

УДК 532.528

## КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ПРОФИЛЯ

И. И. ЕФРЕМОВ, В. Н. СЕМЕНЕНКО

(Киев)

Наиболее изученным классом нестационарных кавитационных течений являются плоские течения с кавернами бесконечной длины (струйные течения). Здесь решено большое количество линейных задач и развит строгий подход, базирующийся на понятии нестационарного возмущения нелинейного решения [1]. Линейная задача об обтекании колеблющегося профиля с конечной каверной рассматривалась в [2-4], однако остался открытым вопрос о выборе подходящего условия для определения длины каверны. В настоящей работе в качестве такого условия использовано условие разрешимости внешней краевой задачи Неймана для потенциала скоростей. Задача сведена к системе интегральных уравнений, которая решается численно методом дискретных особенностей.

1. Рассмотрим обтекание тонкого слабоизогнутого профиля потенциальным потоком невесомой несжимаемой жидкости со скоростью и давлением на бесконечности  $U$  и  $P$ . Каверна покрывает засасывающую сторону профиля и срывается с задней кромки. Свяжем с профилем прямоугольную систему координат с центром в передней кромке и направлением оси  $Ox$ , совпадающим с направлением невозмущенного потока. Профиль колеблется и деформируется около среднего положения, так что ординаты его смоченной части  $y=f(x, t)\epsilon c^2$   $[0, 1]$  и границ каверны  $y=F(x, t)\epsilon c^2$   $[0, l]$  удовлетворяют условиям

$$\|f\| = \epsilon \ll 1, \quad \|f_t\| \sim \|F\| \sim \|F_t\| \sim O(\epsilon).$$

Длиной каверны  $l$  будем считать среднюю за период колебаний длину отрезка оси  $Ox$ , в пределах которого давление в каверне в каждый момент времени постоянно. Выберем в качестве масштабов длины и скорости хорду  $b$  профиля и  $U$  и рассмотрим задачу для безразмерных нестационарных возмущений. Введем потенциал ускорений  $\theta$ , связанный с возмущенными давлением и потенциалом скоростей соотношениями

$$(1.1) \quad \theta(x, y, t) = -p'(x, y, t)/\rho U^2, \quad \theta = N\varphi', \quad N = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$$

где  $\rho$  — плотность жидкости. Потенциал ускорений является гармонической функцией в области течения, на ее границах и в бесконечности должны выполняться следующие условия:

$$(1.2) \quad \theta_y = N^2 f \quad (0 \leq x \leq 1, y \rightarrow -0)$$

$$(1.3) \quad \theta_y = N^2 F \quad (0 \leq x \leq l, y \rightarrow +0)$$

$$(1.4) \quad \theta = \frac{1}{2} \sigma' \quad (1 \leq x \leq l, y \rightarrow -0)$$

$$(1.5) \quad \theta \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

где  $\sigma'(t) = -2p_k'(t)/\rho U^2$  — нестационарное возмущение числа кавитации. Использована потенциала ускорений удобно тем, что он непрерывен вместе с производными в вихревом следе, образующемся за профилем при нестационарном движении. Однако во избежание потери части решения из-за дифференциальной связи (1.1) на профиле кроме условия (1.2) должно выполняться кинематическое условие для нормальной скорости

$$(1.6) \quad \varphi_y = N^{-1}\theta_y = Nf, \quad N^{-1}\Phi = \int_{-\infty}^x \Phi(x, y, t-x+s) ds$$

2. Краевые условия (1.2)–(1.4) показывают, что потенциал ускорений терпит разрыв при переходе через проекцию профиля, а его нормальная производная — при переходе через проекцию каверны на ось  $Ox$ . Обозначив через  $[\theta]$ ,  $[\theta_y]$  скачки соответствующих величин, запишем решение задачи в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя

$$(2.1) \quad \theta(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 [\theta](s, t) \frac{y ds}{(x-s)^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^l [\theta_y](s, t) \ln \sqrt{(x-s)^2 + y^2} ds.$$

