МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1975

УДК 532.546:532.72

РАСТВОРЕНИЕ И ВЫМЫВ СОЛЕЙ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ С МАЛЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПАРАМЕТРА ПРОМЫВКИ

Н. П. КУРАНОВ, А. Ж. МУФТАХОВ, А. З. ЩЕРБАКОВ

(Астрахань)

Даются решения задач миграции солей при промывках засоленных земель с объемным засолением для водонасыщенных и сухих грунтов. Рассматриваются случаи, когда область фильтрации остается всегда гетерогенной (имеются соли в твердой фазе) и когда область фильтрации делится на две кинетически различные зоны.

Миграция солей в пористой среде с учетом их растворения из твердой фазы в одномерном случае описывается следующей системой уравнений [1]:

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-v\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}=m_0\frac{\partial c}{\partial t},\qquad \frac{\partial N}{\partial t}=-\beta N^\alpha(c_*-c) \tag{0.1}$$

Здесь $c(x, t)$, $N(x, t)$ — концентрации жидкой и твердой фазы соответственно; c_* — концентрация предельного насыщения; m_0 — активная пористость; v — скорость фильтрации, *м/сут.*; D — коэффициент конвективной диффузии, $м^2$/сут.; α, β — константы, зависящие от характера засоленности грунта.

К системе уравнений (0.1) приводят задачи растворения и вымыва солей в мягких породах (песчаных и глинистых грунтах), входящих в тело гидротехнических сооружений или залегающих вблизи них (в основании и примыкающих сооружений), а также задачи опреснения почв в процессе их промывки, подземного растворения полезных ископаемых с последующим извлечением раствора из залежей, прогноза химического состава воды, извлекаемой из водозаборов, расположенных вблизи водоемов, загрязняемых постоянно или периодически промышленными и бытовыми сточными водами, и некоторые другие задачи миграции солей в пористой среде [2].

В безразмерных переменных систему (0.1) запишем в виде (c_0 — концентрация воды при входе в пористую среду)

$$\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\partial n}{\partial\tau}=\frac{\partial\theta}{\partial\tau},\qquad \frac{\partial n}{\partial\tau}=-\theta n^\alpha \tag{0.2}$$

$$\theta=\frac{c_*-c}{c_*-c_0},\quad n=\frac{N}{m_0(c_*-c_0)},\quad \varepsilon=\frac{D\gamma}{v^2},\quad \xi=\frac{\gamma}{v}x,$$

$$\tau=\frac{\gamma}{m_0}t,\quad \gamma=\beta[m_0(c_*-c_0)]^\alpha$$

В силу малости коэффициента диффузии параметр промывки $\varepsilon\ll 1$, поэтому в первом уравнении (0.2) первым членом часто пренебрегают [1, 3]. Порядок уравнения уменьшается, поэтому отбрасывают одно из граничных условий (при фильтрации в сухой засоленный грунт) или получают разрывные решения (при фильтрации в грунт, содержащий частично растворенные соли). Таким образом, даже при бесконечно малом значении параметра промывки пренебрежение им в первом уравнении (0.2) приводит к конечному изменению решения.

Последнее связано с тем, что в некоторой области фильтрации первый член первого уравнения (0.2), несмотря на малость ε, оказывается одного порядка с остальными членами, и им в этой области пренебрегать нельзя.

Данная задача относится к задачам особых возмущений, которые с успехом решаются методом сращивания асимптотических разложений [4]. Ниже этим методом получены решения некоторых задач, описываемых системой (0.2).

1. Фильтрация воды в сухой засоленный грунт. В этом случае требуется решить систему (0.2) в области $0\leqslant\xi\leqslant\tau$ при условиях

$$\theta(0,\tau)=1,\qquad \frac{\partial\theta(\xi,\xi)}{\partial\xi}=0,\qquad n(\xi,\xi)=n_0(\xi) \tag{1.1}$$

$$(n_0(\xi)=N_0(\xi)\,/\,m_0(c_*-c_0))$$

Здесь $N_0(\xi)$ — функция, описывающая начальный профиль засоления твердой фазы.

Рассмотрим случаи $\alpha=1$, 0.5. Первое значение α используется в эмпирических формулах при расчете промывных норм, а второе получено из теоретических соображений [1].

