

4. Geurst J. A. Some investigations of a linearized theory for unsteady cavity flows. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1960, vol. 5, No. 4.
5. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.
6. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М., Изд-во АН СССР, 1947.
7. Ефремов И. И., Роман В. М. Расчет суперкавитационного обтекания тонких профилей вблизи границы раздела. ПМТФ, 1969, № 3.
8. Parkin B. R. Numerical data on hydrofoil response to nonsteady motions at zero cavitation number. J. Ship Res., 1962, vol. 6, No. 3.

УДК 532.529.6

О ВСПЛЫВАНИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Л. А. ЭПШТЕЙН

(Москва)

В различных областях техники приходится сталкиваться с так называемым снарядным режимом движения газожидкостной смеси по вертикальным трубам. Этот режим, часто встречающийся при работе эрлифтов, некоторых типов теплообменников и других устройств, характеризуется периодическим следованием газовых пузырей в форме «снаряда», отделенных друг от друга жидкими пробками.

Одной из основополагающих работ при исследовании таких течений является работа [1], выполненная еще в 1943 г. под руководством Л. Прандтля, в которой определяется скорость подъема одиночного пузыря относительно неподвижной идеальной тяжелой жидкости, заполняющей вертикальную круглую трубу. В дальнейшем этот вопрос аналогичными методами изучался в [2]. Полученные сведения использовались в ряде более поздних работ [3, 4]. Количественные результаты работы [1] подтверждены экспериментально в самой работе и во многих последующих исследованиях, но методологическая сторона полученного в [1] теоретического решения (не вызывавшая до сих пор каких-либо возражений), заслуживает того, чтобы на ней остановиться.

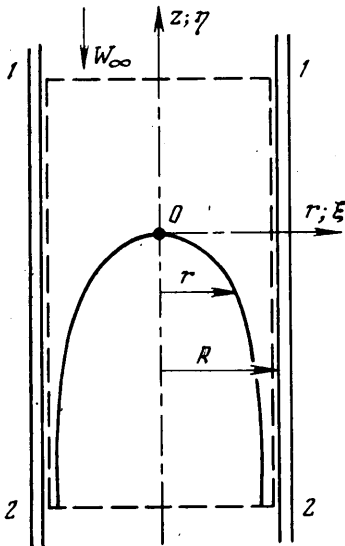
В [1] решение уравнения Лапласа ищется в виде суммы ряда, составленного из произведений бесселевых функций от аргумента $\xi = r/R$ на экспоненту от $\eta = z/R$ (см. фиг. 1); и неопределенные коэффициенты этого ряда подбираются в целях удовлетворения граничного условия постоянства давления на неизвестной априори поверхности пузыря. В связи с рядом трудностей решения в такой постановке делаются дополнительные допущения о том, что пузырь состоит из головного сферического участка с безразмерным радиусом a и нижнего участка, контур которого определяется уравнением неразрывности и предположением о постоянстве скоростей по сечению потока, перпендикулярным оси трубы. После ряда сложных выкладок, усечения бесконечных систем уравнений и приближенных численных расчетов находится радиус сферического головного участка и скорость всплытия пузыря.

Покажем, что все полученные в [1] результаты при сделанных допущениях могут быть найдены строго и предельно просто без привлечения использованного там математического аппарата.

В самом деле, согласно допущениям очерченный по окружности радиуса a контур верхней (головной) части пузыря имеет вид

$$(1) \quad \eta_b = a \sqrt{1 - (\xi/a)^2} - 1 = \eta_b(a, \xi)$$

Уравнение неразрывности (см. фиг. 1) $\pi \omega_\infty R^2 = \pi(R^2 - r^2)w(z)$ в сочетании с уравнением Бернулли $w^2 = -2gz$ дает уравнение контура нижнего участка пузыря



Фиг. 1

в виде

$$(2) \quad \eta_H = -\frac{\lambda^2}{2(1-\xi^2)^2} = \eta_H(\lambda, \xi), \quad \lambda = \frac{W_\infty}{\sqrt{\gamma g R}}$$

Здесь λ — безразмерная скорость подъема пузыря (в обращенном движении число Фруда набегающего потока).

Введем физическое обоснованное требование о том, чтобы в точке срачивания контуры η_b и η_H имели общую кривизну. Очевидно, что кривизна действительного контура меняется вдоль него непрерывно и точка срачивания не является особой. Обозначая неизвестную пока абсциссу точки срачивания через ξ_c и учитывая, что при общности координат и касательных одинаковость радиусов кривизны эквивалентна равенству вторых производных, имеем в точке срачивания три уравнения

$$(3) \quad \eta_H(\lambda, \xi_c) = \eta_b(a, \xi_c), \quad \eta_H'(\lambda, \xi_c) = \eta_b'(a, \xi_c), \quad \eta_H''(\lambda, \xi_c) = \eta_b''(a, \xi_c)$$

Штрихом обозначены производные по ξ . Используя выражения (1), (2) и решая простую систему (3), находим a , ξ_c и λ . Ниже приведено сопоставление этих величин (верхняя строка) с результатами расчетов [1] (нижняя строка).

$$\begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \approx -0.447 & \frac{8}{15} \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0.504 \\ 0.75 & -0.5 & 0.496 \end{array}$$

Внешняя «строгость» решения [1] является кажущейся, ибо погрешности, обусловленные допущениями, определяющими приближенную форму пузыря, нарушают выполнение граничных условий, записанных с помощью формально строгого аппарата гидромеханики, и делают этот аппарат источником дополнительных ошибок, связанных с трудностями вычислительного характера.

