c_n$ эта ветвь имеет область устойчивости

$$\varkappa_n^{(2)}<|\varkappa|<\varkappa_n^{(1)} \qquad (1<M_n<M_0) \tag{3.6}$$

$$\varkappa_n^{(2)}<|\varkappa|<\infty \qquad (M_n>M_0)$$

$$\varkappa_n^{(1,2)}=M_n\pm\sqrt{M_n^2-1}, \qquad M_n=u_*/c_n, \qquad M_0=\sqrt{1+\tau}$$

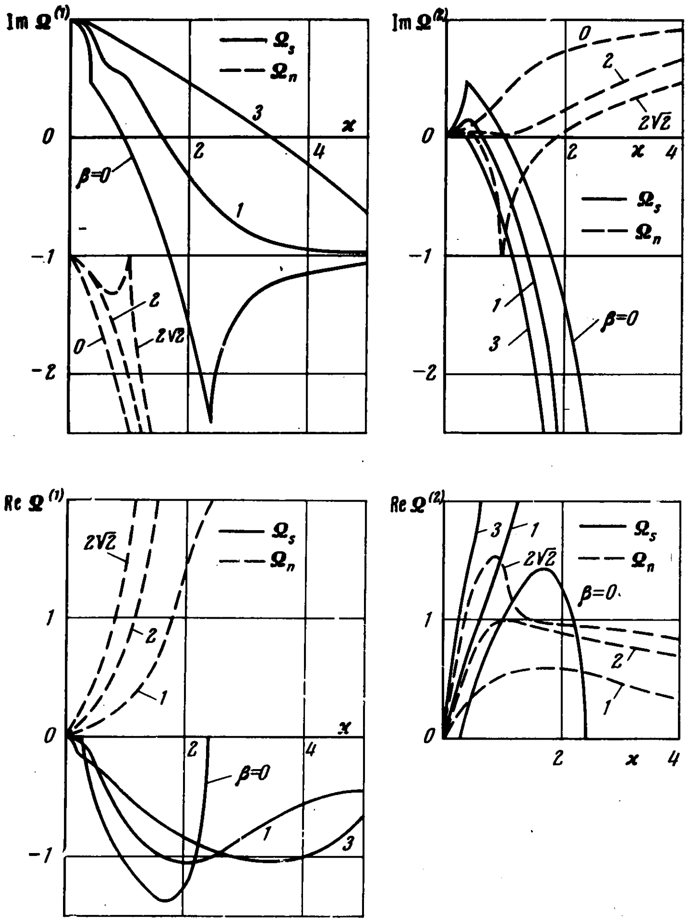
Ветвь $\Omega_n^{(1)}$ устойчива для всех длин волн при $M_n<M_0$, а в случае $M_n>$ $>M_0$ обладает интервалом неустойчивости $|\varkappa|>\varkappa_n^{(1)}$. В целом увеличение скорости потока оказывает стабилизирующее воздействие, приводя к уменьшению инкремента, а при $M_n>M_0$ — к расширению устойчивого средневолнового диапазона $(\varkappa_n^{(2)}, \varkappa_n^{(1)})$. В коротковолновой области всегда имеет место неустойчивость, инкремент которой максимален при $\varkappa\to\infty$.

В отличие от величины c_s, введенной для модели с S-образной характеристикой, параметр c_n нельзя интерпретировать как скорость звука, так как при $\theta=0$, $u_*=0$ и $\lambda<0$ уравнение (2.8) неэволюционно.

Консервативные волны в рассматриваемом случае существуют только при $u_*>c_n$ и соответствуют безразмерным волновым числам $\varkappa_n^{(1)}$, $\varkappa_n^{(2)}$. Обе волны распространяются вниз по потоку со скоростями

$$V_n^{(1,2)}=u_*\mp\sqrt{u_*^2-c_n^2} \tag{3.7}$$

Частота колебаний для обеих волн равна $1/\sqrt{\lambda\theta}$. Заметим, что консервативные волны в моделях с S- и N-образными характеристиками существуют, если при $\theta=0$ уравнение (2.9) принадлежит к гиперболическому типу. На фигуре штриховыми линиями изображены зависимости $\operatorname{Im}\Omega_n^{(1,2)}$ и $\operatorname{Re}\Omega_n^{(1,2)}$ от параметра $\varkappa$ при $\tau=1$ и разных значениях $\beta\leqslant 2M_0$.