Пусть $\alpha=1$. Тогда из второго уравнения (0.2) получим

$$\theta=-\partial\ln n\,/\,\partial\tau \tag{1.2}$$

Для концентрации твердой фазы задача не является задачей особых возмущений. Поэтому при отыскании функции $n(\xi,\tau)$ можно пренебрегать первым членом в первом уравнении (0.2) во всей области фильтрации. Тогда, подставляя (1.2) в первое уравнение (0.2) и интегрируя по τ, получим

$$\frac{\partial\ln n}{\partial\tau}+\frac{\partial\ln n}{\partial\xi}+n=f_1(\xi) \tag{1.3}$$

Здесь $f_1(\xi)$ — произвольная функция. Находя $f_1(\xi)$ из третьего условия (1.1) и интегрируя (1.3) методом характеристик с первым условием (1.1), получим

$$n=n_0(\xi)\exp\int\limits_0^\xi n_0(x)\,dx\left[\exp(\tau-\xi)+\exp\int\limits_0^\xi n_0(x)\,dx-1\right]^{-1} \tag{1.4}$$

В дальнейшем для простоты выкладок будем считать $n_0(\xi)=n_0=\text{const}$. Используя связь (1.2), из (1.4) получим

$$\theta=\exp(\tau-\xi)\left[\exp(\tau-\xi)+\exp(n_0\xi)-1\right]^{-1} \tag{1.5}$$

Решение (1.5) удовлетворяет первому условию (1.1) и справедливо в окрестности $\xi=0$. Поскольку решение (1.4) для твердой фазы справедливо во всей области фильтрации, то в окрестности границы конвективного переноса $\xi=\tau$ уравнение для жидкой фазы будет таким:

$$\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-n_0\exp(n_0\xi)\left[\exp(\tau-\xi)+\exp(n_0\xi)\right]^{-1}\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \tag{1.6}$$

Это уравнение надо решать со вторым условием (1.1). Вторым граничным условием для уравнения (1.6) должно быть условие сращивания с внешним решением (1.5). Согласно методу сращивания асимптотических разложений введем внутреннюю переменную, растягивающую окрестность границы конвективного переноса

(1.7) $\mu=(\tau-\xi)/\sqrt{\varepsilon}$

В переменных μ, τ уравнение (1.6), второе условие (1.1) и условие сращивания с решением (1.5) запишутся так:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\mu^2}-n_0\exp[n_0(\tau-\sqrt{\varepsilon}\mu)]\{\exp(\sqrt{\varepsilon}\mu)+\exp[n_0(\tau-\sqrt{\varepsilon}\mu)]-1\}^{-1}\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

$$\partial\theta(0,\tau)/\partial\mu=0,\quad \theta=\exp(-n_0\tau)[1+\sqrt{\varepsilon}\mu(1+n_0-\exp(-n_0\tau))]+O(\varepsilon),\quad \mu\to\infty$$

Решение этой задачи ищем в виде

(1.8) $\theta=a_0(\mu,\tau)+\sqrt{\varepsilon}a_1(\mu,\tau)+O(\varepsilon)$

Подставляя (1.8) в уравнения и граничные условия, получим задачи для определения функций a_0 и a_1

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial\mu^2}-n_0a_0=\frac{\partial a_0}{\partial\tau},\quad \frac{\partial^2 a_1}{\partial\mu^2}-n_0a_1=\frac{\partial a_1}{\partial\tau}-n_0\mu\exp(-2n_0\tau)$$

$$\frac{\partial a_0(0,\tau)}{\partial\mu}=0;\quad a_0=\exp(-n_0\tau),\quad \mu\to\infty;\quad a_0(\mu,0)=1$$

$$\frac{\partial a_1(0,\tau)}{\partial\mu}=0;\quad a_1=\mu\exp(-n_0\tau)[1+n_0-\exp(-n_0\tau)],$$

$$\mu\to\infty;\quad a_1(\mu,0)=n_0\mu$$

Решая их, например, с помощью преобразования Лапласа, получим решение в окрестности $\xi=\tau$

(1.9) $$\theta=\exp(-n_0\tau)\Big\{1+\sqrt{\varepsilon}\mu[1+n_0-\exp(-n_0\tau)]+$$
$$+2(1+n_0)\sqrt{\tau\varepsilon}\,\mathrm{ierfc}\frac{\mu}{2\sqrt{\tau}}\Big\}-\varphi_0(\mu,\tau,n_0)$$

Воспользовавшись методом аддитивного составления [4], получим составное решение, представляющее собой сумму внешнего (1.5) и внутреннего (1.9) решений за вычетом их общей части

(1.10) $$\theta=\exp(\tau-\xi)[\exp(\tau-\xi)+\exp(n_0\xi)-1]^{-1}+$$
$$+\exp(-n_0\tau)2(1+n_0)\sqrt{\tau\varepsilon}\,\mathrm{ierfc}\frac{\tau-\xi}{2\sqrt{\tau\varepsilon}}-\varphi_0(\mu,\tau,n_0)$$

(1.11) $$\varphi_0(\mu,\tau,n_0)=\frac{1}{2in_0^{1/2}}\exp(-2n_0\tau)\left[\exp(-i\mu n_0^{1/2})\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\mu}{2\sqrt{\tau}}-in_0^{1/2}\tau^{1/2}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp(i\mu n_0^{1/2})\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\mu}{2\sqrt{\tau}}+in_0^{1/2}\tau^{1/2}\right)\right]$$

Переход к размерным величинам в формулах (1.4) и (1.10) завершает решение исходной задачи при $\alpha=1$. Полученные решения показывают, что количество солей в твердой фазе с течением времени уменьшается, но исчезает совсем лишь при $t\to\infty$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha=0.5$. Аналогично предыдущему ищем вначале решение для твердой фазы и внешнее решение для жидкой фазы.

