

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ, ОТОБРАЖАЮЩИХСЯ НА ДВУЛИСТНУЮ ОБЛАСТЬ
ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА

В. М. ЕНТОВ, Ф. Д. ТУРЕЦКАЯ

(Москва)

Получено численное решение плоских задач нелинейной фильтрации, сведенных с помощью линеаризующего преобразования годографа к связанным краевым задачам на двух листах плоскости годографа. Изучены течения, создаваемые системой источников — источник и пятиточечной площадной системой. Рассмотрен закон фильтрации с предельным градиентом и кусочно-линейный закон фильтрации.

Круг задач нелинейной фильтрации, сводящихся к линейным краевым задачам после преобразования годографа, существенно расширяется, если допускаются отображения на неоднolistные области [1]. В частности, таким образом может быть рассмотрено течение, создаваемое двумя источниками различной интенсивности, течение в прямоугольном элементе симметрии сетки скважин и т. д. Фактически реализовать построение течения проще всего, непосредственно решая численно задачу в двулистной области плоскости годографа, а затем возвращаясь на физическую плоскость по известным формулам обращения. При этом удается полностью использовать известные асимптотики решения, что существенно сокращает объем вычислений. Именно этот подход реализован в данной работе. Другая схема численного расчета предложена в [2, 3].

1. Основные соотношения. После преобразования к переменным годографа (w, θ) , где w — модуль скорости фильтрации, θ — угол, составляемый вектором скорости фильтрации с осью x ; функция тока ψ и приведенный напор H удовлетворяют системе уравнений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Phi^2(w) \frac{\partial \psi}{\partial w} + w \Phi'(w) \frac{\partial H}{\partial \theta} &= 0, & \Phi(w) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - w^2 \frac{\partial H}{\partial w} &= 0, \\ \Phi'(w) \geq 0, & \quad \Phi(0) \geq 0 \end{aligned}$$

Из которой получается уравнение второго порядка для функции тока

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\Phi^2(w)}{w \Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) + \frac{\Phi(w)}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

Возвращение на физическую плоскость xy дается соотношениями

$$(1.3) \quad \begin{aligned} dz = dx + i dy &= \left(-\frac{\cos \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) dw + \\ &+ \left(\frac{\cos \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta + \\ &+ i \left(\frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{\sin \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) dw + \\ &+ i \left(\frac{\sin \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

2. Фильтрационное течение, создаваемое двумя источниками различной интенсивности. Рассмотрим течение, создаваемое двумя источниками интенсивности Q и q ($q \geq Q$), расположенными на оси x на расстоянии L друг от друга; принимается, что на бесконечности течение стремится к радиальному, соответствующему потоку $q+Q$. В силу симметрии течения относительно оси x рассматривается только верхняя полуплоскость. После проведения разреза по критической линии постоянного угла $\theta = \theta^*$ область течения разбивается на две подобласти, отображающиеся при преобразовании годографа на области Δ_I и Δ_{II} $\{0 \leq \theta \leq \theta_0 = \pi, 0 \leq w < \infty\}$, образующие общую область Δ , расположенную на двулистной поверхности переменных w, θ . (Все необходимые подробности постановки задачи могут быть найдены в работе [1].)

Функция тока $\psi(w, \theta)$, равная $\psi_I(w, \theta)$ на первом листе и $\psi_{II}(w, \theta)$ на втором удовлетворяет уравнению (1.2) во всех внутренних точках Δ_I и Δ_{II} и граничным условиям

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi_I(w, 0) &= 0, \quad \psi_I(w, \theta_0) = 1/2q, \quad \theta_0 = \pi, \quad 0 \leq w < \infty \\ \psi_I(0, \theta) &= 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta^*, \quad \psi_I(0, \theta) = 1/2q + (\theta - \pi)(q+Q)/2\pi \\ \theta^* &\leq \theta \leq \theta_0 \\ \psi_{II}(w, 0) &= -Q/2, \quad \psi_{II}(w, \theta_0) = 0, \quad 0 \leq w < \infty \\ \psi_{II}(0, \theta) &= -1/2Q + \theta/2\pi(q+Q), \quad 0 \leq \theta \leq \theta^* \\ \psi_{II}(0, \theta) &= 0, \quad \theta^* \leq \theta \leq \theta_0 \end{aligned}$$