Асимптотическое поведение ветвей функций Ω_s и Ω_n при $\varkappa\to\infty$ определяется формулами:

$$\operatorname{Im}\Omega_s^{(1)}=-\tau+O(\varkappa^{-2}),\qquad \operatorname{Re}\Omega_s^{(1)}=O(\varkappa^{-1}) \tag{3.8}$$

$$\operatorname{Im}\Omega_s^{(2)}=-\varkappa^2+O(1),\qquad \operatorname{Re}\Omega_s^{(2)}=\beta\varkappa+O(\varkappa^{-1})$$

$$\operatorname{Im}\Omega_n^{(2)}=\tau+O(\varkappa^{-2}),\qquad \operatorname{Re}\Omega_n^{(2)}=O(\varkappa^{-1})$$

$$\operatorname{Im}\Omega_n^{(1)}=-\varkappa^2+O(1),\qquad \operatorname{Re}\Omega_n^{(1)}=\beta\varkappa+O(\varkappa^{-1})$$

Формулы (3.8), относящиеся к величинам $\Omega_n^{(1,2)}$, справедливы при $M_n\leqslant M_0$. В случае $M_n>M_0$ в них следует поменять местами $\Omega_n^{(1)}$ и $\Omega_n^{(2)}$.

Рассмотрим теперь вопрос о характере неустойчивости волновых пакетов в системах с S- и N-образными характеристиками. Функция $k(\omega)$, соответствующая дисперсионному уравнению (3.1), имеет две ветви, определяемые выражениями

$$(3.9) \qquad k_{1,2}(\omega)=\frac{-i\tau u_*(\omega-i/\lambda)\pm\sqrt{i\tau\eta(\omega-i/\lambda)\psi(\omega)}}{\eta(\omega+i/\theta)}$$

$$\psi(\omega)=\omega^2+i\tau(u_*^2/\eta+1/\lambda)\omega+u_*^2\tau/\lambda\eta$$

Точки ветвления, в которых $k_1=k_2$, суть $\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$ и $\omega=i/\lambda$, где $\omega_{1,2}$ — корни функции $\psi(\omega)$.

Анализируя расположение точек ветвления, можно показать, что (см. [9]) система с S-образной характеристикой всегда абсолютно неустойчива, а в системе с характеристикой N-типа неустойчивость будет абсолютной при $u_*<c_n$ и конвективной при $u_*>c_n$.

4. Пусть теперь течение происходит в трубе конечной длины L, на концах которой заданы некоторые условия, не зависящие явно от времени. В качестве таких условий примем неизменность гидравлических сопротивлений $Z^\pm$ и давлений $p^\pm$ на входе в трубку и на выходе из нее, т. е. положим

$$(4.1) \qquad p^+-p=Z^+g \quad (x=0), \qquad p-p^-=Z^-g \quad (x=L) \qquad (p^\pm, Z^\pm=\text{const})$$

$$(4.2) \qquad -\delta p=Z^+\delta g \quad (x=0), \qquad \delta p=Z^-\delta g \quad (x=L)$$

Исключая δg при помощи уравнений п.2, вместо (4.2) найдем

$$(4.3) \qquad \left[2u_*\left(1-\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)+\eta\left(1+\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\zeta^+ +\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\delta p=0 \qquad (x=0)$$

$$\left[2u_*\left(1-\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)+\eta\left(1+\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-\zeta^- +\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\delta p=0 \qquad (x=L)$$

$$(\zeta^\pm=8\pi\mu/F_*^2Z^\pm)$$

В предельном случае, когда $\zeta^\pm\to\infty$, получаем условия фиксированного давления $\delta p=0$ $(x=0,\ x=L)$.

Частное решение уравнения (2.9) запишем в виде

$$(4.4) \qquad \delta p=e^{-i\omega t}[C_1\exp ik_1(\omega)x+C_2\exp ik_2(\omega)x]$$

где k_1, k_2 определены формулой (3.9).

