МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1975

УДК 532.522

СОУДАРЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКИХ СВОБОДНЫХ СТРУЙ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ОДНОЙ ИЗ НИХ НА ДВА ПОТОКА

П. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

Рассматривается соударение двух струй идеальной несжимаемой жидкости с разделением одной струи на два потока, текущих в противоположных направлениях вдоль границы другой. Вторая струя в результате соударения отклоняется от первоначального направления. Отношение полных напоров разделяющейся и отклоняющейся струй $\varepsilon \leqslant 1$. Области течения, соответствующие каждой из указанных струй, конформно отображаются на первый и четвертый квадранты вспомогательной комплексной плоскости таким образом, что линии тока, разделяющей струи, в обоих случаях соответствует действительная полуось. Путем использования динамических и кинематических условий на указанной линии тока определяются нелинейные соотношения, связывающие граничные значения двух аналитических функций, равных логарифму комплексной скорости в каждой из областей течения. Аналитические функции вычисляются приближенно путем линеаризации при малых значениях ε.

1. Схема течения на физической плоскости z и характерные размеры приведены на фиг. 1. Давление на всех свободных поверхностях равно нулю. Если числовой параметр $\varepsilon = \rho_2 v_2^2/\rho_1 v_1^2$, где ρ_1, ρ_2, v_1, v_2 — плотность и скорость на свободной поверхности отклоняющейся и разделяющейся струй, равен единице, то в силу теоремы Бернулли точка C является критической для обеих струй. Этот случай был рассмотрен в работе [1]. В данной работе предполагается, что $\varepsilon \leqslant 1$.

Как следует из теоремы Бернулли, давление p равно $^1/_2\rho_2 v_2^2$ в точке C. Безразмерная величина $\lambda = 2p/\rho_2 v_2^2$ изменяется от 0 до 1 на отрезке AC и снова убывает до 0 на отрезке CD. При $\varepsilon < 1$ вся линия тока ACD, разделяющая струи, является линией разрыва течения. В работе [2] был предложен метод малого параметра для исследования такого рода течений. В данной работе используется вариант этого метода.

В качестве неизвестных функций, описывающих течение соответственно в разделяющейся и отклоняющейся струях, используются функции Жуковского (w, v и ϑ — комплексный потенциал течения, модуль и аргумент вектора скорости)

$$\omega_+ = f_+ + ih_+ = \ln(dw/v_2 dz) = \ln(v/v_2) - i\vartheta \tag{1.1}$$

$$\omega_- = f_- + ih_- = \ln(dw/v_1 dz) = \ln(v/v_1) - i\vartheta \tag{1.2}$$

2. Пусть область течения, соответствующая разделяющейся струе, конформно отображается на первый квадрант вспомогательной комплексной плоскости τ с соответствием точек, показанным на фиг. 2. Как нетрудно установить

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{2b^2 v_2 \delta_2 (\tau^2 - 1)}{\pi (b^2+1)\tau(\tau^2+b^2)} \tag{2.1}$$

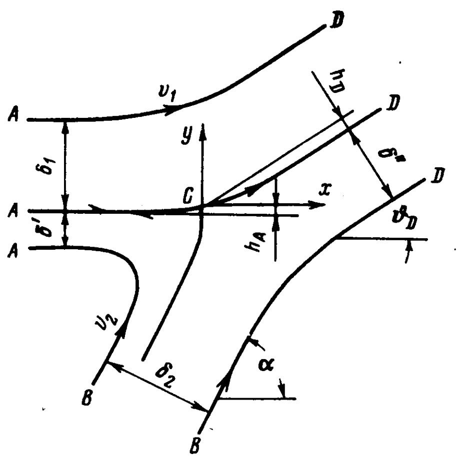
$$\delta' = b^2\delta_2/(b^2+1), \quad \delta'' = \delta_2/(b^2+1) \tag{2.2}$$

Функция $\omega_+(\tau)$ аналитична в первом квадранте плоскости τ и принимает мнимые значения на мнимой полуоси. Следовательно, $\omega_+(\tau)$ аналитически продолжается на всю верхнюю полуплоскость, причем ее действительная и мнимая составляющие представляют собой соответственно нечетную и четную функции $\operatorname{Re}\tau$. В точках ∞, bi и ±1 функция $\omega_+(\tau)$ равна соответственно $-\pi i$, $-\alpha i$ и ∞. Пусть некоторой точке M, лежащей на линии разрыва течения, соответствует действительная положительная точка ξ плоскости τ. Из теоремы Бернулли и соотношений (1.1), (2.1) следует, что