На разрезе выполнены условия сопряжения

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \psi_I(w, \theta^* \pm 0) &= \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0) \\ \frac{\partial \psi_I(w, \theta^* \pm 0)}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0)}{\partial \theta} \quad 0 \leq w \leq w^* \end{aligned}$$

Параметрами задачи в физической плоскости являются величины q, Q, L , а в плоскости годографа — скорости q, Q, w^*, θ^* ; величины w^*, θ^* играют роль параметров, для определения которых используются условия, выражающие тот факт, что источники расположены на оси абсцисс и расстояние между ними равно L [1]

$$(2.3) \quad L = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \psi_I(w, 0)}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{II}(w, \pi)}{\partial \theta} \right] \frac{dw}{w^2} +$$

$$(2.4) \quad + \lambda \left[\int_0^{\theta^*} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \psi_I(w, \theta)}{\partial w} \right)_{w=0} \cos \theta d\theta + \int_{\theta^*}^{\pi} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \psi_{II}(w, \theta)}{\partial w} \right)_{w=0} \cos \theta d\theta \right]$$

$$\int_0^{\theta^*} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \psi_I(w, \theta)}{\partial w} \right)_{w=0} \sin \theta d\theta + \int_{\theta^*}^{\pi} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \psi_{II}(w, \theta)}{\partial w} \right)_{w=0} \sin \theta d\theta = 0$$

В действительности решается обратная задача, т. е. по выбранным w^* и θ^* определяется величина L из соотношения (2.3) и подбирается отношение q/Q так, чтобы выполнялись условия коллинеарности (2.4). Этот подбор облегчается тем, что в силу линейности задачи

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \psi(q, Q, w, \theta) &= q\psi(1, 0, w, \theta) + Q\psi(0, 1, w, \theta) \\ z(q, Q, w, \theta) &= qz(1, 0, w, \theta) + Qz(0, 1, w, \theta) \end{aligned}$$

где $\psi(q, Q, w, \theta)$ и $z(q, Q, w, \theta)$ — функция тока и комплексная координата точек физической плоскости для задачи с параметрами q и Q .

Для закона фильтрации с предельным градиентом ($\Phi(w) = w + \lambda$, $\lambda > 0$) основное уравнение (1.2) принимает вид

$$(2.6) \quad u(u+1)\psi_{uu} + (u-1)\psi_u + \psi_{\theta\theta} = 0, \quad u = w/\lambda$$

Интересны прежде всего течения с малой интенсивностью потока (малые значения $a = w^*/\lambda$), когда сильнее всего проявляются нелинейные эффекты. При этом можно воспользоваться тем обстоятельством, что при $a \rightarrow 0$ решение задачи в плоскости годографа $\psi(u, \theta)$ стремится к конечному пределу $\psi_0(u, \theta)$ («предельное решение»). При этом в области больших скоростей $u \geq U \gg a$ выход на предельное решение осуществляется уже при не слишком малых a . Отыскание $\psi_0(u, \theta)$ сводится к решению первой краевой задачи отдельно в полуполосах Δ_I и Δ_{II} и может быть легко осуществлено при помощи интегрального преобразования по переменной u [1, 4].

В результате имеем

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \psi_I(u, \theta) &= -\frac{u^2}{2\pi} \int_0^\infty (1+s^2) [(q+Q)(\operatorname{sh} s\theta_2 + s\theta_1 \operatorname{ch} s\theta_2) - \pi s Q \operatorname{ch} s\theta_2] \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} s\theta F(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} ds, \quad 0 \leq \theta < \theta_1 = \theta^*; \quad \theta_0 = \theta_1 + \theta_2 = \pi \\ \psi_I(u, \theta) &= -\frac{Q}{2} + \frac{q+Q}{2\pi} \theta + \quad (\theta_1 < \theta \leq \theta_0) \\ &+ \frac{u^2}{2\pi} \int_0^\infty (1+s^2) [(q+Q)(\operatorname{sh} s\theta_1 - s\theta_1 \operatorname{ch} s\theta_1) + \pi Q s \operatorname{ch} s\theta_1] \frac{\operatorname{sh} s(\theta_0 - \theta) F(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} ds \\ \psi_{II}(u, \theta) &= -\frac{1}{2} Q + \frac{1}{2\pi} \theta (q+Q) - \psi_I(u, \theta) \end{aligned}$$