Удовлетворяя условиям (4.3), получим после преобразований уравнение для собственных значений ω

$$(4.5) \qquad \operatorname{tg}\nu L=\frac{\nu(\zeta^++\zeta^-)}{\nu^2-(\zeta^++i\rho)(\zeta^--i\rho)}, \qquad \nu={}^1/_2(k_1-k_2), \qquad \rho={}^1/_2(k_1+k_2)$$

При выводе (4.5) предполагалось, что $e^{-i\rho L}\neq0$, т. е. что $\operatorname{Im}\rho$ не обращается в $-\infty$ (в противном случае должно быть $\omega=-i/\theta$, однако это значение ω никогда не является собственным).

Заметим, что (4.5) всегда имеет решение $\nu=0$, которому соответствует только тривиальное решение исходной задачи.

Уравнение (4.6) приобретает простой вид $\operatorname{tg}\nu L=0$ при $\zeta^+=\zeta^-=0$ или $\zeta^+\to\infty$, $\zeta^-\to\infty$. Тогда $\nu L=\pi n$, $n=\pm1, \pm2, \dots$ и согласно (3.9)

$$(4.6) \qquad \frac{\pi^2n^2}{L^2}=\frac{i\tau(\omega-i/\lambda)\psi(\omega)}{\eta(\omega+i/\theta)^2}$$

Отсюда для $s=-i\omega$ следует уравнение:

$$\eta\lambda\theta s^3+[u_*^2\lambda^2+\eta(\lambda-\theta)+\eta^2\theta^2\pi^2n^2/L^2]s^2- -(2u_*^2\lambda+\eta-2\eta^2\theta\pi^2n^2/L^2)s+u_*^2+\eta^2\pi^2n^2/L^2=0 \tag{4.7}$$

Условие устойчивости $\operatorname{Im}\omega<0$ или $\operatorname{Re}s<0$ будет выполнено, если коэффициенты (4.7) удовлетворяют неравенствам, вытекающим из теоремы Рауса — Гурвица. Поскольку старший коэффициент и свободный член в (4.7) положительны, то существенны лишь неравенства

$$\begin{gathered}u_*^2\lambda^2+\eta(\lambda-\theta)+\eta^2\theta^2\pi^2n^2/L^2>0\\ -[u_*^2\lambda^2+\eta(\lambda-\theta)+\eta^2\theta^2\pi^2n^2/L^2](2u_*^2\lambda+\eta-2\eta^2\theta\pi^2n^2/L^2)-\\ -\eta\lambda\theta(u_*^2+\eta^2\pi^2n^2/L^2)>0\end{gathered} \tag{4.8}$$

Для системы S-типа ($\lambda>0$, $\theta>0$) положим $M_s^2=\lambda u_*^2/\eta$, $N^2=\pi^2n^2\eta\theta/L^2$; тогда

$$\begin{gathered}N^2+(M_s^2+1)\tau-1>0\\ [1-(M_s^2+1)\tau-N^2](2M_s^2+1-2N^2)-M_s^2-\tau N^2>0\end{gathered}$$

Из второго неравенства следует, что имеет место одно из неравенств

$$N^2>M_s^2+1\equiv a_1\qquad N^2<{}^1/_2-\tau(M_s^2+{}^1/_2)\equiv a_2 \tag{4.9}$$

причем одновременно должно быть $N^2>0$ и согласно первому неравенству $N^2>1-\tau(M_s^2+1)\equiv a_3$.

Замечая, что $a_3<a_1$, легко получаем условие устойчивости при $a_2<0$ в виде

$$N^2>M_s^2+1 \tag{4.10}$$

При $a_2\geqslant0$, поскольку $a_3=2a_2+\tau M_s^2\geqslant a_2$, приходим к тому же самому условию. Если (4.10) выполнено для $n=\pm1$, то оно выполнено и для всех других n; следовательно, согласно (4.10), система устойчива при

$$L<\pi\sqrt{\eta\theta}/\sqrt{M_s^2+1} \tag{4.11}$$

Для систем N-типа ($\lambda<0$, $\theta<0$) положим $M_n^2=-\lambda u_*^2/\eta$, $N^2=-\pi^2n^2\eta\theta/L^2$; тогда из (4.8) следует:

$$\begin{gathered}N^2+(M_n^2-1)\tau+1>0\\ -[1+(M_n^2-1)\tau+N^2](2N^2+1-2M_n^2)-M_n^2-\tau N^2>0\end{gathered}$$

Простые рассуждения показывают, что положительное решение этой системы неравенств, если оно существует, имеет вид

$$\begin{gathered}\max(0,b_3)<N^2<\max(b_1,b_2)\\ b_1=-{}^1/_2-\tau(M_n^2-{}^1/_2),\qquad b_2=M_n^2-1,\qquad b_3=-1-\tau(M_n^2-1)\end{gathered} \tag{4.12}$$

Очевидно, что (4.12) не может быть выполнено для всех n одновременно, и потому система N-типа неустойчива.

