

## ВЛИЯНИЕ ШИРОТНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Б. С. КЕЛЛЕР, И. М. ЯВОРСКАЯ

(Москва)

Гидродинамика планетных атмосфер и недр часто прямо или косвенно связана с конвективными движениями, происходящими во вращающихся жидких сферических слоях в поле центральной силы. Конвективная устойчивость в покоящемся сферическом слое с центральным полем тяготения впервые рассматривалась в [1, 2]. Было показано, что критическое число Рэлея  $Ra_0$ , при котором наступает конвективная неустойчивость, и волновое число критических возмущений существенно зависят от толщины слоя. Так же как и в плоском случае, задача о конвективной устойчивости сферического слоя оказывается вырожденной и форму критических возмущений из линейной задачи установить не удается.

Действительно, минимизация числа Рэлея позволяет установить только волновое число  $l$  у сферической гармоники  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , реализуемой на пределе устойчивости, параметр  $m$  остается неопределенным и, таким образом,  $2l+1$  независимых конвективных мод соответствуют  $Ra_0$ . В работе [3] изучена конвективная устойчивость жидкости в медленно вращающемся тонком сферическом слое. Показано, что наличие вращения устраняет вырождение, на пределе устойчивости возникают движения, соответствующие  $Y_l^l(\theta, \varphi)$ -гармонике с выраженным максимумом на экваторе и распространяющиеся волновым образом в сторону, обратную вращению.

В данной работе исследуется конвективная устойчивость течения жидкости, возникающего во вращающемся сферическом слое из-за неравномерного распределения температур на одной из границ слоя. В такой постановке задача может моделировать крупномасштабные движения в атмосферах больших планет, обладающих внутренними источниками тепла и поглощающих солнечную радиацию вблизи облачного покрова атмосферы.

Показано, что в зависимости от соотношений между параметрами, задающими вращение и неоднородное распределение температуры, происходит либо стабилизация, либо дестабилизация слоя по сравнению с неподвижным слоем той же толщины и с таким же, но распределенным равномерно суммарным потоком тепла, подводимым к слою. Исследуется форма соответствующих критических возмущений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим жидкость, заполняющую сферический слой  $r_i \leq r \leq r_e$ , находящуюся под действием центральной гравитационной силы и вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega$ . На внутренней границе слоя поддерживается постоянная температура  $T_i$ , которую без ограничения общности можно принять равной нулю. На внешней границе слоя температура  $T_e$  переменна и распределена симметрично относительно экватора. Тогда  $T_e$  можно представить в виде ряда по четным полиномам Лежандра  $P_{2n}(\mu)$

$$T_e(r_e, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(2n)} P_{2n}(\mu), \quad \mu = \cos \theta$$

при этом очевидно, что средняя по внешней сфере температура  $\langle T_e \rangle$  равна  $T^{(0)}$ . Для простоты остановимся на случае, когда  $T_e = T^{(0)} + T^{(2)} P_2(\mu)$ . Здесь и далее используется сферическая система координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Широтный градиент температуры на внешней границе слоя в системе координат, вра-

щающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , вызывает стационарное течение, которое описывается следующими безразмерными уравнениями и граничными условиями:

$$(1.1) \quad \text{Pr}^{-1}(\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} = -\nabla\Pi + \Delta\mathbf{U} + \text{Ra} \gamma(r)\mathbf{r}T - 2\text{Re}[\mathbf{z}_0, \mathbf{U}]$$

$$\mathbf{U}\nabla T = \Delta T + q, \quad \text{div} \mathbf{U} = 0$$

$$\text{Pr} = \nu / \chi, \quad \text{Ra} = \alpha g h^3 |T^{(0)}| / \chi \nu, \quad \text{Re} = \Omega h^2 / \nu$$

$$(1.2) \quad r=r_0: \quad T=0, \quad \mathbf{U}=0 \quad \text{или} \quad U_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = 0$$

$$r=r_0+1: \quad T = -1 - \lambda P_2(\mu), \quad \mathbf{U}=0 \quad \text{или} \quad U_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = 0$$

Первое условие для  $\mathbf{U}$  соответствует твердым границам слоя, второе — свободным;  $\mathbf{U}$  и  $T$  — безразмерные скорость и температура основного движения, в  $\nabla\Pi$  включены градиент давления  $\nabla P$  и все потенциальные силы. За характерные масштабы линейного размера, времени, скорости, давления и температуры приняты соответственно толщина слоя  $h=r_0-r_i$ ,  $h^2/\nu$ ,  $\chi/h$ ,  $\rho_0 \nu \chi / h^2$ ,  $-T^{(0)}$ . В (1.1) и (1.2)  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $\text{Ra}$  — число Рэлея,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $r_0=r_i/h$ ,  $\gamma(r)=r_0^2/r^3$ ,  $\lambda=T^{(2)}/T^{(0)}$ ;  $\alpha$ ,  $\nu$  и  $\chi$  — коэффициенты теплового расширения, вязкости и температуропроводности,  $\rho_0$  и  $g$  — плотность и ускорение силы тяжести на внутренней границе слоя;  $\mathbf{z}_0$  — единичный вектор вдоль оси вращения;  $\tau_\varphi$  и  $\tau_\theta$  —  $\varphi$ - и  $\theta$ -компоненты касательных напряжений на сфере радиуса  $r$ . Случай  $\lambda > 0$  соответствует более высокой температуре на экваторе, чем на полюсах, а  $\lambda < 0$  — наоборот.