Здесь $F(s, -u) = F(2+is, 2-is, 3, -u)$ — гипергеометрическая функция, для вычисления которой использовано интегральное представление

$$(2.8) \quad F(s, -u) = \frac{8}{\pi s u (1+u)} \int_0^{\pi/2} r^{-1} t \cos^2 \varphi \sin [2s \ln(t+r)] d\varphi$$

$$u = \operatorname{sh}^2 \beta/2, \quad t = \sin \varphi \operatorname{sh} \beta/2, \quad r = (1+t^2)^{1/2}$$

Соотношения (2.7) позволяют, задавшись некоторым достаточно большим U , определить решение в области $u > U$. Тем самым граничное условие при $u \rightarrow \infty$ сносится на линию $u = U$, и размер счетной области соответственно сокращается.

Подобное же ограничение счетной области желательно провести при малых u , поскольку здесь уравнение (2.6) вырождается. Вблизи любого отрезка линии $u = 0$, не содержащего точек смены граничных условий, решение уравнения (2.6) имеет «стандартную» асимптотику

$$(2.9) \quad \psi(u, \theta) = A + B\theta + C(\theta)u^2$$

Это позволяет «снести» граничные условия с линии $u=0$ на линию $u=u_* \leq \min(a, 1)$ (см. ниже).

Наконец, при возвращении на физическую плоскость удобно воспользоваться асимптотикой решения вблизи особой точки преобразования годографа ($w=w^*$, $\theta=\theta^*$).

Вводя локальные координаты

$$w = \lambda u^* e^\xi, \quad \theta = \theta^* - r(u^*/(1+u^*))^{1/2}$$

получим представление

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \psi_I(\xi, \theta) = & C_{11} + C_{21} \operatorname{sign}(\theta^* - \theta) \left[\frac{(\sqrt{\xi^2 + (u^* + 1)(\theta^* - \theta)^2 / u^*} - \xi)/2 \right]^{1/2} - C_{22} \left[\frac{(\sqrt{\xi^2 + (u^* + 1)(\theta^* - \theta)^2 / u^* + \xi})/2 \right]^{1/2} + C_{31} \xi + \\ & + C_{32} (\theta^* - \theta) \sqrt{(u^* + 1)/u^*}; \quad \psi_{II}(\xi, \theta) = C_{11} + C_{21} \operatorname{sgn}(\theta - \theta^*) \times \\ & \times \left[\frac{(\sqrt{\xi^2 + (1 + 1/u^*)(\theta - \theta^*)^2} - \xi)/2 \right]^{1/2} + \\ & + C_{22} \left[\frac{(\sqrt{\xi^2 + (1 + 1/u^*)(\theta - \theta^*)^2} + \xi)/2 \right]^{1/2} + C_{34} \xi + \\ & + C_{32} (1 + 1/u^*)^{1/2} (\theta^* - \theta) \end{aligned}$$

причем свободные коэффициенты асимптотики определяются впоследствии по значениям искомой функции в ближайших к особой точке узлах сетки.