Заметим, что уже из результатов п. 3 можно было заключить, что система N-типа неустойчива при любой конечной длине трубки из-за раскачки коротковолновых возмущений, а система S-типа устойчива при достаточно малой длине. Порядок величины этой длины, как видно из (3.4), определяется неравенством

$$L<2\pi\sqrt{\eta\theta}/(M_s+\sqrt{M_s^2+1}) \tag{4.13}$$

которое при больших M_s асимптотически совпадает с (4.11). Точная формула (4.11) дает при граничных условиях (4.4) более жесткое ограничение длины, нежели (4.13), которую можно интерпретировать как необходимое условие устойчивости при произвольных физически допустимых граничных условиях.

В общем случае решение уравнений (4.5), (3.9) относительно ω затруднительно и едва ли целесообразно, так как граничные условия (4.1) введены как предположительные. Тем не менее кроме разобранного выше частного случая есть и другие, когда анализ удается довести до конца. К таким случаям относится распространение возмущений по покоящемуся фону ($u_*=0$).

5. Подробное обсуждение проведенного выше анализа с точки зрения физиологических приложений выходит за рамки настоящей работы. Поэтому ограничимся здесь лишь некоторыми общими замечаниями и выводами.

1°. Квазиодномерное безынерционное приближение оправдано по крайней мере для артериол, т. е. для сосудов, у которых обнаружен или предполагается падающий участок на статической кривой $p(R)$: для этих сосудов (см., например, [1]) числа Рейнольдса не выше 0.05, $L/R \gtrsim 50$, $L/L_p \lesssim 0.25$.

2°. Для сосудов с характеристикой S-типа и совершенно идентичными свойствами стенки в зависимости от длины и условий движения крови возможны различные реакции, скажем, на увеличение входного давления. Достаточно короткий сосуд в этом случае уменьшит свой просвет (эффект авторегуляции расхода), тогда как в длинном из-за потери устойчивости такой эффект не будет наблюдаться.

3°. В сосудах с характеристикой S-типа возможно распространение вверх по потоку волн, физическая природа которых, отличная от природы пульсовой волны или электрической волны возбуждения в мышце, связана с инициированием мышечной активности чисто механическим путем – через распространяющиеся изменения давления в сосуде. Поскольку дифференциальный модуль упругости G, по-видимому, резко растет вверх по потоку, то указанные волны должны ускоряться в направлении распространения.

4°. В длинных сосудах S-типа и сосудах N-типа развитие неустойчивостей может приводить к скачкообразным реакциям в ответ на малые изменения давления и, вероятно, к автоколебательным процессам.

Авторы признательны А. Г. Куликовскому за полезное обсуждение.

Поступила 9 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидродинамика кровообращения. М., «Мир», 1971.
2. *Хаютин В. М.* Механизмы управления сосудами работающей скелетной мышцы. Гистомеханическая гипотеза. В сб. «Проблемы современной физиологической науки». Л., «Наука», 1971.
3. *Johnson P. C.* Autoregulatory responses of cat mesenteric arterioles measured in vivo. Circulat. Res., 1968, vol. 22, No. 2.
4. *Crane H. D.* Switching properties in bubbles, balloons, capillaries and alveoli. J. Biomech., 1973, vol. 6, No. 4.
5. *Усик П. И.* Континуальная механо-химическая модель мышечной ткани. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
6. *Рейнер М.* Реология. М., «Наука», 1965.
7. *Никитин Л. В., Хаютин В. М.* Теория измерения гидравлического сопротивления сосудов при воздействии управляющих сигналов. Физиол. ж. СССР, 1962, т. 48, № 7.
8. *Руткевич И. М.* О распространении малых возмущений в вязко-упругой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
9. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* Критерии нарастания волн. Усп. физ. н., 1971, т. 104, № 2.