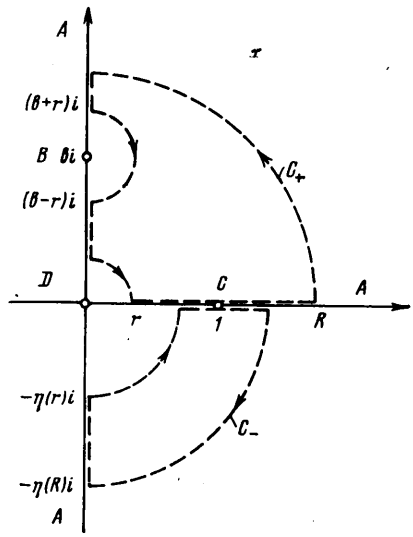
$$f_+(\xi)=\ln\sqrt{1-\lambda(\xi)} \qquad (\xi>0) \tag{2.3}$$

$$dz=\frac{2\delta_2 b^2(\tau^2-1)\,d\tau}{\pi(b^2+1)\tau(\tau^2+b^2)\exp\omega_+(\tau)} \tag{2.4}$$

При $\varepsilon<1$ линия разрыва течения не имеет угловой точки. Если предположить, что эта линия удовлетворяет условию Ляпунова, то в силу тео-



Фиг. 1



Фиг. 2

ремы Келлога аналитическая в первом квадранте функция $dz/d\tau$ непрерывна и отлична от нуля на действительной полуоси [3]. Следовательно, функция $\exp\omega_+(\tau)=dw/v_2dz$ имеет в точке $\tau=1$ нуль первого порядка.

3. Пусть область течения, соответствующая отклоняющейся струе, конформно отображается на четвертый квадрант плоскости τ (фиг. 2). Функция $\omega_-(\tau)$ аналитична в указанной области и принимает мнимые значения на мнимой полуоси. После аналитического продолжения на всю нижнюю полуплоскость действительная и мнимая составляющие функции $\omega_-(\tau)$ представляют собой нечетную и четную функции $\operatorname{Re}\tau$. Ввиду отсутствия критических точек в рассматриваемой области течения функция $\omega_-(\tau)$ непрерывна на действительной оси. Кроме того, $\omega_-(\infty)=0$.

Пусть при рассматриваемом в данном пункте конформном отображении точке M, лежащей на линии разрыва течения, соответствует действительная положительная точка $\eta(\xi)$ плоскости τ. В силу теоремы Бернулли, формулы Шварца и конформного отображения

$$f_-(\eta(\xi))=\ln\sqrt{1-\varepsilon\lambda(\xi)} \qquad (\xi>0) \tag{3.1}$$

$$(3.2)\qquad \omega_-(\tau)=\frac{-1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_-(\eta(\xi))\,d\eta(\xi)}{\eta(\xi)-\tau}=\frac{-1}{\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(1-\varepsilon\lambda(\xi))\,\eta(\xi)\,d\eta(\varepsilon)}{\eta^2(\xi)-\tau^2}$$

$$(3.3)\qquad dw/d\tau=-2\delta_1 v_1/\pi\tau,\qquad dz=-2\delta_1 d\tau/\pi\tau\exp\omega_-(\tau)$$

4. При действительных положительных значениях τ равенства (2.4) и (3.3) дают два различных выражения дифференциала дуги ACD. Следовательно ($\sigma=\delta_2/\delta_1$, $\xi>0$, $\eta>0$)

$$(4.1)\qquad \frac{d\eta(\xi)}{\eta(\xi)\exp\omega_-(\eta(\xi))}=\frac{-\sigma b^2(\xi^2-1)\,d\xi}{(b^2+1)(\xi^2+b^2)\,\xi\exp\omega_+(\xi)},\quad \eta(1)=1$$

В силу равенства аргументов и модулей величин, находящихся в правой и левой частях, уравнение (4.1) эквивалентно соотношениям ($\xi>0$, $\eta>0$)

$$(4.2)\qquad h_+(\xi)=h_-(\eta(\xi))+\begin{cases}0 & (\xi<1)\quad h_+(\infty)=-\pi,\ h_+(bi)=-\alpha\\ -\pi & (\xi>1)\quad h_-(\infty)=0\end{cases}$$

$$(4.3)\qquad \frac{d\eta(\xi)}{\eta(\xi)\exp f_-(\eta(\xi))}=\frac{\sigma b^2|\xi^2-1|\,d\xi}{(b^2+1)(\xi^2+b^2)\,\xi\exp f_+(\xi)},\qquad \eta(1)=1$$

$$(4.4)\qquad \begin{gathered}1-\exp 2f_-(\eta(\xi))=\varepsilon(1-\exp 2f_+(\xi))=\varepsilon\lambda(\xi)\\ f_\pm(0)=f_\pm(\infty)=0\end{gathered}$$

Последние соотношения следуют из равенств (2.3) и (3.1). Равенства (4.2) и (4.4) с учетом четности и нечетности функций $h_\pm$ и $f_\pm$ связывают граничные значения действительных и мнимых частей функций $\omega_\pm(\tau)$, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Уравнение (4.3) определяет функцию $\eta(\xi)$.