Стационарное течение, описываемое (1.1) и (1.2), может оказаться неустойчивым как при больших значениях параметра  $\lambda$ , так и при больших числах Рэлея. Далее будет рассмотрен случай малых  $\lambda$  и  $\text{Re}$ , т. е. возникновение конвективной неустойчивости течения. Уравнения для малых возмущений запишем в безразмерном виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{Pr}^{-1}[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{u}] = -\nabla p + \Delta \mathbf{u} + \text{Ra} \gamma(r)\Theta - 2\text{Re}[\mathbf{z}_0, \mathbf{u}]$$

$$(1.3)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla T + \mathbf{U}\nabla\Theta = \Delta\Theta, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0$$

с граничными условиями при  $r=r_0$  и  $r=r_0+1$ :  $\Theta=\mathbf{u}=0$ , если граница твердая, и  $\Theta=u_r=\tau_{r\theta}=\tau_{r\varphi}=0$ , если граница свободная;  $\mathbf{u}$ ,  $\Theta$ ,  $p$  — скорость, температура и давление возмущенного течения.

Примем зависимость возмущений от времени в обычной форме  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\Theta \sim \exp(\sigma t)$  и представим возмущения скорости в виде суммы тороидального и полоидального векторов [2]

$$(1.4) \quad \mathbf{u} = \text{rot} \mathbf{r}w + \text{rot}^2 \mathbf{r}s$$

Применяя к первому уравнению (1.3) операции  $\mathbf{r} \text{rot}$  и  $\mathbf{r} \text{rot}^2$  и используя (1.4), получим [4]

$$(1.5)$$

$$\left[ L^2(\Delta - \sigma) + 2\text{Re} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] w - 2\text{Re} Qs - \text{Pr}^{-1} \mathbf{r} \text{rot}[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{u}] = 0$$

$$\left[ L^2(\Delta - \sigma) + 2\text{Re} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \Delta s + 2\text{Re} Qw - \text{Ra} \gamma(r) L^2 \Theta + \\ + \text{Pr}^{-1} \mathbf{r} \text{rot}^2 [(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{u}] = 0, \quad \sigma \text{Pr} \Theta + \mathbf{U} \nabla \Theta + \mathbf{u} \nabla T = 0 \\ Q = \mathbf{z}_0 \cdot \nabla^{-1/2} (L^2 \mathbf{z}_0 \cdot \nabla - \mathbf{z}_0 \cdot \nabla L^2), \quad L^2 = - \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Граничные условия через функции  $s$  и  $w$  на твердой и свободной поверхностях примут соответственно вид

$$(1.6) \quad \Theta = s = \frac{\partial s}{\partial r} = w = 0, \quad \Theta = s = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} = 0$$

Система (1.5) с граничными условиями (1.6) описывает возникновение конвективной неустойчивости течения  $(\mathbf{U}, T)$  во вращающемся сферическом слое. Задача состоит в нахождении минимального числа Рэлея  $\text{Ra}_c$ , при котором основное течение становится неустойчивым, а также формы возникающих на пределе устойчивости течений. Критическое число Рэлея  $\text{Ra}_c$  в общем случае зависит от значений других безразмерных параметров задачи:  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$ ,  $r_0$  и  $\lambda$ . При  $\text{Re} = \lambda = 0$  получим задачу о конвективной неустойчивости покоящегося сферического слоя [2].

В данной работе считается, что  $\text{Re}$  и  $\lambda$  достаточно малы; тогда физика задачи и вид систем уравнений и граничных условий для основного течения и возмущений подсказывают возможность использования для решения задачи метода регулярных возмущений и представления характеристик основного и возмущенного течений в виде рядов по целым положительным степеням  $\text{Re}$  и  $\lambda$

$$(1.7) \quad f = f_0 + \text{Re} f_{01} + \text{Re}^2 f_{02} + \dots + \lambda (f_{10} + \text{Re} f_{11} + \dots) + \dots$$

Аналогичными рядами представляются  $\text{Ra}_c$  и  $\sigma$ . Очевидно, что решение будет зависеть от соотношений между параметрами  $\lambda$  и  $\text{Re}$ . Пусть  $\text{Re} \sim \lambda^\alpha$ , тогда в зависимости от значений  $\alpha$  возможны следующие случаи:

- 1°  $\alpha > 1$ ,  $f = f_0 + \lambda f_{10} + \dots$
- 2°  $\alpha = 1$ ,  $f = f_0 + \text{Re} f_{01} + \lambda f_{10} + \dots = f_0 + \lambda f_{11} + \dots$
- 3°  $1 > \alpha > 1/2$ ,  $f = f_0 + \text{Re} f_{01} + \text{Re}^{1/\alpha} f_{10} + \dots$
- 4°  $\alpha = 1/2$ ,  $f = f_0 + \text{Re} f_{01} + \text{Re}^2 f_{02} + \lambda f_{10} + \dots = f_0 + \text{Re} f_{01} + \text{Re}^2 f_{02} + \dots$
- 5°  $0 < \alpha < 1/2$ ,  $f = f_0 + \text{Re} f_{01} + \text{Re}^2 f_{02} + \dots$

Здесь справа выписаны члены в разложении (1.7), которые будут удерживаться в решении в том или ином диапазоне изменения  $\alpha$  для получения нетривиальных поправок к случаю  $\text{Re} = \lambda = 0$ .