Легко видеть, что  $[\theta] = \gamma(x, t)$ ,  $[\theta_y] = Nq(x, t)$ , где  $\gamma$ ,  $q$  — интенсивности распределенных по отрезкам оси  $Ox$  вихрей и источников-стоков. В точках оси потенциал ускорений и нормальное ускорение принимают следующие значения:

$$(2.2) \quad \theta(x, \pm 0, t) = \pm \frac{1}{2} \gamma(x, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t Nq(s, t) \ln|x-s| ds$$

$$(2.3) \quad \theta_y(x, \pm 0, t) = \pm \frac{1}{2} Nq(x, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(s, t) \frac{ds}{(x-s)^2}$$

Особый интеграл в (2.3) следует понимать в смысле конечного значения по Манглеру [5]

$$\int_a^b \frac{\Phi(s) ds}{(x-s)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\Phi(s) ds}{(x-s)^2} + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\Phi(s) ds}{(x-s)^2} - \frac{2\Phi(x)}{\varepsilon} \right]$$

Действуя на (2.3) оператором  $N^{-1}$  и подставляя затем полученное выражение для  $\Phi_y(x, \pm 0, t)$  и (2.2) соответственно в краевые условия (1.6), (1.4), после несложных преобразований получим систему двух интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных интенсивностей  $\gamma$  и  $q$

$$(2.4) \quad q(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[ \frac{\gamma(s, t)}{x-s} - \int_s^\infty \gamma_t(s, t-\xi+s) \frac{d\xi}{x-\xi} \right] ds = -2Nf(x, t)$$

$$(2.5) \quad \gamma(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_0^l \left[ \frac{q(s, t)}{x-s} + q_t(s, t) \ln|x-s| \right] ds = \sigma'(t)$$

Система (2.4), (2.5) не замкнута, так как число кавитации и длина каверны являются зависимыми параметрами. В качестве замыкающего уравнения воспользуемся условием разрешимости внешней краевой задачи Неймана для потенциала скоростей, обеспечивающим одновременно ограниченность решения (2.1) на бесконечности

$$(2.6) \quad \int_0^l [\varphi_y](s, t) ds = \int_0^l q(s, t) ds = 0$$

Заметим, что другим путем систему (2.4)–(2.6) можно получить, формулируя краевую задачу для потенциала скоростей и пользуясь физической картиной образования вихревого следа Бирнбаума – Кюсснера [6]. Она справедлива для случаев как полной ( $l > 1$ ), так и частичной кавитации профиля ( $l < 1$ ).

3. Рассмотрим случай гармонических колебаний профиля. Величины, зависящие от времени, представим в виде  $f(x, t) = f^*(x) e^{ikt}$ ,  $\theta(x, y, t) = \theta^*(x, y) e^{ikt}$  и т. д. Здесь  $k = \omega b/U$  — число Струхаля,  $\omega$  — частота колебаний,  $i = \sqrt{-1}$ . Система уравнений для комплексных амплитуд  $\gamma^* = \gamma_1 + i\gamma_2$ ,  $q^* = q_1 + iq_2$ ,  $\sigma^* = \sigma_1 + i\sigma_2$  принимает вид

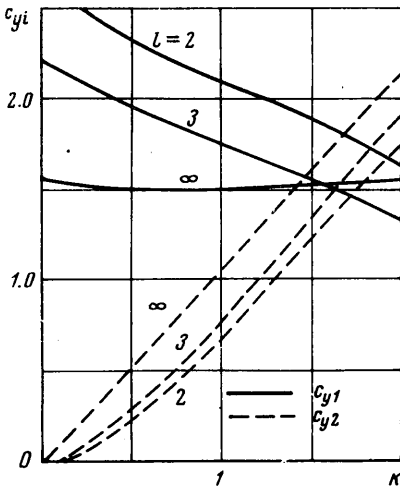
$$(3.1) \quad q^*(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \gamma^*(s) \left[ \frac{1}{x-s} - ike^{ih(s-x)} L(x-s) \right] ds = \\ = -2 \left( ik + \frac{d}{dx} \right) f^*(x), \quad 0 < x < 1$$

$$(3.2) \quad \gamma^*(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^l q^*(s) \left( \frac{1}{x-s} + ik \ln|x-s| \right) ds - \sigma^* = 0, \quad 0 < x < l$$