Применяя к рассматриваемому течению теорему об изменении количества движения и учитывая равенства (2.2), можно получить

$$(4.5)\qquad 1+\frac{\varepsilon\sigma b^2}{b^2+1}+\varepsilon\sigma\exp i\alpha-\left(1+\frac{\varepsilon\sigma}{b^2+1}\right)\exp i\vartheta_D=0$$

Из равенства (4.5) следует, что

$$(4.6)\qquad b^2=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha/2}{1+\varepsilon\sigma},\qquad \sin\vartheta_D=\frac{\varepsilon\sigma\sin\alpha\,(1+\varepsilon\sigma\cos^2\alpha/2)}{1+\varepsilon\sigma(2+\varepsilon\sigma)\cos^2\alpha/2}$$

Покажем, что равенство (4.5) следует также и из соотношений (4.2)—(4.4). Для этого умножим равенство (4.4) на равенство (4.1), эквивалентное соотношениям (4.2), (4.3). Интегрируя результат на отрезке $0<r\leqslant\xi\leqslant R$ и переходя к комплексно-сопряженным, получим

$$(4.7)\qquad \int_{\eta(r)}^{\eta(R)}\left[\frac{\exp ih_-(\eta(\xi))}{\exp f_-(\eta(\xi))}-\exp\omega_-(\eta(\xi))\right]\frac{d\eta(\xi)}{\eta(\xi)}=$$

$$=-\frac{\varepsilon\sigma b^2}{b^2+1}\int_{r}^{R}\left[\frac{\exp ih_+(\xi)}{\exp f_+(\xi)}-\exp\omega_+(\xi)\right]\frac{(\xi^2-1)\,d\xi}{\xi(\xi^2+b^2)}$$

Далее проинтегрируем аналитические в первом квадранте функции $\exp\omega_+(\tau)\times\times(\tau^2-1)/\tau(\tau^2+b^2)$ и $(\tau^2-1)/\tau(\tau^2+b^2)\exp\omega_+(\tau)$ по замкнутому контуру C_+, а аналитические в четвертом квадранте функции $\varepsilon\sigma b^2\exp\omega_-(\tau)/(b^2+1)\tau$ и $\varepsilon\sigma b^2/(b^2+1)\times\times\tau\exp\omega(\tau)$ по замкнутому контуру C_-, показанным на фиг. 2 штрихами. Полученные интегралы тождественно равны нулю. Прибавляя к левой (правой) части равенства (4.7) первый (третий) интеграл и вычитая величину, комплексно-сопряженную второму (четвертому) интегралу, перейдем к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$. При этом в силу соотношений (4.3) и (4.4) величина $\eta(r) \to 0$, а $\eta(r) \to \infty$. Поскольку $f_\pm(\tau)=0$ на мнимой оси, в результате получим уравнение (4.5).

5. Функции $\omega_\pm(\tau)$ зависят от параметра ε. Как видно из выражения (3.2), функция $\omega_-(\tau)$ тождественно равна нулю при $\varepsilon=0$. Аналитические в верхней полуплоскости функции

$$\omega_0(\tau)=f_0(\tau)+ih_0(\tau)=\omega_+(\tau)\,|_{\varepsilon=0},$$
$$\Omega(\tau)=F(\tau)+iH(\tau)=\omega_+(\tau)-\omega_0(\tau)$$

в силу равенства (4.2) удовлетворяют соотношениям

$$h_0(\xi)=\begin{cases}0 & |\xi|<1, \quad H(\xi)=h_-(\eta(\xi))\\ -\pi & |\xi|>1, \quad H(\infty)=0\end{cases} \tag{5.1}$$

$$\omega_0(\tau)=\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}, \qquad \exp\Omega(\tau)=(1+\tau)\exp\omega_+(\tau)/(1-\tau) \tag{5.2}$$

Как следует из п. 2, функция $\exp\Omega(\tau)$ непрерывна, ограничена и не обращается в нуль на действительной оси. Следовательно, функция $\Omega(\tau)$ непрерывна и ограничена на указанной оси. Используя формулу Шварца и соотношения (3.2), (4.3), (4.4), (5.1) и (5.2), можно получить

$$\frac{d\eta(\xi)}{\eta(\xi)}=\frac{\sigma b^2\sqrt{1-\varepsilon(1-((1-\xi)/(1+\xi))^2\exp 2F(\xi))}\,(1+\xi)^2 d\xi}{(b^2+1)\exp F(\xi)\,\xi(\xi^2+b^2)} \tag{5.3}$$
$$\xi>0, \quad \eta>0, \quad \eta(1)=1$$

$$\Omega(\tau)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\tau}\int\limits_0^{\infty}\ln\left(1-\varepsilon\left(1-\left(\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}\right)^2\exp 2F(\xi^*)\right)\right)\frac{\eta(\xi^*)d\eta(\xi^*)}{\eta^2(\xi^*)-\eta^2(\xi)} \tag{5.4}$$