**2. Решение задачи в общем виде.** Очевидно, что нулевые характеристики основного и возмущенного течений не зависят от  $\alpha$  и будут определяться из следующих систем уравнений и граничных условий:

$$(2.1) \quad \mathbf{U}_0 = 0, \quad \Delta T_0 = -q; \quad r = r_0, \quad T_0 = 0; \quad r = r_0 + 1, \quad T_0 = -1$$

$$(2.2) \quad L^2 \Delta w_0 = 0, \quad L^2 \Delta^2 s_0 - \text{Ra}_0 \gamma(r) L^2 \Theta_0 = 0, \quad \Delta \Theta_0 - T_0' r^{-1} L^2 s_0 = 0$$

с граничными условиями (1.6). Система (2.2) с граничными условиями (1.6) описывает критическую конвекцию в покоящемся сферическом слое. Решение этой системы в случае

$$(2.3) \quad r_0 \gamma(r) = -T_0' r_0 r^{-1} = 1$$

для широкого диапазона толщин слоя  $r_0^{-1}$  и различных граничных условий имеет вид [2]

$$(2.4) \quad \sigma_0 = w_0 = 0, \quad s_0(r, \vartheta, \varphi) = s_0(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi), \\ \Theta_0(r, \vartheta, \varphi) = \Theta_0(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Радиальные амплитуды  $s_0(r)$  и  $\Theta_0(r)$  удовлетворяют системе уравнений

$$(2.5) \quad D_i^2 s_0 - \text{Ra}_0 r_0^{-1} \Theta_0 = 0, \quad D_i \Theta_0 + l(l+1) r_0^{-1} s_0 = 0 \\ D_i \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Здесь  $\text{Ra}_0$  — критическое число Рэлея в покоящемся сферическом слое толщины  $r_0^{-1}$ ,  $l$  — критическое волновое число, реализуемое на пределе устойчивости;  $\text{Ra}_0$  и  $l$  зависят, как показано в [2], от толщины слоя  $r_0^{-1}$  и вида граничных условий. Так же как и в плоском случае, задача оказывается вырожденной, т. е. азимутальное волновое число  $m$  критического возмущения остается неопределенным и  $2l+1$  независимых гармоник соответствуют  $\text{Ra}_0$ . Условие (2.3) — это условие самосопряженности задачи (2.2), (1.7), поэтому имеет место принцип смены устойчивости и  $\sigma_0 = 0$ . Для слоя конечной глубины условие (2.3) выполняется, когда градиент температуры в покоящемся сферическом слое обусловлен равномерным распределением источников тепла внутри него и можно пренебречь в слое изменениями силы тяжести [2]. В дальнейшем примем, что условие (2.3) для покоящегося слоя выполнено. Для тонкого сферического слоя  $r_0 \gg 1$  условие (2.3) выполняется автоматически. Во вращающихся слоях, как известно, система уравнений для конвективных возмущений несамосопряженная и принцип смены устойчивости, вообще говоря, не имеет места. Поэтому мнимые части  $\sigma_i$  ( $i \geq 1$ ) могут быть отличны от нуля.

При  $\alpha > 1$  основное течение в первом приближении по  $\lambda$  описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$(2.6) \quad L^2 \Delta W_{10} = 0, \quad L^2 \Delta^2 S_{10} - \text{Ra}_0 r_0^{-1} L^2 T_{10} = 0, \quad \Delta T_{10} + r_0^{-1} L^2 S_{10} = 0$$

$$(2.7) \quad r = r_0: T_{10} = 0; \quad r = r_0 + 1: T_{10} = -P_2(\mu)$$

$$(2.8) \quad W_{10} = S_{10} = \frac{\partial S_{10}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial W_{10}}{\partial r} - \frac{W_{10}}{r} = S_{10} = \frac{\partial^2 S_{10}}{\partial r^2} = 0$$

Первое из условий (2.8) соответствует твердой границе, второе — свободной. Здесь  $W_{10}$  и  $S_{10}$  — скаляры тороидальной и полоидальной частей вектора скорости  $U_{10}$ . Из (2.6) — (2.8) ясно, что  $W_{10} = 0$ , а  $S_{10}$  и  $T_{10}$  следует искать в виде

$$S_{10}(r, \vartheta) = S_{10}(r) P_2(\mu), \quad T_{10}(r, \vartheta) = T_{10}(r) P_2(\mu)$$

где радиальные амплитуды  $S_{10}(r)$  и  $T_{10}(r)$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.9) \quad D_2^2 S_{10} - \text{Ra}_0 r_0^{-1} T_{10} = 0, \quad D_2 T_{10} + 6r_0^{-1} S_{10} = 0$$

с граничными условиями (2.7), (2.8).