Сформулированная выше задача для уравнения (2.6) с условиями (2.1), (2.2) решалась численно методом установления. Предварительно была осуществлена замена независимого переменного $w = \lambda u^* e^\xi$ ($a = u^* = w^*/\lambda$), приводящая к уравнению

$$(2.11) \quad \left(1 + \frac{e^{-\xi}}{a}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{2e^{-\xi}}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

Двулистная область $\Delta_I, \Delta_{II} \{0 \leq w < \infty, 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$ переходит при этом в $G_I, G_{II} \{-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$, линия вырождения $w=0$ переведена в $-\infty$. Выполненная замена обеспечивает при использовании равномерной сетки по координате ξ существенное сгущение узлов в переменной u в области малых значений скорости. В процессе численного решения бесконечная область должна быть заменена конечной $G_I, G_{II} \{\xi_* \leq \xi \leq \xi^*, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. На «боковых» сторонах и разрезе граничные условия берутся непосредственно из исходной формулировки задачи. На «верхней» границе области ($\xi = \xi^*$) используется предельное решение (2.7) с подстановкой $U = ae^{\xi^*}$, причем положение верхней границы (значение $\xi = \xi^*$) определяется эмпирически. Для определения положения нижней границы $\xi = \xi_*$ проводилась серия расчетов с постепенным расширением счетной области «вниз» (уменьшением ξ_*) до тех пор, пока не устанавливались с достаточной точностью значения отношения $(\psi - A - B\theta)/a^2 e^{2\xi}$ (см. (2.9)). Из (2.9) следует, что при малых u

$$\psi(u, \theta) - \psi(0, \theta) = \frac{1}{2} u \frac{\partial \psi(u, \theta)}{\partial u}$$

В силу этого при ξ , близких к ξ_* , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_I}{\partial \xi} &= 2\psi_I(\xi, \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \frac{\partial \psi_I}{\partial \xi} &= Q - \frac{q+Q}{\pi} \theta + 2\psi_I(\xi, \theta), \quad \theta_1 < \theta \leq \theta_0 \end{aligned}$$

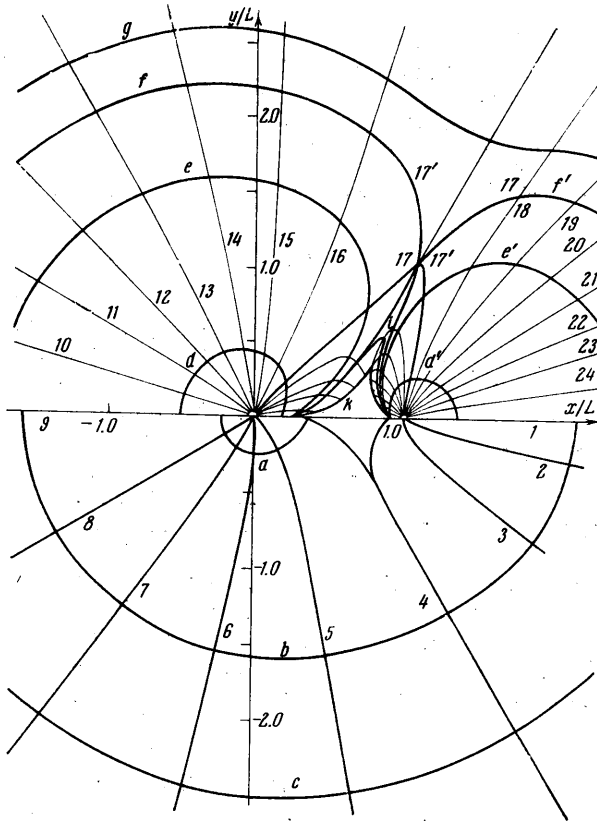
$$(2.12) \quad \frac{\partial \psi_{II}}{\partial \xi} = Q - \frac{q+Q}{\pi} \theta + 2\psi_{II}(\xi, \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1$$

$$\frac{\partial \psi_{II}}{\partial \xi} = 2\psi_{II}(\xi, \theta), \quad \theta_1 < \theta \leq \theta_0$$

В качестве «нестационарного аналога» уравнения (2.11) взято уравнение

$$(2.13) \quad \left(1 + \frac{e^{-\xi}}{a}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{2e^{-\xi}}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

которое аппроксимировалось неявной разностной схемой второго порядка точности (по пространственным переменным), отвечающей методу переменных направлений (вариант схемы продольно-поперечной прогонки

