где Δd – дифференциал диаметра. Суммарная концентрация на входе в межтарелочный зазор в этом случае равна

$$C_0[d_{\min}, d_{\max}] = \int\limits_{d_{\min}}^{d_{\max}} f(d)\Delta d = \varphi(d) \tag{7}$$

Суммарная концентрация на выходе из межтарелочного зазора в соответствии с (6)

$$C[d_{\min}, d_{\max}] = \int\limits_{d_{\min}}^{d_{\max}} [1-P(R^3-r_0^3)]f(d)\Delta d = \psi(d) \tag{8}$$

Относительная концентрация

$$C/C_0 = \psi(d)/\varphi(d) \tag{9}$$

Можно показать, что (9) приводится к виду

$$C = C_0\{\alpha - \beta M(\xi) - \varepsilon[D(\xi) + M^2(\xi)]\} \tag{10}$$

$$\alpha = 1 - a(R^3 - r_0^3)d_0^2, \qquad \beta = 2ad_0(d_{\max} - d_{\min})(R^3 - r_0^3),$$

$$\varepsilon = a(d_{\max} - d_{\min})^2(R^3 - r_0^3), \qquad d_0 = (d_{\max} + d_{\min})/2$$

Здесь $M(\xi)$ и $D(\xi)$ – математическое ожидание и дисперсия закона распределения соответственно, a – постоянный коэффициент.

Поступила 19 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бремер Г. И.* Жидкостные сепараторы. М., Машгиз, 1957.
2. *Гольдин Е. М.* Движение однородного потока между тарелками сепаратора. Молочная пром-сть, 1956, № 12.

УДК 532.546

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ БЕЗ УЧЕТА КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Г. П. ЦЫБУЛЬСКИЙ

(Краснодар)

Первые предложения по описанию плоских двухфазных потоков [1, 2] содержали приближенные методы, основанные на использовании решений одномерных задач [3–5]. Строгое обоснование постановки плоских задач и их исследования аналитическими методами до сих пор не даны, хотя отдельные аспекты и затрагивались, например в [1, 6].

В данной работе приводится систематическое изложение плоской задачи Бакли – Леверетта о двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей. С помощью метода характеристик исследуется система уравнений, описывающая рассматриваемый процесс, дается обоснование необходимых начальных и граничных условий при постановке краевых задач, строится общее решение для функции насыщенности. Приводятся условия сопряжения на возможных линиях разрыва – скачках насыщенности. Более подробно рассмотрен случай закачки воды через совершенную нагнетательную скважину в нефтеносный пласт, содержащий связанную воду. Показывается, что в этом случае фронтовая насыщенность удовлетворяет соотношению Бакли – Леверетта, полученному ранее для одномерных потоков.

1. Пусть $\mathbf{V}_j$ – скорость фильтрации j-й фазы, $k=k(x, y)$, $m=m(x, y)$, $H=H(x, y)$ – абсолютная проницаемость, пористость и мощность пласта, $k_j(s)$ и μ_j – относительная фазовая проницаемость и динамическая вязкость j-й фазы, p – давление, s – насы-

щенность порового пространства первой фазой

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2,\qquad f_0(s)=k_1(s)\mu_1^{-1}+k_2(s)\mu_2^{-1}$$
$$F(s)=k_1(s)[k_1(s)+\mu k_2(s)]^{-1},\qquad \mu=\mu_1\mu_2^{-1}$$
$$\Phi(s)=f_0(s)F_s'(s)$$

Из системы уравнений неразрывности и обобщенного закона Дарси

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_1+mHs_t=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{V}_2-mHs_t=0,\qquad \mathbf{V}_j=-kHk_j(s)\mu_j^{-1}\operatorname{grad}p,\quad j=1,2$$

можно получить

$$p_{xx}+p_{yy}+(\ln f_0)_s'(p_xs_x+p_ys_y)=-(p_x(\ln kH)_x'+p_y(\ln kH)_y'),\tag{1.1}$$
$$\Phi(s)(p_xs_x+p_ys_y)-mk^{-1}s_t=0$$

Общий контур Γ, ограничивающий область фильтрации $D(x, y)$, может быть представлен как сумма $\Gamma=\Gamma_i+\Gamma_l+\Gamma_n$, где Γ_i – совокупность контуров, через которые жидкость поступает в пласт, Γ_l – совокупность контуров, через которые жидкость отбирается из пласта, Γ_n – совокупность непроницаемых контуров.

Характеристическое уравнение системы (1.1) в целом и два семейства характеристик, определяются соответственно уравнениями [7]

$$(\eta_x^2+\eta_y^2)\left(\Phi u\eta_x+\Phi v\eta_y-\frac{m}{k}\eta_t\right)=0\tag{1.2}$$

$$\eta_x^2+\eta_y^2=0,\qquad \Phi u\eta_x+\Phi v\eta_y-\frac{m}{k}\eta_t=0,\qquad u=\frac{\partial p}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Те же самые характеристические уравнения можно получить из рассмотрения каждого из уравнений системы (1.1), если принять, что в первом из них искомой функцией является p, а во втором – s. Следовательно, граничные условия для давления могут быть представлены, как для эллиптического уравнения, в виде

$$\Gamma_i(x,y)=0:\quad \psi_i(p,\partial p/\partial n,x,y,t)=0\tag{1.3}$$
$$\Gamma_l(x,y)=0:\quad \psi_l(p,\partial p/\partial n,x,y,t)=0,$$
$$\Gamma_n(x,y)=0:\quad \partial p/\partial n=0$$

где ψ_i, ψ_l – заданные функции своих аргументов.