Система первого приближения для возмущений имеет вид

$$(2.10) \quad \begin{aligned} L^2 \Delta w_{10} &= \text{Pr}^{-1} \mathbf{r} \text{rot} [(\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{U}_{10} + (\mathbf{U}_{10} \nabla) \mathbf{u}_0] + \sigma_{10} L^2 w_0 \\ L^2 \Delta^2 s_{10} - \text{Ra}_0 r_0^{-1} L^2 \Theta_{10} &= \sigma_{10} L^2 \Delta s_0 + \text{Ra}_{10} r_0^{-1} L^2 \Theta_0 - \\ &- \text{Pr}^{-1} \mathbf{r} \text{rot}^2 [(\mathbf{u}_0, \nabla) \mathbf{U}_{10} + (\mathbf{U}_{10}, \nabla) \mathbf{u}_0] \\ \Delta \Theta_{10} + r_0^{-1} L^2 s_{10} &= \sigma_{10} \text{Pr} \Theta_0 + \mathbf{u}_0 \nabla T_{10} + \mathbf{U}_{10} \nabla \Theta_0 \end{aligned}$$

с однородными граничными условиями типа (1.6).

Считая условия (2.3) выполненными, запишем условие разрешимости системы (2.10)

$$(2.11) \quad \begin{aligned} l(l+1) \sigma_{10} \langle D_l s_0, s_0 \rangle + l(l+1) r_0^{-1} \text{Ra}_{10} \langle \Theta_0, s_0 \rangle + \\ + \text{Pr}^{-1} \langle G_l(r), s_0 \rangle - \text{Ra}_0 \sigma_{10} \text{Pr} \langle \Theta_0, \Theta_0 \rangle - \text{Ra}_0 \langle F_l(r), \Theta_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Здесь через  $G_l(r)$  и  $F_l(r)$  обозначены радиальные амплитуды выражений (см. приложение)

$$-\mathbf{r} \text{rot}^2 [(\mathbf{u}_0, \nabla) \mathbf{U}_{10} + (\mathbf{U}_{10}, \nabla) \mathbf{u}_0] \quad (\mathbf{u}_0 \nabla T_{10} + \mathbf{U}_{10} \nabla \Theta_0)$$

при сферической гармонике  $Y_l^m$ , а через  $\langle f_1, f_2 \rangle$  — интеграл вида

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{r_0}^{r_0+1} f_1(r) f_2(r) r^2 dr$$

Поскольку в (2.11) все интегралы вещественны, получим

$$(2.12) \quad \sigma_{10} = 0, \quad \text{Ra}_{10} \equiv \text{Ra}_{10}(l, m) = \frac{\text{Ra}_0 \langle F_l(r), \Theta_0 \rangle - \text{Pr}^{-1} \langle G_l(r), s_0 \rangle}{l(l+1) \langle \Theta_0, s_0 \rangle}$$

т. е. с точностью до членов порядка  $\text{Re}^2$  конвекция, реализуемая на пределе устойчивости, стационарна, а вырождение устраняется минимизацией  $\text{Ra}_{10}$ .

Остановимся теперь на случае  $5^\circ$  ( $0 < \alpha < 1/2$ ), так как далее будет ясно, что  $2^\circ - 4^\circ$  являются промежуточным между  $1^\circ$  и  $5^\circ$ . Широтный градиент температуры в этом случае оказывает влияние лишь на приближения третьего порядка (члены  $\sim \text{Re}^{2+\beta}$ ,  $\beta > 0$ ). Поскольку достаточно учесть в решении члены лишь первого и второго порядков по  $\text{Re}$ , можно пренебречь влиянием широтного градиента температуры, и тогда задача сведется к задаче о конвективной устойчивости медленно вращающегося сферического слоя. Эта задача детально рассмотрена в [3], поэтому здесь лишь кратко приведем результаты. Основное состояние, устойчивость которого исследуется в данном случае, — твердотельное вращение  $\mathbf{U}_{10} = T_{10} = 0$ . Системы первого и второго приближений для возмущенных характеристик имеют вид

$$(2.13) \quad \begin{aligned} L^2 \Delta w_{01} &= 2Qs_0, \quad L^2 \Delta^2 s_{01} - \text{Ra}_0 r_0^{-1} L^2 \Theta_{01} = \\ &= \left( \sigma_{01} - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Delta s_0 + \text{Ra}_{01} r_0^{-1} L^2 \Theta_0, \quad \Delta \Theta_{01} + r_0^{-1} L^2 s_{01} = \sigma_{01} \text{Pr} \Theta_0 \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} L^2 \Delta w_{02} &= \left( \sigma_{01} L^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) w_{01} + 2Qs_{01} \\ L^2 \Delta^2 s_{02} - \text{Ra}_0 r_0^{-1} L^2 \Theta_{02} &= \left( \sigma_{01} L^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Delta s_{01} + \sigma_{02} L^2 \Delta s_0 - \\ &- 2Qw_{01} + \text{Ra}_{01} r_0^{-1} L^2 \Theta_{01} + \text{Ra}_{02} r_0^{-1} L^2 \Theta_0 \\ \Delta \Theta_{02} + r_0^{-1} L^2 s_{02} &= \sigma_{01} \text{Pr} \Theta_{01} + \sigma_{02} \text{Pr} \Theta_0 \end{aligned}$$