Внутренний сингулярный интеграл в правой части выражения (5.4) обозначает главное значение по Коши. При $\Omega(\tau)=0$ и $\varepsilon=0$ равенство (5.4) обращается в тождество. Предполагая, что интегралы в правых частях равенств (3.4) и (5.4) допускают линеаризацию по малым значениям ε, можно получить

$$\omega_-(\tau)=\frac{\varepsilon}{\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{4\xi}{(1+\xi)^2}\frac{\eta_0(\xi)d\eta_0(\xi)}{\eta_0^2(\xi)-\tau^2} \tag{5.5}$$

$$\Omega(\tau)=-\frac{\varepsilon}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\tau}\int\limits_0^{\infty}\frac{4\xi^*}{(1+\xi^*)^2}\frac{\eta_0(\xi^*)d\eta_0(\xi^*)}{\eta_0^2(\xi^*)-\eta_0^2(\xi)} \tag{5.6}$$

$$\ln\eta_0(\xi)=0.5\sigma\{(1+\cos\alpha)\ln\xi-\cos\alpha\ln(\xi^2\cos^2\alpha/2+$$
$$+\sin^2\alpha/2)+2\sin\alpha[\alpha/2-\operatorname{arc\,ctg}(\xi\operatorname{ctg}\alpha/2)]\} \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) получено путем интегрирования уравнения (4.3) при $\varepsilon=0$ и $\Omega(\tau)=0$, при этом в силу равенства (4.6) параметр $b=\operatorname{tg}\alpha/2$. Формулы (5.5) и (5.6) позволяют вычислить первое приближение функций $\omega_\pm(\tau)$, описывающих рассматриваемое течение.

В качестве примера определим в первом приближении зависимость величины z, соответствующей отклоняющейся струе, от величины τ. Из равенства (3.3) следует, что

$$dz=-2\delta_1 d\tau/\pi\tau+2\delta_1\omega_-(\tau)\,d\tau/\pi\tau$$

Подставляя в полученное выражение равенства (5.5) и (5.7), проинтегрируем последнее по дуге $\tau_1\tau$, целиком лежащей в четвертом квадранте. Изменяя порядок интегрирования во втором слагаемом правой части и устремляя τ к 1, получим ($\alpha=\pi/2$)

$$z=-\frac{2\delta_1}{\pi}\ln\tau+\frac{\delta_2\varepsilon}{2}+\frac{2\delta_2\varepsilon}{\pi^2 i}\int_0^\infty \ln\frac{|\eta_0^2(\xi)-1|\tau^2}{\eta_0^2(\xi)-\tau^2}\frac{d\xi}{\xi^2+1}$$

Если точка z лежит на линии разрыва течения, то величина τ положительна. Пусть $\tau=\eta_0(\xi^*)$, где $0<\xi^*<\infty$. Тогда предыдущее выражение приобретает вид

$$(5.8)\qquad z=2\delta_1\ln\eta_0(\xi^*)/\pi+$$
$$+\frac{2\delta_2\varepsilon}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}-\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \ln\frac{\eta_0^2(\xi^*)|\eta_0^2(\xi)-1|}{|\eta_0^2(\xi)-\eta_0^2(\xi^*)|}\frac{d\xi}{\xi^2+1}\right]$$

Отделяя мнимую часть равенства (5.8) и устремляя ξ^* к бесконечности, получим ординату левой асимптоты линии разрыва течения

$$(5.9)\qquad h_A=\varepsilon\delta_2 k,\quad k=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \ln|\eta_0^2(\xi)-1|\frac{d\xi}{\xi^2+1}$$

Из уравнения (5.8) можно также найти величину h_D, характеризующую положение правой асимптоты, при этом оказывается, что $h_D=h_A$. Поскольку взаимное положение всех асимптот можно определить из теоремы о сохранении момента количества движения, то величины h_A и h_D определяют положение критической точки течения. Ниже приведены значения коэффициента k, входящего в равенство (5.9)

σ	0.25	0.50	1	2	4
k	0.351	0.116	−0.156	−0.540	−1.201

Поступила 24 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский П. М.* О соударении двух свободных плоских струй идеальной несжимаемой жидкости. В сб. Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам, Казань, 1969. Казань, Изд. Казанск. ун-та, 1970.
2. *Белоцерковский П. М.* Нелинейная задача о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости с разрывом течения на границе между струями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.