2. Из (1.2) следует, что второе уравнение системы (1.1) относительно s гиперболическое. Построим решение последнего методом характеристик. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, ее частные интегралы и общее решение имеют вид

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{k}{m}\Phi u,\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{k}{m}\Phi v,\qquad \frac{ds}{dt}=0\tag{2.1}$$

$$x+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}u\,d\tau=C_1,\qquad y+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}v\,d\tau=C_2,\qquad s=C_3$$

$$\psi(C_1,C_2,C_3)=\psi\left(x+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}u\,d\tau,\ y+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}v\,d\tau,\ s\right)=0$$

Вид функциональной зависимости ψ от своих аргументов устанавливается по начальным данным Коши. Следуя [8], решения системы (2.1) будем называть движениями, описывающими перемещение точки с постоянной насыщенностью. Очевидно, что все движения начинаются на поверхности начального распределения насыщенности и на контурах закачки Γ_i. Поэтому в качестве начальных данных Коши следует принять начальное условие

$$t=t_0:\quad \varphi_0(s,x,y)=0,\qquad (x,y)\subset D^*=D-\Gamma_i\tag{2.2}$$

и граничные условия на контурах Γ_i

$$\Gamma_i(x,y)=0:\quad \varphi_i(s,x,y,t)=0,\qquad t\geqslant t_0\tag{2.3}$$

3. Соответственно наличию в начальных данных Коши двух условий общее решение (2.1) будет состоять также из двух частей.

Одна из частей будет описывать движения, начинающиеся на поверхности $\varphi_0(s, x, y)=0$, и будет иметь вид

$$\varphi_0\left(s,\ x+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}u\,d\tau,\ y+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}v\,d\tau\right)=0 \tag{3.1}$$

Другая часть будет описывать движения, начинающиеся на контурах $\Gamma_i(x, y)=0$, и будет иметь вид

$$\Gamma_i\left(x+\Phi\int_{t_i}^{t}\frac{k}{m}u\,d\tau,\ y+\Phi\int_{t_i}^{t}\frac{k}{m}v\,d\tau\right)=0 \tag{3.2}$$

Здесь $t_i=t_i(x, y, s)$ берутся согласно условию (2.3).

4. Введем для обеих частей общего решения (3.1) и (3.2) единое обозначение $\varphi(x, y, t, s)=0$.

При $s=C=\mathrm{const}$ $(0\leqslant C\leqslant 1)$ уравнение $\varphi(x, y, t, C)\equiv\varphi_C(x, y, t)=0$ определяет в плоскости xy закон перемещения контуров постоянной насыщенности – изосат, которые обозначим Γ_s. Воспользуемся выражением для нормальных скоростей перемещения изосат V_{ns} в форме

$$V_{ns}=-\frac{k}{m}\Phi(s)\frac{\partial p}{\partial n_s} \tag{4.1}$$

где n_s – нормаль к изосате Γ_s.

Реальные зависимости $k_1(s)$, $k_2(s)$ таковы, что $\Phi(s)$, а следовательно, и V_{ns} являются немонотонными функциями s. Вследствие этого изосаты с бо́льшим значением $\Phi(s)$ будут опережать изосаты с меньшим значением $\Phi(s)$. Может произойти касание, а затем и пересечение различных изосат. Тогда решение второго уравнения системы (1.1) становится неоднозначным, что не имеет физического смысла. Для устранения неоднозначности решений следует допустить возможность возникновения линий, вдоль которых насыщенность изменяется скачкообразно.

За момент возникновения скачка t_C принимается наименьшее значение t, при котором происходит касание контуров Γ_s, соответствующих различным s. В точке касания должно выполняться условие $\partial\varphi/\partial s=0$, которое с учетом (2.1) для решений (3.1) и (3.2) принимает соответственно вид

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}+\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial C_1}\int_{t_0}^{t_C}\frac{k}{m}u\,d\tau+\frac{\partial\varphi_0}{\partial C_2}\int_{t_0}^{t_C}\frac{k}{m}v\,d\tau\right)\Phi_s'=0$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma_i}{\partial C_{1i}}\int_{t_i}^{t_C}\frac{k}{m}u\,d\tau+\frac{\partial\Gamma_i}{\partial C_{2i}}\int_{t_i}^{t_C}\frac{k}{m}v\,d\tau\right)\Phi_s'-\frac{k}{m}\Phi\frac{\partial t_i}{\partial s}\left(u\frac{\partial\Gamma_i}{\partial C_{1i}}+v\frac{\partial\Gamma_i}{\partial C_{2i}}\right)=0$$

$$C_{1i}=x+\Phi\int_{t_i}^{t}\frac{k}{m}u\,d\tau,\qquad C_{2i}=y+\Phi\int_{t_i}^{t}\frac{k}{m}v\,d\tau$$