с граничными условиями типа (1.6). Решение системы (2.13) дано в [3]

$$\text{Ra}_{01} = 0, \quad \sigma_{01} = \frac{2im \langle D_l s_0, s_0 \rangle}{l(l+1) \langle D_l s_0, s_0 \rangle - \text{Ra}_0 \text{Pr} \langle \Theta_0, \Theta_0 \rangle}$$

$$w_{01} = w_{01}^+(r) Y_{l+1}^m + w_{01}^-(r) Y_{l-1}^m, \quad s_{01} = s_{01}(r) Y_l^m, \quad \Theta_{01} = \Theta_{01}(r) Y_l^m$$

и радиальные амплитуды  $w_{01}^-(r)$  и  $w_{01}^+(r)$  удовлетворяют уравнениям

$$D_{l-1} w_{01}^- = \frac{2}{l(l-1)} Q_l^- s_0, \quad D_{l+1} w_{01}^+ = \frac{2}{(l+1)(l+2)} Q_l^+ s_0$$

а уравнения для  $s_{01}(r)$  и  $\Theta_{01}(r)$  легко получаются из (2.14).

Операторы  $Q_l^-$  и  $Q_l^+$  приведены в приложении. Параметр  $\text{Ra}_{02}$  находится из условия разрешимости системы (2.14)

$$(2.15) \quad \text{Ra}_{02} = \frac{r_0}{l(l+1) \langle \Theta_0, s_0 \rangle} \{ 2 \langle Q_{l+1}^- w_{01}^+ + Q_{l-1}^+ w_{01}^-, s_0 \rangle + \sigma_{01} [ \text{Pr} \text{Ra}_0 \langle \Theta_{01}, \Theta_0 \rangle - l(l+1) \langle D_l s_{01}, s_0 \rangle ] + 2im \langle D_l s_{01}, s_0 \rangle \}$$

Минимизация выражения  $\text{Ra}_{02}$  дает возможность устранить вырождение и определить азимутальное волновое число  $m$ . Так, в [3] показано, что в толстых слоях при  $\text{Pr}=0$  и в тонких слоях при произвольных  $\text{Pr}$  азимутальное волновое число  $m=l$ , т. е. конвективные движения, реализуемые на пределе устойчивости при медленном вращении, соответствуют моде  $Y_l^l$ , характеризуемой выраженным максимумом на экваторе, и распространяются в виде волны в направлении, обратном вращению с угловой скоростью  $\omega = -2\text{Re} / [l(l+1)(\text{Pr}+1)]$ .

В случае  $2^\circ$  ( $\alpha=1$ ) система уравнений для основного течения в первом приближении та же, что и в  $1^\circ$ . Уравнения для возмущений первого порядка  $w_1, s_1, \Theta_1$

$$(2.16) \quad L^2 \Delta w_1 = \text{Pr}^{-1} \mathbf{r} \text{rot} [ (\mathbf{u}_0, \nabla) \mathbf{U}_{10} + (\mathbf{U}_{10}, \nabla) \mathbf{u}_0 ] + 2(\text{Re} / \lambda) Q_s s_0$$

$$L^2 \Delta^2 s_1 - \text{Ra}_0 r_0^{-1} L^2 \Theta_1 = - \text{Pr}^{-1} \mathbf{r} \text{rot}^2 [ (\mathbf{u}_0, \nabla) \mathbf{U}_{10} + (\mathbf{U}_{10}, \nabla) \mathbf{u}_0 ] +$$

$$+ \text{Ra}_0 r_0^{-1} L^2 \Theta_0 + \left( \sigma_1 L^2 - 2 \frac{\text{Re}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Delta s_0$$

$$\Delta \Theta_1 + r_0^{-1} L^2 s_1 = \sigma_1 \text{Pr} \Theta_0 + \mathbf{u}_0 \nabla T_{10} + \mathbf{U}_{10} \nabla \Theta_0$$

отличаются от системы (2.10) наличием членов  $2Q_s s_0$  и  $2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta s_0$ . Учитывая, что функции нулевого приближения представляются в виде (2.4), запишем условие разрешимости системы (2.16)

$$\sigma_1 = \frac{2im \langle D_l s_0, s_0 \rangle}{l(l+1) \langle D_l s_0, s_0 \rangle - \text{Ra}_0 \text{Pr} \langle \Theta_0, \Theta_0 \rangle} = \sigma_{01}$$

т. е.  $\sigma$  то же, что и в случае чистого вращения  $5^\circ$ , а  $\text{Ra}_1$ , как легко видеть, то же, что и в  $1^\circ$ . Минимизация  $\text{Ra}_1$ , как и в  $1^\circ$ , позволяет определить  $m$  на пределе устойчивости. Если  $m$  отлично от нуля, то критическая конвекция при  $\alpha=1$  нестационарна, если  $m=0$ , то критическая конвекция стационарна и имеет форму роллов.