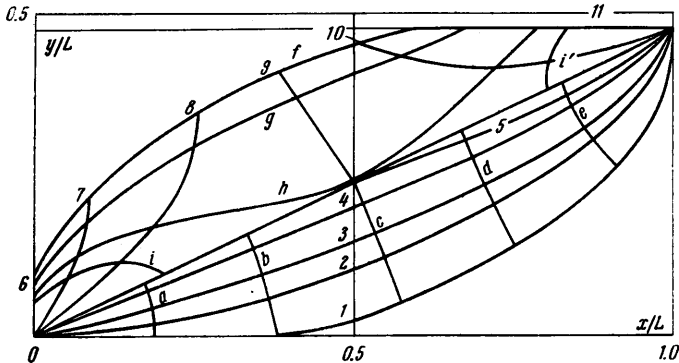


Фиг. 1

ки [5]). Схема безусловно устойчива по начальным данным. Получающаяся на каждом временном шаге система алгебраических уравнений решалась методом прогонки. (Условия устойчивости метода прогонки [6] выполнены.) Граничные условия аппроксимировались обычным образом; выполнение условий на «линии сопряжения» обеспечивалось соответ-

вующей нумерацией узлов сетки. Для замыкания прогонок в особой точке использовалось известное в ней значение функции тока $\psi_I(w^*, \theta^*) = \psi_{II}(w^*, \theta^*) = 1/4(-Q + (q+Q)\theta^*/\pi)$. Для аппроксимации условий при $\xi = \xi_*$ соотношения (2.12) интегрировались от ξ_* до $\xi_* + \Delta\xi$ (где $\Delta\xi$ — шаг сетки).

После определения функции тока во всех узлах расчетной сетки можно перейти к определению напора и физических координат. Напор и координаты определяются численным интегрированием из (1.1) и (1.3) с учетом замены $w = \lambda u^* e^{\xi}$ и с использованием асимптотики решения при $\xi = \xi_*$. Контуры интегрирования выбирались так, чтобы обойти особую точку.



Фиг. 2

По полученным значениям функции тока $\psi(u, \theta)$, напора $H(u, \theta)$ и координат $x(u, \theta)$, $y(u, \theta)$ строились в физической плоскости xu линии тока, линии постоянного напора и линии постоянных значений модуля скорости u и угла θ , что дает полное представление о структуре течения. Расчеты проводились для $u^* = 0.1, 0.5, 1.0$; $\theta^* = \pi/2, \pi/3, \pi/4$. Случай $\theta^* = \pi/2$, обладающий дополнительной симметрией и сводимый к «однолистной» задаче, был рассмотрен для отработки алгоритма.

Сопоставлялись размеры и форма застойных зон, рассчитанные ранее аналитически и полученные из приведенного выше численного решения. Если все расстояния измеряются в долях от расстояния между скважинами, то результаты расчета (при заданных u^*) практически совпадают. Несколько больше различие в определении параметров $q/\lambda L$. Соответствующие значения сопоставлены ниже (второй и третий столбцы). Здесь звездочкой отмечено значение, полученное из численного расчета.

u^*	$(q/\lambda L)^*$	$q/\lambda L$	$(q/\lambda L)^*$	$q/\lambda L$
0.10	1.65	1.51	0.137	0.142
0.25	—	—	0.495	0.506
0.50	4.55	4.27	1.21	1.23
1.00	7.80	7.73	2.78	2.79

Особенности потока отчетливо видны на фиг. 1, где представлена сетка течения в виде линий $u = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ в верхней части рисунка и линий тока $\psi = \text{const}$ и линий постоянного напора $H = \text{const}$ в нижней. Построение проведено для источников интенсивности 1 и 2.12. Линии 1 — 9 — линии тока, на которых функция тока принимает соответственно значения -0.5 , от -0.2 до 0.8 с шагом 0.2 , и 1.06 ; линии 9 — 24 — линии по-

стоянного угла, им соответствуют значения θ от π до $1/3\pi$ с шагом $-\pi/12$ и от $1/3\pi$ до 0 с шагом $-\pi/24$. На изолиниях, обозначенных буквами, a соответствует $H=-0.34$, $b-H=-2.04$, $c-H=3.0$, $g-u=0.086$, $f-u=0.1$, $e-u=0.134$, $d-u=0.44$, $i-u=0.086$, $k-u=0.0012$. Последняя линия практически совпадает с границей застойной зоны.