Вопрос о всплывании пузыря целесообразно рассмотреть, используя общемеханические законы (количества движения или энергии). Это позволит уточнить представления об истинной форме головной части. Применяя закон количества движения и выбирая контрольную поверхность, как показано пунктиром на фиг. 1, где поперечные сечения удалены настолько, что изменениям скоростей по сечению можно пренебречь, получим

$$(4) \quad \rho w_1^2 S_1 - \rho w_2^2 S_2 + (p_1 - p_2) S_1 = -\gamma S_1 (z_1 - z_2) + \gamma V$$

Здесь V — объем пузыря над сечением 2-2, S_1 , S_2 — площади сечений. Используя уравнение Бернулли и неразрывности и переходя к безразмерной форме, получим из (4)

$$(5) \quad (\sqrt{1-2\eta_2} - \lambda)^2 = 2\eta_*, \quad \eta_* = V/S_1 R$$

Поскольку контур верхней и нижней части пузыря определен (1) и (2), легко вычислить

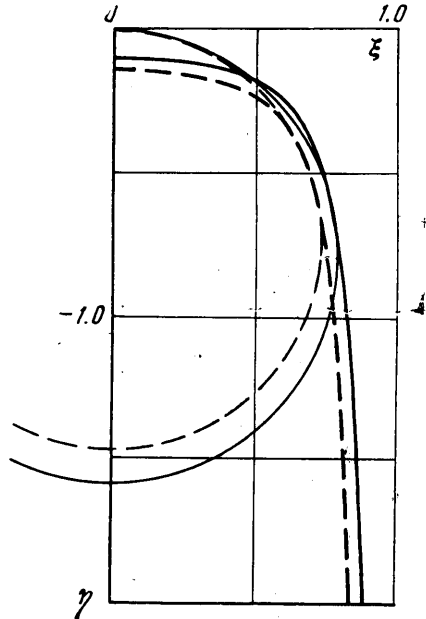
$$(6) \quad \eta_* = \int_{\eta_2}^{\eta_c} \xi^2 d\eta_H + \int_{\eta_c}^0 \xi^2 d\eta_b$$

После простых выкладок находим

$$(7) \quad 2\eta_* = (\sqrt{1-2\eta_2} - \lambda)^2 - (\sqrt{1-2\eta_c} - \lambda)^2 + 2 \left(a\eta_c^2 - \frac{\eta_c^3}{3} \right)$$

Последний член формулы (7) обусловлен верхней частью пузыря. Подставляя (7) в (5), находим, что для удовлетворения закона количества движения необходимо, чтобы

$$(8) \quad 2 \left(a\eta_c^2 - \frac{\eta_c^3}{3} \right) - (\sqrt{1-2\eta_c} - \lambda)^2 = 0$$



Фиг. 2

Интересно, что если бы пузырь имел форму, целиком определяющуюся контуром (2), то в формуле (8) первый член отсутствовал бы, а величина $\eta_c = (-1/2\lambda^2)$ соответствовала бы верхушке этого фиктивного пузыря. Легко видеть, что при этом (8) автоматически выполняется при любом λ . Отсюда следует, что объем действительного пузыря должен быть равновеликим с объемом фиктивного, построенного целиком согласно (2). Можно получить все величины η_c , a , λ из условия удовлетворения (8) и общности координат и касательных в точке срачивания. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные результаты

$$\eta_c^2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{16}, \quad a = -\frac{1 + 5\eta_c^2}{6\eta_c}, \quad \lambda^2 = -\frac{8}{9}\eta_c(1 - \eta_c^2)^2$$

Следует отметить, что контур и параметры, полученные в [1], не соответствуют величинам, при которых удовлетворяется закон количества движения.

На фиг. 2 представлены контуры головной части пузыря с учетом (кривая 1) и без учета (кривая 2) выполнения равенства (8).

Поступила 20 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dumitrescu D. T.* Strömung an einer Luftblase in senkrechten Rohr. ZAMM, 1943, Bd 23, Nr 3.
2. *Davies R. M., Taylor G.* The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1950, vol. 200, No. 1062.
3. *Гриффит П., Уоллис Г. Б.* Двухфазное снарядное течение. Тр. Америк. об-ва инж.-мех. Сер. С, Теплопередача, 1961, т. 83, № 3.
4. *Мойссис Р., Гриффит П.* Влияние входных условий на снарядный режим течения двухфазной смеси. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Сер. С, Теплопередача, 1962, т. 84, № 1.

УДК 532.539

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ПОТОКА В МЕЖТАРЕЛОЧНОМ ЗАЗОРЕ СЕПАРАТОРА

Л. С. СКВОРЦОВ

(Москва)

Рассматривается осаждение тяжелых твердых частиц в коническом межтарелочном зазоре центробежного сепаратора. Для расчета остаточной концентрации на выходе из межтарелочного зазора используется уравнение сохранения массы для твердого компонента. Получены формулы для расчета остаточной концентрации для случаев осаждения монодисперсной и полидисперсной фракций твердого компонента с известным начальным распределением концентрации.

В отличие от предшествовавших исследований [1], где определялось время осаждения одной твердой частицы, рассмотрим осаждение группы частиц, входящих в межтарелочное пространство с начальной концентрацией C_0 . Тогда, имея решение для остаточной концентрации, его можно использовать в случае осаждения частиц с произвольным распределением концентрации на входе.

Схема одного межтарелочного зазора и принятая система координат показана на фигуре.

Предполагается, что вследствие малости межтарелочного зазора движение жидкости в направлении, перпендикулярном плоскости тарелок, отсутствует, течение в канале осесимметричное и установившееся. Объемная концентрация твердых частиц в потоке мала и существенно не сказывается на физических свойствах несущего потока. Вследствие предполагаемой малости начального участка принимается, что скорость потока в направлении образующей тарелок на всем участке определяется согласно (2) выражением

$$(1) \quad U_i = 3q\gamma(1 - \gamma) / \pi b r$$