УДК 532.582.7

ДИСПЕРСИЯ РАДИОАКТИВНОЙ ПРИМЕСИ В ПОТОКЕ В ТРУБЕ

В. И. МАРОН

(Москва)

Исследование распределения радиоактивного вещества, впрыснутого в поток в трубе или в пористой среде, позволяет выявить особенности движения жидкости [1, 2]. Описание распределения концентрации радиоактивной примеси связано с учетом явления распада. Поэтому одномерная модель продольной диффузии такой примеси отличается от модели Тейлора [3]. Это отличие проявляется не только в существовании дополнительного слагаемого, учитывающего радиоактивный распад, но и в том, что величина эффективного коэффициента продольной диффузии зависит от постоянной распада.

Выявление такой зависимости позволяет указать условия, при которых дисперсия кривой распределения порции примеси может быть уменьшена, что позволяет повысить точность измерений параметров потока.

1. Осесимметричное распределение концентрации радиоактивной примеси в ламинарном потоке в круглой трубе описывается уравнением диффузии вида

$$\frac{\partial c}{\partial t}+U\Phi(r)\frac{\partial c}{\partial x}+\beta c=D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] \tag{1.1}$$

$$c=c(t,x,r),\quad t>0,\quad 0<r<a,\quad -\infty<x<+\infty$$

Здесь c – концентрация примеси, U – средняя скорость потока, $U\Phi(r)$ – профиль скорости, D – коэффициент молекулярной диффузии, a – радиус трубы, β – постоянная распада, t – время, x и r – пространственные переменные. Ось x цилиндрической системы координат совпадает с осью трубы и направлена в сторону движения потока.

Предельные условия задачи сформулируем следующим образом:

$$c(0,x,r)=c_0(x),\qquad \left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \tag{1.2}$$

К этим условиям следует добавить соответствующие предельные условия при $x=-\infty$ и $x=+\infty$. Например, для задачи о распространении порции примеси в потоке эти условия имеют вид $c(\pm\infty)=0$.

Введем безразмерные переменные вида $\tau=Dt/a^2$, $\xi=x/a$, $\eta=r/a$ и запишем уравнение диффузии и предельные условия задачи в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}+Y\frac{\partial c}{\partial \xi}+Y(\Phi(\eta)-1)\frac{\partial c}{\partial \xi}+\Gamma c=\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial c}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \tag{1.3}$$

$$Y=\frac{aU}{D},\qquad \Gamma=\frac{\beta a^2}{D},\qquad c=c(\tau,\xi,\eta),\qquad \tau>0,\qquad 0<\eta<1$$

$$c(0,\xi,\eta)=c_0(\xi),\qquad \left.\frac{\partial c}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=\left.\frac{\partial c}{\partial \eta}\right|_{\eta=1}=0$$

Слагаемые в левой и правой частях этого уравнения умножим на 2η и проинтегрируем по η в пределах от 0 до 1. Имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}+Y\frac{\partial \theta}{\partial \xi}-2Y\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^1(\Phi(\eta)-1)(c-\theta)\eta\,d\eta+\Gamma\theta-\frac{\partial^2\theta}{\partial \xi^2}=0 \tag{1.4}$$

$$\theta=2\int_0^1 c\eta\,d\eta$$

Здесь θ – средняя по сечению трубы концентрация примеси, зависящая только от переменных ξ и τ.

Комбинируем слагаемые в правой и левой частях уравнений (1.3) и (1.4), в результате чего получаем следующее уравнение для функции $\Psi = c - \theta$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right) + \Gamma\Psi = 2Y\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^1(\Phi(\eta)-1)\Psi\eta\,d\eta - \tag{1.5}$$

$$- Y(\Phi(\eta)-1)\frac{\partial c}{\partial\xi} - Y\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}$$

2. Уравнение (1.5) решаем методом последовательных приближений подобно тому, как это описано в [4]. В качестве первого приближения принимаем $c=\theta$. Это приближение подставляем в правую часть уравнения (1.5). Имеем

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right) + \Gamma\Psi = -Y(\Phi(\eta)-1)\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \tag{2.1}$$

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\Psi(0,\xi,\eta)=0, \qquad \left.\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = \left.\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=1} = 0 \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.1) и (2.2) ищем в виде следующего ряда:

$$\Psi(\tau,\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(\tau,\xi)}{\|X_n\|^2}X_n(\eta) \tag{2.3}$$

$$u_n(\tau,\xi) = -a_nY\int_0^\tau \exp[-(\lambda_n^2+\Gamma)(\tau-s)]\frac{\partial\theta(s,\xi)}{\partial\xi}ds$$

$$a_n = \int_0^1(\Phi(\eta)-1)X_n\eta\,d\eta, \qquad \|X_n\|^2 = \int_0^1\eta X_n^2\,d\eta$$

где $X_n(\eta)$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$(\eta X_n')' + \lambda_n^2\eta X_n = 0, \qquad X_n'(0) = X_n'(1) = 0 \tag{2.4}$$

где λ_n – положительные собственные значения.