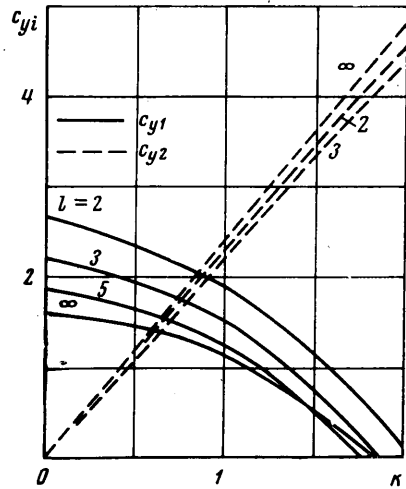
$$(3.3) \quad \int_0^l q^*(s) ds = 0$$

$$L(x-s) = \begin{cases} ci(k|x-s|) + i[si(k|x-s|) + \pi], & x > s \\ ci(k|x-s|) - isi(k|x-s|), & x < s \end{cases}$$

Искомые функции имеют на концах отрезков интегрирования особенности того же порядка, что и в стационарном случае:  $\gamma^* \sim q^* \sim x^{-1/4}$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $q^* \sim (l-x)^{-1/2}$  при  $x \rightarrow l$ . Для численного решения системы интегральных уравнений (3.1)–(3.3) был использован метод дискретных особенностей, изложенный применительно к кавитационным течениям в [7]. Метод состоит в аппроксимации интегральных уравнений системой алгебраических путем замены непрерывного распределения особенностей по оси  $Ox$  дискретным и применения квадратурных формул. Порядок расположения



Фиг. 1



Фиг. 2

особенностей и точек, в которых удовлетворяются граничные условия, определяется классом функций, в которых ищется решение, а также требованием наилучшей сходимости метода. Коэффициенты нестационарных гидродинамических сил, действующих на профиль, определяются по формулам:

$$c_y = \text{Re} \{c_y^* e^{ikt}\}, \quad c_m = \text{Re} \{c_m^* e^{ikt}\}$$

$$c_y^* = c_{y1} + ic_{y2} = 2 \int_0^1 \gamma^*(s) ds, \quad c_m^* = c_{m1} + ic_{m2} = 2 \int_0^1 \gamma^*(s) s ds$$

На фиг. 1 и 2 приведены примеры зависимости комплексной амплитуды коэффициента нестационарной подъемной силы  $c_y^*$  от числа Струхала для профиля с кавернами различной длины. Фиг. 1 соответствует случаю чисто изгибных колебаний, при этом  $f^* = h$ ,  $c_{y1} + ic_{y2} = c_y^* / ikh$ , фиг. 2 – случаю крутильных колебаний, при этом  $f^* = -\alpha x$ ,  $c_{y1} + ic_{y2} = c_y^* / \alpha$ .

Знаком  $\infty$  отмечены кривые аналогичных зависимостей в случае обтекания с бесконечной каверной [8]. Контроль точности расчетов осуществлялся путем сравнения результатов, полученных при различном числе особенностей, моделирующих профиль и каверну.

Предложенный метод легко распространяется на случай учета влияния границ потока и соседних профилей, что приводит к появлению регулярных слагаемых в ядрах сингулярных интегральных уравнений (3.1), (3.2) и не вносит существенных трудностей для расчета.

Поступила 25 VI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. В. Малые колебания контура, обтекаемого с отрывом струй. В сб. «Современные вопросы гидродинамики». Киев, «Наукова думка», 1967.
2. Wu. T. Y. A linearized theory for nonsteady cavity flows. California Inst. Techn. Rept No. 85-6, Pasadena, 1957.
3. Timman R. A general linearized theory for cavitating hydrofoils in nonsteady flow. Proc. Second Sympos. on Naval Hydrodynam., Washington D. C., 1958.

