МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1975

УДК 534.26

ДАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОСТЬ

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

(Москва)

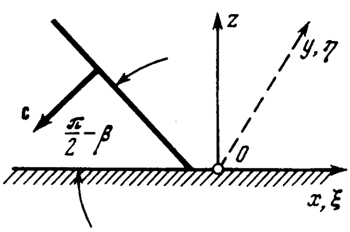
Исследуется возмущенное течение газа, вызванное слабой ударной волной, падающей на неподвижную плоскость под произвольным углом.

Решение определяющей поле скоростей за фронтом волны начально-краевой задачи с подвижной границей для трехмерного волнового уравнения получено в замкнутой форме в виде двойного интеграла, содержащего произвольно задаваемую функцию, определяющую параметры газа в падающей волне. Областью интегрирования является область, заключенная внутри эллипса, относительный эксцентриситет которого равен синусу угла наклона фронта падающей волны.

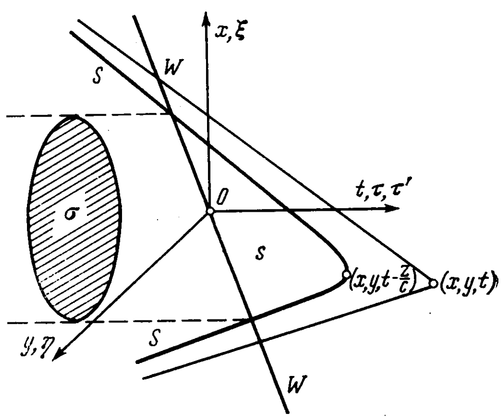
Получена формула для распределения давления на плоскости.

1. Слабая ударная волна распространяется вдоль неограниченной плоскости в идеальной сжимаемой среде. Фронт волны представляет собой плоскость, движущуюся со скоростью звука c. Вектор скорости движения фронта волны c образует с плоскостью угол β $(0<\beta\leqslant\pi/2)$.

Рассмотрим пространственные безвихревые течения газа за фронтом



Фиг. 1



Фиг. 2

волны. Выберем неподвижную систему координат $Oxyz$ (фиг. 1). Плоскость xOy совместим с плоскостью, вдоль которой распространяется волна. Ось Ox направим противоположно направлению движения следа волны на плоскости. Будем предполагать, что параметры газа в падающей волне зависят в общем случае от четырех аргументов: трех координат и времени. Потенциал скорости Φ возмущенного течения газа удовлетворяет условию обтекания на плоскости и волновому уравнению

$$(1.1)\qquad \Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}-\frac{1}{c^2}\Phi_{tt}=0$$

Функцию Φ будем искать в виде

(1.2) $$\Phi=\varphi_\omega(x, y, z, t)+\varphi(x, y, z, t)$$

Функция φ_ω удовлетворяет уравнению (1.1), представляет собой потенциал скорости в падающей волне и задает параметры газа в падающей волне.

Искомый потенциал φ есть решение уравнения (1.1), удовлетворяющее на плоскости xy за фронтом волны условию [1-3]

(1.3) $$\varphi_z=-\varphi_{\omega z}(x, y, 0, t)=A(x, y, t)$$

2. Для решения применим метод, предложенный в [4, 5]. Рассмотрим пространство переменных x, y и t. Будем считать начальным момент времени $t_0=0$, когда след волны на плоскости xy совпал с осью y. Плоскость W, заданная уравнением

(2.1) $$\xi\cos\beta+c\tau'=0$$

разделяет пространство xyt на две части V_0 и V с различными значениями производной φ_z (фиг. 2). В полупространстве V_0, отвечающем меньшим значениям времени, производная $\varphi_z=0$, в полупространстве V с бо́льшими значениями времени производная $\varphi_z=A(x, y, t)$ согласно условию (1.3).