Отмечается эффект усиления неоднородности потока при снижении интенсивности движения; он неизбежно должен сказаться при заводнении пластов, содержащих вязкопластические нефти, приводя к образованию тонких языков прорыва воды и оставлению больших целиков нефти.

3. Течение с предельным градиентом в элементе прямоугольной сетки скважин. В качестве второго примера применения развитой выше численной методики рассмотрим одну из основных для теории разработки нефтяных месторождений схему расстановки скважин по прямоугольной сетке с чередованием источников и стоков. Отображение элемента симметрии этого течения на плоскость годографа, приводящее к краевой задаче на двулистной поверхности, и краевые условия приведены в [1] (последние получаются из (2.1), если положить здесь $\theta_0=1/2\pi$ и $q+Q=0$). При этом будем предполагать, что интенсивность источника равна $2q$, тогда, например, значение функции тока в особой точке равно $q/4$.

Вспомогательные параметры задачи в плоскости годографа w^* , θ^* связаны с параметрами h и l системы расстановки скважин соотношением

$$(3.1) \quad l+ih = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \psi_I(w, 0)}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi_{II}(w, \pi/2)}{\partial \theta} \right] \frac{dw}{w^2} + \\ + \lambda \int_0^{\theta^*} \left[\frac{1}{w} \frac{\partial \psi_I(w, \varphi)}{\partial w} \right]_{w=0} e^{i\varphi} d\varphi + \lambda \int_0^{1/2\pi} \left[\frac{1}{w} \frac{\partial \psi_{II}(w, \varphi)}{\partial w} \right]_{w=0} e^{i\varphi} d\varphi$$

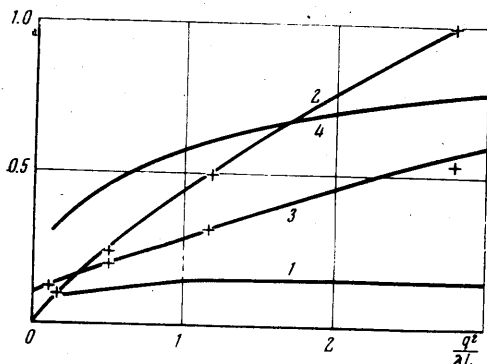
Метод решения полностью совпадает с изложенным выше. В случае $\theta^*=1/4\pi$ область вырождается в однолистную.

Так же как и в случае пары скважин, результаты расчета размеров застойных зон практически совпали с полученными ранее аналитическими методами. Соответствующие значения параметра $q/\lambda L$ приведены в последних двух столбцах таблицы.

На фиг. 2 показана сетка течения, рассчитанная для случая $\theta^*=\pi/8$, $u^*=0.1$. Здесь линии тока 1-5 соответствуют последовательно $\psi=0, 0.05, 0.1, 0.2$ и 0.25 от полного расхода источника, линии постоянного угла 6-11 отвечает $\theta=\pi/2, \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/12, 0$, линиям постоянной скорости соответствуют значения $f-u=0.0012$, $g-u=0.042$, $h-u=0.1$, $i-u=0.13$. На линиях $a-eH$ принимает постоянные значения от 0.4 до -0.4 с шагом -0.2 . Сопоставление расчетов, проведенных при различной интенсивности потока показало, что с уменьшением интенсивности резко усиливается неоднородность потока; прослеживается образование «струи», т. е. сравнительно узкой области, через которую проходит большая часть фильтрационного потока. На фиг. 3 кривыми 1 и 4 показана зависимость от интенсивности потока относительной максимальной ширины трубок тока, через которые проходит 20 и 80% расхода (для течения в квадрате), сходные зависимости имеют место и для течений в прямоугольных областях. Резкое сужение потока начинается при $q/\lambda L < 1$, что согласуется и с наблюдаемой в других задачах границей проявления нелинейных эффектов.