С помощью (2.3) вычисляем интегральное слагаемое в уравнении (1.4). Одномерное уравнение диффузии, которое получается при этом, имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \Gamma\theta = 2Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{\|X_n\|^2}\int_0^\tau\exp[-(\lambda_n^2+\Gamma)(\tau-s)]\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}ds + \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} \tag{2.5}$$

Используя решение задачи (2.4), нетрудно показать, что в ламинарном потоке

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2}J_0^2(\lambda_n), \qquad a_n = -\frac{4}{\lambda_n^2}J_0(\lambda_n) \tag{2.6}$$

Здесь $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода, λ_n – положительный корень уравнения $J_1(\lambda)=0$.

С учетом (2.6) уравнение (2.5) перепишем в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \Gamma\theta = 64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^\tau\exp[-(\lambda_n^2+\Gamma)(\tau-s)]\frac{\partial^2\theta(s,\xi)}{\partial\xi^2}ds + \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} \tag{2.7}$$

Нетрудно показать, что решения этого уравнения при $\tau\to\infty$ асимптотически близки к решениям следующего уравнения:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \Gamma\theta = \left(1 + 64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^6(1+\lambda_n^{-2}\Gamma)}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} \tag{2.8}$$

Коэффициент продольной диффузии в этом уравнении может быть представлен в виде

$$\frac{K}{D}=1+64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n{}^6(1+\lambda_n{}^{-2}\Gamma)}\approx 1+\frac{Y^2}{48(1+3.83^{-2}\Gamma)},\quad \lambda_1=3.83 \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что одномерная модель продольной диффузии радиоактивного вещества отличается от тейлоровской модели дисперсии пассивной примеси [3]. Это отличие проявляется не только в существовании дополнительного слагаемого, учитывающего радиоактивный распад, но и в том, что величина эффективного коэффициента диффузии через параметр $\Gamma=\beta a^2/D$ зависит от постоянной распада.

Величина параметра Г характеризует отношение двух масштабов времени: диффузионной постоянной a^2/D и времени распада $1/\beta$. Если параметр $\Gamma\ll(3.83)^2$, то коэффициент продольной диффузии совпадает с коэффициентом в тейлоровской модели дисперсии вещества. Если $\Gamma\sim(3.83)^2$, то коэффициент дисперсии в (2.9) существенно отличается от тейлоровского. Последнее обстоятельство необходимо принимать во внимание при определении дисперсии кривой распределения вещества примеси и размеров области смеси.

3. Вычислим дисперсию кривой распределения порции радиоактивной примеси, впрыснутой в поток в трубе

$$\sigma^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\xi-Y\tau)^2\theta(\tau,\xi)d\xi\Big/\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(\tau,\xi)d\xi \tag{3.1}$$

Используя уравнение (2.8), записанное в подвижной системе координат, получаем

$$\frac{d\sigma^2}{d\tau}+\Gamma\sigma^2=2\frac{K}{D} \tag{3.2}$$

Отсюда

$$\sigma^2=\frac{2K}{\Gamma D}(1-\exp(-\Gamma\tau)) \tag{3.3}$$

Закон изменения дисперсии во времени отличается от линейного, как это имеет место для нерадиоактивной примеси.

Для небольших значений комплекса $\Gamma\tau$ дисперсия равна $\sigma^2=2K\tau/D$.

По такому же закону возрастает дисперсия «пассивной» примеси. Из формулы (2.9) видно, что в случае радиоактивной примеси, когда параметр $\Gamma\sim(3.83)^2$, дисперсия кривой распределения будет существенно меньше, чем для пассивной примеси.

Поступила 8 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский Э. В.* Применение радиоактивных изотопов для контроля за разработкой нефтяных месторождений. М., «Недра», 1968.
2. *Hull D. E., Kent J. W.* Radioactive tracers to mark interfaces and measure intermixing in pipelines. Ind. Engng. Chem., 1955, vol. 44, p. 2745.
3. *Taylor G.* Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1953, vol. 219, No. 1137.
4. *Марон В. И.* Распространение примеси в ламинарном потоке в круглой трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.

УДК 533.6.011.55

ОБТЕКАНИЕ ОСТРЫХ И ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С ВОГНУТОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

С. Л. ВИШНЕВЕЦКИЙ, З. С. ПАХОМОВА

(Москва)

В статье в отличие от работ [1–4] рассматривается обтекание класса тел сложной формы (фиг. 1), образующая которых состоит из трех участков: прямолинейного Oa_1, вогнутого a_1b_1 и второго прямолинейного b_1c_1 (острые тела) – или четырех участков, когда тело описанной формы имеет впереди сферическое затупление радиуса r.