В  $3^\circ$  ( $1 > \alpha > 1/2$ ) основное состояние в первом приближении по  $Re$  — твердотельное вращение. Системы уравнений для возмущений первого порядка и, следовательно, ее решения такие же, как и в случае  $5^\circ$ .

Системы уравнений следующего порядка для основного и возмущенного течений совпадают с (2.6) и (2.10) при граничных условиях (2.8) и (1.6) соответственно. Поэтому  $\sigma_{10} = 0$ , а добавка к критическому значению числа Рэлея такая же, как и в случае  $1^\circ$ . Таким образом,  $3^\circ$  отличается от  $2^\circ$  только тем, что в  $3^\circ$   $\sigma_{01}$ ,  $w_{01}$  и  $Ra_{10}$  имеют разные порядки по  $\lambda$ .

В случае  $4^\circ$  ( $\alpha = 1/2$ ) первое приближение для основного и возмущенного течений то же, что и в случае чистого вращения  $5^\circ$ . Основное течение во втором приближении полностью совпадает с  $1^\circ$ , т. е.  $U_2 = U_{10}$ ,  $T_2 = T_{10}$ . Возмущенное течение во втором приближении описывается системой уравнений

(2.17)

$$L^2 \Delta w_2 = \left( \sigma_{01} L^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) w_{01} + 2Qs_{01} + \frac{\lambda}{Re^2 Pr} \mathbf{r} \operatorname{rot} [(\mathbf{u}_0, \nabla) U_{10} + (U_{10}, \nabla) \mathbf{u}_0]$$

$$L^2 \Delta^2 s_2 - Ra_0 r_0^{-1} L^2 \Theta_2 = \sigma_2 L^2 \Delta s_0 + \left( \sigma_{01} L^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Delta s_{01} - 2Qw_{01} +$$

$$+ Ra_2 r_0^{-1} L^2 \Theta_0 - \frac{\lambda}{Re^2 Pr} \mathbf{r} \operatorname{rot}^2 [(\mathbf{u}_0, \nabla) U_{10} + (U_{10}, \nabla) \mathbf{u}_0]$$

$$\Delta \Theta_2 + r_0^{-1} L^2 s_2 = \sigma_2 Pr \Theta_0 + \sigma_{01} Pr \Theta_{01} + \frac{\lambda}{Re^2} (U_{10} \nabla \Theta_0 + \mathbf{u}_0 \nabla T_{10})$$

с граничными условиями, аналогичными (1.6). Условие разрешимости системы (2.17) по аналогии с предыдущим запишем в виде

$$(2.18) \quad \sigma_2 l(l+1) \langle D_l s_0, s_0 \rangle + [l(l+1) \sigma_{01} - 2im] \langle D_l s_{01}, s_0 \rangle - \\ - 2 \langle Q_{l+1}^- w_{01}^+ + Q_{l-1}^+ w_{01}^-, s_0 \rangle + r_0^{-1} l(l+1) Ra_2 \langle \Theta_0, s_0 \rangle + \frac{\lambda}{Pr Re^2} \langle G_l, s_0 \rangle - \\ - \frac{\lambda}{Re^2} Ra_0 \langle F_l, \Theta_0 \rangle - Ra_0 Pr (\sigma_2 \langle \Theta_0, \Theta_0 \rangle + \sigma_{01} \langle \Theta_{01}, \Theta_0 \rangle) = 0$$

Так как все интегралы в (2.18) вещественны, то сразу получаем

$$(2.19) \quad \sigma_2 = 0; \quad Ra_2 = Ra_{02} + Ra_0 \frac{\lambda}{Re^2} \frac{\langle F_l, \Theta_0 \rangle - Pr^{-1} \langle G_l, s_0 \rangle}{l(l+1) \langle \Theta_0, s_0 \rangle} = \\ = Ra_{02}(l, m) + \frac{\lambda}{Re^2} Ra_{10}(l, m)$$

Таким образом, при  $\alpha = 1/2$  критическое число Рэлея определяется одновременно как вращением, так и широтным градиентом температуры.

**3. Аппроксимация тонкого слоя.** Для получения результатов в аналитическом виде применим развитую теорию к тонкому слою  $r_0 \gg 1$  со свободными границами. Тогда основным состоянием будет либо твердотельное вращение ( $T_0' = -1$ ,  $U_{01} = T_{01} = 0$ ), либо течение, описываемое системой (2.6) — (2.8), которая в случае тонкого слоя имеет решение

$$(3.1) \quad W_{10} = 0, \quad T_{10} = -x, \quad S_{10} \sim r_0^{-1}, \quad x = r - r_0$$

Система уравнений для возмущений нулевого порядка (2.5) в этом случае совпадает с системой, описывающей критическую конвекцию в плоском слое [2]; критическое число Рэлея и критическое волновое число равны с точностью до членов порядка  $r_0^{-1}$

$$(3.2) \quad Ra_0 \approx \frac{27}{4} \pi^4, \quad a^2 \approx \frac{l(l+1)}{r_0^2} \approx \frac{l^2}{r_0^2} \approx \frac{\pi^2}{2}$$

а решение с точностью до произвольного множителя имеет вид

$$(3.3) \quad s_0 \approx r_0^{-1} \sin \pi x, \quad \Theta_0 \approx 1/3 \sin \pi x$$

Используем (3.1) — (3.3) для вычисления критического числа Рэлея и формы возмущений в  $1^\circ$  —  $5^\circ$ .