5. Каждый скачок характеризуется своим законом перемещения $\Gamma_C(x_C, y_C, t)=0$ и предельными значениями насыщенности $s_C^+(x_C, y_C, t)$ и $s_C^-(x_C, y_C, t)$, которые определяются из условий сопряжения, выражающих непрерывность давления, неразрывность общего потока жидкостей и неразрывность индивидуального потока первой жидкости

$$p^+(x_C, y_C, t)=p^-(x_C, y_C, t),\qquad \left(f_0\frac{\partial p}{\partial n_C}\right)_+=\left(f_0\frac{\partial p}{\partial n_C}\right)_- \tag{5.1}$$

$$V_{nC}=\frac{V_{n1}^+-V_{n1}^-}{m(s_C^+-s_C^-)},\qquad V_{nC}=-\frac{\partial\Gamma_C}{\partial t}\left(\frac{\partial\Gamma_C}{\partial n_C}\right)^{-1},\qquad V_{n1}=-kk_1(s)\mu_1^{-1}\frac{\partial p}{\partial n_C}$$

Здесь V_{nC} – нормальная скорость перемещения скачка, V_{n1} – поток первой жидкости по направлению нормали к скачку.

Кроме того, из условия пересечения изосат Γ_s, соответствующих предельным значениям насыщенности на скачке, с контуром Γ_C следует, что величины s^+, s^-, x_C и y_C в каждый момент времени $t>t_C$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\varphi(x_C, y_C, t, s_C^+)=0, \quad \varphi(x_C, y_C, t, s_C^-)=0, \quad \Gamma_C(x_C, y_C, t)=0. \tag{5.2}$$

6. При закачке воды ($i=1$) через контур Γ_1 в нефтяной пласт, содержащий связанную воду с насыщенностью $s_{01}=\mathrm{const}$, начальное и граничное условия по насыщенности будут иметь вид

$$t=t_0:\ s=s_{01},\ k_1(s_{01})=0,\ (x, y)\subset D$$
$$\Gamma_i(x, y)=0:\ s=s_{02},\ k_2(s_{02})=0,\ t\geqslant t_0$$

Граничные условия (1.3) остаются без изменений.

Скачок насыщенности в данном случае образуется с момента начала закачки, т. е. $t_C=t_0$. Общее решение будет иметь вид

$$\Gamma_i\left(x+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}u\,d\tau,\ y+\Phi\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}v\,d\tau\right)=0 \tag{6.1}$$

Первое условие сопряжения в (5.1) остается неизменным; другие условия принимают более простой вид

$$\left(f_0\frac{\partial p}{\partial n_C}\right)_-=k_2(s_{01})\mu_2^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial n_C}\right)_+, \quad V_{nC}=-\frac{k}{m}k_1(s_C^-)\mu_1^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial n_C}\right)(s_C^- - s_{01})^{-1} \tag{6.2}$$

а условие (5.2) вырождается и заменяется условием $s_C^+=s_{01}$.

Согласно (6.1) все изосаты Γ_s в начальный момент совпадают с контуром $\Gamma_i(x, y)=0$ и имеют начальные нормальные скорости перемещения, совпадающие по направлению, но различающиеся по величине соответственно значению множителя $\Phi(s)$.

Точки контура Γ_C также совпадают при $t=t_0$ с Γ_i и имеют те же направления нормальных скоростей. Величина V_{nC} в каждой точке совпадает с нормальной скоростью перемещения $V_{ns}(s_C^-)$ изосаты, соответствующей некоторому значению насыщенности $s=s_C^-$. С учетом этого, используя (4.1) и (6.2), после преобразований получим

$$k_1(s_C^-)\mu_1^{-1}(s_C^- - s_{01})^{-1}=\Phi(s_C^-) \tag{6.3}$$

Таким образом, величина s_C^- не зависит ни от формы контура Γ_i, ни от поля скоростей, и контур Γ_C формируется как изосата с насыщенностью s_C^-, определяемой из (6.3). Поскольку условие $V_{nC}=V_{ns}(s_C^-)$ сохраняется и в последующие моменты времени $t>t_0$, остается справедливым также и (6.3). Применительно к одномерным потокам это соотношение хорошо известно [3].

Поступила 17 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эфрос Д. А.* Движение водо-нефтяной смеси в системе скважин. Тр. Всес. нефтегаз. научн.-исслед. ин-та, 1958, вып. 12.
2. *Kern L. R.* Displacement mechanism in multi-well systems. J. Petrol. Technol., 1952, vol. 4, No. 2.
3. *Buckley S. E., Leverett M. C.* Mechanism of fluid displacement in sands. Petrol. Trans., AIME, 1942, vol. 146.
4. *Пирвердян А. М.* Движение двухфазной несжимаемой смеси в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
5. *Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджанянц В. Г., Рыжик В. М.* Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М., Гостоптехиздат, 1962.
6. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
8. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., Изд-во ЛГУ, 1955.