Выпишем эти решения

(1.12) $\quad n^{1/2}=n_0^{1/2}\Delta_+/\Delta_-, \qquad \Delta_\pm=n_0^{1/2}-\dfrac{\tau-\xi}{4}[1\pm\exp(-n_0^{1/2}\xi)]$

(1.13) $\quad \theta=n_0\exp(-n_0^{1/2}\xi)\Delta_-^{-2}$

В окрестности подвижной границы $\xi=\tau$ для жидкой фазы справедливо уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-n^{1/2}\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

где $n^{1/2}$ — известная функция, определяемая по (1.12). Вводя внутреннюю переменную (1.7) и отыскивая решение внутренней задачи в виде (1.8), получим

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial\mu^2}-n_0^{1/2}a_0=\frac{\partial a_0}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial^2 a_1}{\partial\mu^2}-n_0^{1/2}a_1=\frac{\partial a_1}{\partial\tau}-\frac{\mu}{2}\exp(-2n_0^{1/2}\tau)$$

$$\frac{\partial a_0(0,\tau)}{\partial\mu}=0; \qquad a_0=\exp(-n_0^{1/2}\tau), \qquad \mu\to\infty; \qquad a_0(\mu,0)=1$$

$$a_1=\mu\exp(-n_0^{1/2}\tau)\left\{n_0^{1/2}+\frac{1}{2}n_0^{-1/2}[1-\exp(-n_0^{1/2}\tau)]\right\}, \qquad \mu\to\infty;$$

$$a_1(\mu,0)=\mu n_0^{1/2}$$

Заканчивая решение внутренней задачи и строя составное решение из внешнего и внутреннего решений, получим окончательно

(1.14) $$\theta=n_0\exp(-n_0^{1/2}\xi)\left\{n_0^{1/2}-\frac{\tau-\xi}{4}[1-\exp(-n_0^{1/2}\xi)]\right\}^{-2}+$$
$$+\exp(-n_0^{1/2}\tau)\left[\frac{2n_0+1}{n_0^{1/2}}\sqrt{\tau\varepsilon}\,\mathrm{ierfc}\frac{\tau-\xi}{2\sqrt{\tau\varepsilon}}-n_0^{1/2}\varphi_0(\mu,\tau,n_0^{1/2})\right]+O(\varepsilon)$$

Здесь функция $\varphi_0(\mu,\tau,n_0^{1/2})$ определяется выражением (1.11).

Из (1.12) следует, что в момент времени $\tau=\tau_*=2n_0^{1/2}$ у входа в грунт не останется солей в твердой фазе. При $\tau>\tau_*$ в области фильтрации образуется увеличивающаяся со временем зона полного растворения. На подвижной границе этой зоны $\xi=S(\tau)$, закон движения которой неизвестен, должны выполняться условия

(1.15) $\quad n(S,\tau)=0, \qquad \theta(S,\tau)=1$

Решения (1.12) и (1.14) при $\tau>\tau_*$ справедливы в области $\tau-\tau_*\leqslant\xi\leqslant\tau$. В области $S\leqslant\xi\leqslant\tau-\tau_*$ следует решать систему (0.2) при $\varepsilon=0$ с условиями (1.15) и условием непрерывности функций на границе $\xi=\tau-\tau_*$. Проводя необходимые выкладки, получим

$$n=n_0^{1/2}\delta_-/\delta_+, \qquad \delta_\pm=\exp\frac{\xi+\tau_*-\tau}{n_0^{1/2}}\pm\exp(-n_0^{1/2}\xi)$$

$$\theta=4\exp\frac{(1-n_0)\xi+\tau_*-\tau}{n_0^{1/2}}\delta_+^{-2}, \qquad S=\frac{\tau-\tau_*}{1+n_0}$$

В области $(0\leqslant\xi\leqslant S)$ будет $\theta=1$, $n=0$.

Из полученных результатов следует, что при проведении прогнозных расчетов с точностью до $O(\varepsilon)$ можно утверждать, что в случае $\alpha=0.5$ образуется зона полного рассоления, увеличивающаяся со временем по линейному закону, в которой отсутствуют соли в твердой фазе, а концентрация раствора равна минерализации промывной воды. Чем сильнее исходное засоление, тем медленнее продвижение этой зоны.