Из выражений для  $G_l(r)$  и  $F_l(r)$  следует (см. приложение), что слагаемым  $Pr^{-1} \langle G_l, s_0 \rangle$  можно в тонком слое пренебречь по сравнению с  $Ra_0 \langle F_l, \Theta_0 \rangle$ , поскольку их отношение имеет порядок  $r_0^{-2}$ .

Тогда в  $1^\circ$  из (2.13) получим

$$(3.4) \quad Ra_{10} = \frac{1}{4} \left[ 3 \left( \frac{m}{l} \right)^2 - 1 \right] Ra_0$$

Таким образом, в зависимости от знака  $\lambda$  минимальное число  $Ra_c$  будет соответствовать осесимметричным роллам, если  $\lambda > 0$ , и трехмерным ячейкам с  $m=l$ , если  $\lambda < 0$ . Заметим, что в обоих случаях  $Ra_c < Ra_0$ . Следовательно, неравномерное распределение температуры на внешней границе по сравнению с равномерным приводит к дестабилизации теплопроводного режима в сферическом слое при одном и том же суммарном потоке тепла, подводимом к слою. Конвекция на пределе устойчивости всегда стационарна.

$5^\circ$ . Для тонкого слоя со свободными границами из (2.15) получим

$$(3.5) \quad Ra_{02} = \left[ 1 - \left( \frac{m}{l} \right)^2 \right] Ra_{02}', \quad Ra_{02}' = 8,985$$

т. е. влияние вращения приводит к тому, что на пределе устойчивости реализуются трехмерные течения с  $m=l$ , которые волновым образом распространяются в сторону, обратную вращению. Соответствующее критическое число  $Ra_c$  с точностью до членов порядка  $Re^2$  такое же, как и в неподвижном слое, т. е. медленное вращение не влияет на устойчивость, а влияет только на форму возмущений.

В  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  декремент  $\sigma$ , пропорциональный скорости распространения конвективных возмущений, определяется вращением, т. е.  $\sigma = Re \sigma_{01}$ , а критическое число Рэлея — влиянием широтного градиента температуры  $Ra_c = Ra_0 + \lambda Ra_{10}$ . Форма течения, определяемая минимумом  $Ra_{10}$ , такая же, как и в  $1^\circ$ , но только теперь при  $\lambda < 0$  трехмерные конвективные ячейки будут волновым образом распространяться в сторону, обратную вращению со скоростью  $\omega$ . Отличие  $2^\circ$  и  $3^\circ$  в том, что эффект дестабилизации, определяемый разностью  $Ra_0 - Ra_c$ , разных порядков по  $Re$ .

$4^\circ$ . Для тонкого слоя со свободными границами из (2.19) получим

$$(3.6) \quad Re_c = Ra_0 + Re^2 \left[ 1 - \left( \frac{m}{l} \right)^2 \right] Ra_{02}' + \lambda \frac{Ra_0}{4} \left[ 3 \left( \frac{m}{l} \right)^2 - 1 \right]$$

В случае  $\lambda > 0$  из (3.7) следует, что параметр  $Ra_c$  достигает минимума при  $m=0$ , если  $\lambda / Re^2 > \lambda_1$ , где  $\lambda_1 = 4Ra_{02}' / 3Ra_0$ . При этом, если  $\lambda / Re^2 > 3\lambda_1$ , то  $Ra_c < Ra_0$ , т. е. суммарный эффект вращения и широтного температур-

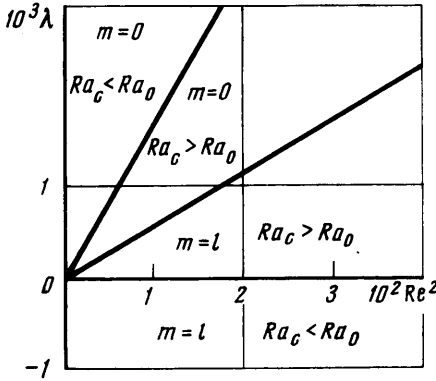


ного градиента приводит к понижению устойчивости слоя. При  $\lambda_1 < \lambda / \text{Re}^2 < < 3\lambda_1$  наоборот,  $Ra_c > Ra_0$ , т. е. теплопроводный режим в слое стабилизируется двумя перечисленными эффектами. При  $0 < \lambda / \text{Re}^2 < \lambda_1$  на пределе устойчивости реализуются трехмерные конвективные ячейки с  $m=l$ , и  $Ra_c > Ra_0$ , т. е. устойчивость слоя повышается. При  $\lambda < 0$  критические конвективные течения — трехмерные ячейки с  $m=l$ , а  $Ra_c < Ra_0$ , т. е. вращение плюс отрицательный широтный градиент температуры на внешней сфере вызывают дестабилизацию слоя.