В рассматриваемой задаче существенный интерес представляет определение перепада напора между источником и стоком, рассматриваемыми

как скважины весьма малого (но конечного) радиуса ρ . Для приближенного расчета этой величины для течений, имеющих ось симметрии линию



Фиг. 3

тока, можно применить следующий прием. Зададимся простым распределением скоростей вдоль оси симметрии, принимающим нужное значение скорости в центре симметрии течения и имеющим «правильную» асимптотику при приближении к источнику. Тем самым в первом приближении учитывается сжатие потока из-за нелинейного закона фильтрации. (Значение скорости в центре симметрии находится в процессе определения застойных зон развитыми ранее методами [4].) Затем, интегрируя выражение закона

фильтрации вдоль оси симметрии, получаем искомое значение перепада напора. Так, для течения в квадратном элементе пятиточечной схемы для скорости на оси симметрии имеем приближенно

$$(3.2) \quad w(r) = q / \pi r + a\lambda = \sqrt{2}q / \pi L$$

где r — расстояние от ближайшего источника. В результате для перепада приведенного напора имеем

$$(3.3) \quad \Delta H = \frac{2q}{\pi} \ln \frac{L}{\rho\sqrt{2}} + (a+1)\lambda L\sqrt{2} - \frac{2q}{\pi}$$

Подсчитанная таким образом зависимость перепада напора от расхода показана в координатах $0.1\Delta H / \lambda L\sqrt{2} - q / \lambda L$ (линия 3) на фиг. 3. Там же приведена зависимость $a(q/\lambda L)$ (кривая 2). Указанный приближенный прием был проверен на основе проведенных численных расчетов, при этом распределение напора вблизи источника и стока вычислялось в предположении, что течение там носит чисто радиальный характер. Результаты (точки на фиг. 3) подтверждают применимость упрощенного метода.

4. Течение при кусочно-линейном законе фильтрации. Описанная методика численного решения задач фильтрации с предельным градиентом в плоскости годографа скорости непосредственно переносится на другие законы фильтрации; рассмотрим, в частности, течение при кусочно-линейном законе фильтрации

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Phi(w) &= bw, & 0 \leq w \leq w_1 \\ \Phi(w) &= w + \lambda, & w > w_1 = \lambda / (b-1) \end{aligned}$$

Такое исследование позволяет оценить ошибку, вносимую заменой реального закона фильтрации законом фильтрации с предельным градиентом в области весьма малых скоростей (см. также [7]).

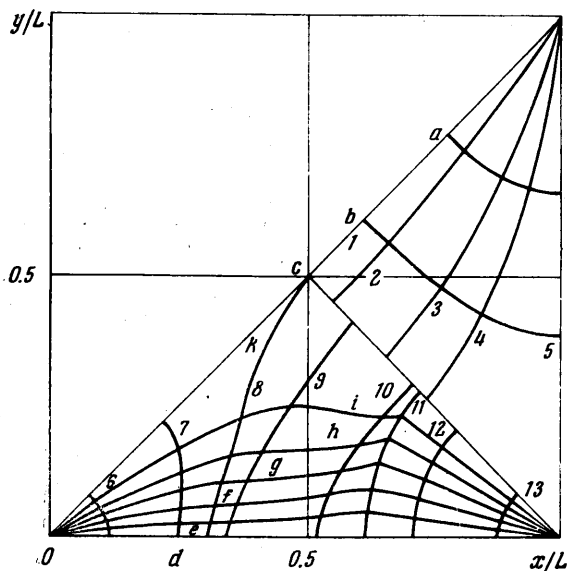
Основное уравнение (1.2) при этом распадается на два

$$(4.2) \quad \begin{aligned} w^2\psi_{ww} + w\psi_w + \psi_{\theta\theta} &= 0, & 0 \leq w < w_1 \\ w(w+\lambda)\psi_{ww} + (w-\lambda)\psi_w + \psi_{\theta\theta} &= 0, & w > w_1 \end{aligned}$$