2. Фильтрация в переувлажненный засоленный грунт. Пусть в начальный момент в порах грунта имеется поровый раствор. За счет растворения солей из твердой фазы его концентрация близка к концентрации предельного насыщения c_*. Однако не все соли перешли в раствор и имеются еще соли в твердой фазе; на вход подается промывная вода с минерализацией c_0. В этом случае систему (0.2) нужно решать при условиях

$$\theta(0,\tau)=1,\quad \partial\theta(\infty,\tau)/\partial\xi=0,\quad \theta(\xi,0)=0,\quad n(\xi,0)=n_0 \tag{2.1}$$

Рассмотрим случай $\alpha=1$ и будем во всей области фильтрации пренебрегать диффузионным эффектом. Тогда, исключая из (0.2) значение θ и интегрируя полученное уравнение методом характеристик с первым, третьим и четвертым условиями (2.1), найдем

$$n=\begin{cases} n_0\{1-[1-\exp(\tau-\xi)]\exp(-n_0\xi)\}^{-1}, & 0\leqslant\xi\leqslant\tau \\ n_0, & \xi\geqslant\tau \end{cases} \tag{2.2}$$

Отсюда, используя связь (1.2), найдем внешние решения задачи для жидкой фазы

$$\begin{aligned} &\theta_1=\exp[\tau-(1+n_0)\xi]\{1-[1-\exp(\tau-\xi)\exp(-n_0\xi)\}^{-1}, \quad \xi<\tau \\ &\theta_2=0, \quad \xi>\tau \end{aligned} \tag{2.3}$$

Эти решения справедливы вне границы поршневого вытеснения $\xi=\tau$. Для нахождения решений в окрестности этой границы введем внутреннюю переменную в виде (1.7). Тогда для жидкой фазы для главного приближения имеем такие уравнения:

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial\mu^2}-n_0\theta_i=\frac{\partial\theta_i}{\partial\tau},\qquad -\infty<\mu<+\infty,\qquad i=1,2 \tag{2.4}$$

Для решения системы (2.4) имеем условия сращивания с внешними решениями (2.3)

$$\theta_1=\exp(-n_0\tau),\quad \mu\to\infty;\qquad \theta_2=0,\quad \mu\to-\infty$$

На границе $\mu=0$ потребуем выполнения условий четвертого рода

$$\theta_1(0,\tau)=\theta_2(0,\tau),\qquad \frac{\partial\theta_1(0,\tau)}{\partial\mu}=\frac{\partial\theta_2(0,\tau)}{\partial\mu}$$

Решение поставленной задачи имеет вид

$$\theta_1=\exp(-n_0\tau)\left[1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\frac{\mu}{2\sqrt{\tau}}\right],\quad \mu>0$$

$$\theta_2=\frac{1}{2}\exp(-n_0\tau)\operatorname{erfc}\left(-\frac{\mu}{2\sqrt{\tau}}\right),\quad \mu<0$$

Строя составное решение, получим

$$
(2.5)\qquad \theta=\begin{cases}\exp[\tau-(1+n_0)\xi]\{1-[1-\exp(\tau-\xi)]\exp(-n_0\xi)\}^{-1}-\\ -\dfrac{1}{2}\exp(-n_0\tau)\operatorname{erfc}\dfrac{\tau-\xi}{2\sqrt{\tau\varepsilon}}, & 0\leqslant\xi\leqslant\tau\\ \dfrac{1}{2}\exp(-n_0\tau)\operatorname{erfc}\dfrac{\xi-\tau}{2\sqrt{\tau\varepsilon}} & \xi\geqslant\tau\end{cases}
$$

Формулы (2.2) и (2.5), переписанные в размерных величинах, дают окончательное решение задачи. При $\varepsilon=0$ все результаты работы совпадают с известными [3].

Аналогично может быть рассмотрен более простой случай поверхностного засоления $\alpha=0$. В этом случае при фильтрации в переувлажненный грунт имеется точное решение [2], которое при $\varepsilon\to0$ дает разрыв на границе $\xi=\tau$.

Поступила 25 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* О кинетике растворения солей при фильтрации воды в грунтах. Растворение и выщелачивание горных пород. М., Госстройиздат, 1957.
2. *Веригин Н. Н., Шержуков Б. С.* Диффузия и массообмен при фильтрации жидкости в пористых средах. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969.
3. *Пеньковский В. И.* Одномерная задача растворения и вымыва солей при фильтрации с большими значениями критерия Пекле. ПМТФ, 1969, № 2.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Наука», 1967.