Отметим, что стабилизация или дестабилизация слоя регистрируются относительно предела устойчивости неподвижного слоя с тем же самым суммарным потоком тепла, подводимым к слою. Во всех случаях, когда на

пределе устойчивости конвекция имеет форму трехмерных ячеек, она нестационарна и временная зависимость такова, что возмущения распространяются так же, как и в  $5^\circ$ , в сторону, обратную вращению с угловой скоростью  $\omega$ ; на фигуре в плоскости  $\lambda \text{Re}^2$  указаны области, где реализуется та или иная форма конвективных ячеек.

Приложение. Оператор  $Q$ , введенный в (1.6), обладает следующим свойством:



$$Q\{f(r) Y_l^m\} = (Q_l^- f) Y_{l-1}^m + (Q_l^+ f) Y_{l+1}^m$$

$$Q_l^- = -\frac{(l-1)(l+1)(l+m)}{2l+1} \left( \frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right),$$

$$Q_l^+ = -\frac{l(l+2)(l-m+1)}{2l+1} \left( \frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right)$$

Для тонкого слоя  $r_0 \gg 1$  эти операторы, очевидно, приводятся к виду

$$Q_l^- = -\frac{a^2 r_0^2}{2} \left( 1 + \frac{m}{l} \right) \left( \frac{d}{dx} + a \right), \quad Q_l^+ = -\frac{a^2 r_0^2}{2} \left( 1 - \frac{m}{l} \right) \left( \frac{d}{dx} - a \right)$$

Оператор  $D_l$  в (2.5) для  $r_0 \gg 1$  принимает вид

$$D_l \approx \frac{d^2}{dx^2} - a^2 \equiv d_a$$

Поэтому функции  $w_{01}^-$  и  $w_{01}^+$ , необходимые для вычисления интегралов в (2.15), находятся из уравнений

$$d_a w_{01}^- = -\left( 1 + \frac{m}{l} \right) \left( \frac{d}{dx} + a \right) s_0, \quad d_a w_{01}^+ = -\left( 1 - \frac{m}{l} \right) \left( \frac{d}{dx} - a \right) s_0$$

Коэффициенты  $G_l$  и  $F_l$  в (2.14) имеют следующий вид:

$$G_l(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{-r \text{rot}^2[(\mathbf{u}_0, \nabla) \mathbf{U}_{10} + (\mathbf{U}_{10}, \nabla) \mathbf{u}_0]\} Y_l^m \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi / \|Y_l^m\|^2$$

$$F_l(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\mathbf{u}_0 \nabla T_{10} + \mathbf{U}_{10} \nabla \Theta_0) Y_l^m \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi / \|Y_l^m\|^2$$

$$\|Y_l^m\|^2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Выражая  $u_0$  и  $U_{10}$  через  $s_0$  и  $S_{10}$ , получим

$$G_l(r) = -3kl(l+1) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ 6 \frac{s_0 S_{10}}{r^2} - \frac{s_0}{r} \frac{d^2}{dr^2} (S_{10}r) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (s_0 r) \left[ 6 \frac{S_{10}}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (S_{10}r) \right] - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (S_{10}r) D_l s_0 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{6}{l(l+1)} - 2 \right] \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (S_{10} D_l s_0) \right\}$$

$$F_l(r) = k \left[ l(l+1) s_0 \frac{1}{r} \frac{dT_{10}}{dr} + 3 \frac{T_{10}}{r^2} \frac{d}{dr} (s_0 r) \right] + \\ + 3k \left[ 2 \frac{S_{10}}{r} \frac{d\Theta_0}{dr} + \frac{\Theta_0}{r^2} \frac{d}{dr} (S_{10}r) \right]$$

$$k = [3(l^2 - m^2) - l(2l-1)] / [(2l-1)(2l+3)]$$

Для тонкого слоя, как легко видеть, отношения  $\text{Pr}^{-1}\langle G_l(r), s_0 \rangle$  к  $\text{Ra}_0\langle F_l(r), \Theta_0 \rangle$  имеет порядок  $r_0^{-2}$ , а  $k \approx [1 - 3(m/l)^2]/4$ . Кроме того, из (3.1) следует, что

$$F_l(r) \approx kl(l+1) s_0 r^{-1} \frac{dT_{10}}{dr} \approx -kl(l+1) s_0 r_0^{-1}$$

Поступила 7 VI 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. The onset of convection by thermal instability in spherical shells. *Philos. Mag.*, 1952, Ser. 7, vol. 43, No. 9.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford Univ. Press., 1961.
3. Busse F. H. Differential rotation in stellar convection zones. II. *Astron. Astrophys.*, 1973, vol. 28, No. 1.
4. Roberts P. H. On the thermal instability of a rotating fluid sphere containing heat sources. *Philos. Trans. Roy. Soc., Ser. A*, vol. 263, No. 1136.