4. Geurst J. A. Some investigations of a linearized theory for unsteady cavity flows. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1960, vol. 5, No. 4.
5. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.
6. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М., Изд-во АН СССР, 1947.
7. Ефремов И. И., Роман В. М. Расчет суперкавитационного обтекания тонких профилей вблизи границы раздела. ПМТФ, 1969, № 3.
8. Parkin B. R. Numerical data on hydrofoil response to nonsteady motions at zero cavitation number. J. Ship Res., 1962, vol. 6, No. 3.

УДК 532.529.6

## О ВСПЛЫВАНИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Л. А. ЭПШТЕЙН

(Москва)

В различных областях техники приходится сталкиваться с так называемым снарядным режимом движения газожидкостной смеси по вертикальным трубам. Этот режим, часто встречающийся при работе эрлифтов, некоторых типов теплообменников и других устройств, характеризуется периодическим следованием газовых пузырей в форме «снаряда», отделенных друг от друга жидкими пробками.

Одной из основополагающих работ при исследовании таких течений является работа [1], выполненная еще в 1943 г. под руководством Л. Правдтля, в которой определяется скорость подъема одиночного пузыря относительно неподвижной идеальной тяжелой жидкости, заполняющей вертикальную круглую трубу. В дальнейшем этот вопрос аналогичными методами изучался в [2]. Полученные сведения использовались в ряде более поздних работ [3, 4]. Количественные результаты работы [1] подтверждены экспериментально в самой работе и во многих последующих исследованиях, но методологическая сторона полученного в [1] теоретического решения (не вызывавшая до сих пор каких-либо возражений), заслуживает того, чтобы на ней остановиться.

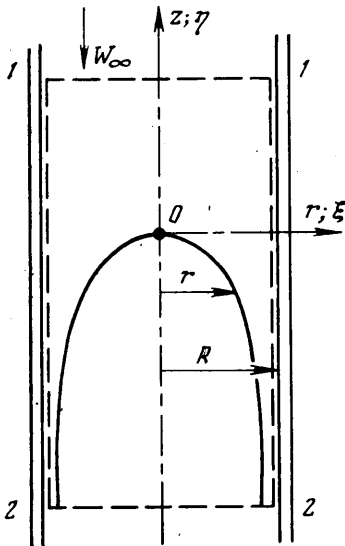
В [1] решение уравнения Лапласа ищется в виде суммы ряда, составленного из произведений бесселевых функций от аргумента  $\xi = r/R$  на экспоненту от  $\eta = z/R$  (см. фиг. 1); и неопределенные коэффициенты этого ряда подбираются в целях удовлетворения граничного условия постоянства давления на неизвестной априори поверхности пузыря. В связи с рядом трудностей решения в такой постановке делаются дополнительные допущения о том, что пузырь состоит из головного сферического участка с безразмерным радиусом  $a$  и нижнего участка, контур которого определяется уравнением неразрывности и предположением о постоянстве скоростей по сечению потока, перпендикулярным оси трубы. После ряда сложных выкладок, усечения бесконечных систем уравнений и приближенных численных расчетов находится радиус сферического головного участка и скорость всплытия пузыря.

Покажем, что все полученные в [1] результаты при сделанных допущениях могут быть найдены строго и предельно просто без привлечения использованного там математического аппарата.

В самом деле, согласно допущениям очерченный по окружности радиуса  $a$  контур верхней (головной) части пузыря имеет вид

$$(1) \quad \eta_b = a \sqrt{1 - (\xi/a)^2} - 1 = \eta_b(a, \xi)$$

Уравнение неразрывности (см. фиг. 1)  $\pi \omega_\infty R^2 = \pi(R^2 - r^2)w(z)$  в сочетании с уравнением Бернулли  $w^2 = -2gz$  дает уравнение контура нижнего участка пузыря



Фиг. 1