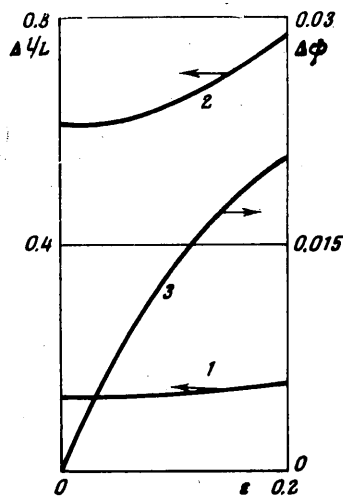
на линии перехода $w=w_1$ выполняются условия непрерывности

$$(4.3) \quad [\psi]=0, \quad [\Phi^2\psi_w / w\Phi'] = 0$$

Рассматривается течение в элементе прямоугольной сетки скважин. Основным интерес представляет случай малых значений w_1 ($w_1 \ll \lambda$). Используя тот факт, что решение задачи во внешней области плоскости годографа мало чувствительно к изменению граничных условий и вида уравнения во внутренней области ($w \ll \lambda$), граничные условия на верхней границе сеточной области ($w \gg \lambda$) можно задавать из тех же предельных решений, что и выше (п. 2). Граничные условия на «нижней» границе сеточной



Фиг. 4



Фиг. 5

области ($w \rightarrow 0$) ставятся в соответствии с асимптотикой ограниченных решений уравнения (4.2), имеющей вид

$$(4.4) \quad \psi = Cw^2 \sin 2\theta + O(w^4)$$

т. е. при $w=w_*$ ($\xi=\xi_*$) граничные условия можно ставить в виде (2.12) (с заменой θ_0 на $1/2\pi$). Использована прежняя замена независимого переменного $w = a\lambda e^{\xi}$; в расчетной области (в переменных ξ, θ) введена равномерная прямоугольная сетка, причем «линия перехода» является одной из линий сетки. В систему разностных уравнений вносятся необходимые изменения; метод решения получившейся системы алгебраических уравнений прежний. Расчеты проводились для различных значений параметра $\epsilon = 1/b$ ($u^* = 0.5$; $\theta^* = 1/4\pi$). Рассчитанная сетка течения для $\epsilon = 0.135$ приведена на фиг. 4. Здесь 1–5 — линии тока ($\psi = 0.25, 0.2, 0.1, 0.05$ и 0), линии постоянного угла $\epsilon - k$ проведены для θ от 0 до $\pi/4$ через $\pi/24$, на $a-c$ $H = -0.58, -0.23$ и 0, наконец на линиях 6–13 и принимает значения 1.61, 0.67, 0.5, 0.43, 0.208, 0.155, 0.125, 0.048. Результаты расчетов сравнивались с соответствующими результатами для закона фильтрации с предельным градиентом. Приближение, даваемое моделью фильтрации с предельным градиентом, оказалось удовлетворительным вплоть до $\epsilon = 0.1$. На фиг. 5

приведена величина относительной ширины трубок тока, через которые проходит 20 и 80% расхода (кривые 1 и 2), а также доля потока, проходящего через область, занятую при фильтрации с предельным градиентом застойной зоной, в функции от параметра ϵ (кривая 3).

Авторы признательны Л. А. Чудову за советы и обсуждения.

Поступила 23 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Енгов В. М. Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае не-однолистности отображения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
2. Ильинский Н. Б., Шешуков Е. Г. Задачи нелинейной фильтрации с неоднolistной областью годографа скоростей. Изв. вузов, Математика, 1972, № 10.
3. Ильинский Н. Б., Шешуков Е. Г. О краевых задачах нелинейной теории фильтрации. Вычислительная и прикладная математика. Межвед. научн. сб., вып. 19. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1973.
4. Енгов В. М. О парных интегральных уравнениях, возникающих в задачах фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
7. Енгов В. М., Малахова Т. А. Некоторые задачи фильтрации при кусочно-линейном законе сопротивления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.