Решение уравнения (1.1) возьмем в виде [4, 5]

(2.2) $$\varphi(x, y, z, t)=-\frac{c}{2\pi}\iint\limits_S \varphi_z(\xi, \eta, 0, \tau)\frac{dS}{R}$$

$$\tau=t-R_1/c$$

$$R=\sqrt{(1+c^2)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]+c^2z^2}$$

$$R_1=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}$$

Поверхность S есть гиперболоид, определенный уравнением $R_1^2-c^2(t-\tau')^2=0$ и неравенством $\tau'<t$.

Решение (2.2) представим в виде

(2.3) $$\varphi(x, y, z, t)=-\frac{c}{2\pi}\iint\limits_{s(x,y,z,t)} A(\xi, \eta, \tau)\frac{dS}{R}$$

Здесь область интегрирования s есть часть поверхности S, отсекаемая плоскостью $W(s\subset V)$.

3. В формуле (2.3) перейдем от поверхностного интеграла к двойному с областью интегрирования в плоскости xy, пользуясь соотношением $dS=\sqrt{EG-F^2}d\xi d\eta$, где величины E, G, F — коэффициенты при дифференциальных элементах в первой основной квадратичной форме и в рассматриваемой задаче — имеют вид

$$E=1+(x-\xi)^2/c^2R_1^2,\quad G=1+(y-\eta)^2/c^2R_1^2$$

$$F=(x-\xi)(y-\eta)/c^2R_1^2.$$

Решение (2.3) преобразуем к виду

(3.1) $$\varphi(x, y, z, t)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_\sigma A(\xi, \eta, t-R_1/c)\frac{d\xi\, d\eta}{R_1}$$

Здесь область интегрирования σ ограничена эллипсом, определенным уравнением

(3.2) $$\sin^2\beta\xi^2+\eta^2-2(x+ct\cos\beta)\xi-2y\eta+x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

Эллипс (3.2) представляет собой проекцию на плоскость xy линии пересечения поверхности S с плоскостью W [6].

Заметим, что эксцентриситет эллипса $e=\cos\beta$, большая ось перпендикулярна следу волны на плоскости xy, при $z=0$ одна из директрис эллипса совпадает со следом волны на xy.

Согласно интегралу Лагранжа для неустановившихся безвихревых течений газа давление связано с потенциалом скорости посредством соотношения

$$p=p_1-p_0=-\rho\partial\Phi/\partial t$$

где p_1 — давление в рассматриваемой точке, p_0 и ρ — давление и плотность невозмущенного газа.

Пользуясь представлением (1.2) и решением (3.1) при $z=0$, найдем давление акустической волны на плоскость xy в виде

$$p(x,y,0,t)=-\rho\left(\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{A_\tau(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\eta\,d\xi-$$

$$-\frac{c}{2\pi}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{A(\xi,\eta_2,c^{-1}\xi\cos\beta)-A(\xi,\eta_1,c^{-1}\xi\cos\beta)}{\sqrt{(\xi\cos\beta+ct)^2-(x-\xi)^2}}\,d\xi$$

$$\xi_{1,2}=\frac{1\mp\cos\beta}{\sin^2\beta}(x\mp ct),\qquad \eta_{1,2}=y\mp\sqrt{(\xi\cos\beta+ct)^2-(x-\xi)^2}$$

В частности, если волна падает на плоскость отвесно ($\beta=\pi/2$), то в решении (3.1) область интегрирования σ есть круг.

4. Рассмотрим задачу, когда падающая волна имеет конечную протяженность (два параллельных фронта следуют один за другим). В этом случае потенциал скорости φ представляется в виде двукратного интеграла (3.1) с областью интегрирования σ_1, которая представляет собой кольцеобразную область, заключенную между двумя эллипсами — эллипсом (3.2) и эллипсом, определенным уравнением

$$\sin^2\beta\xi^2+\eta^2-2(x+ct\cos\beta-l\cos\beta)\xi+2y\eta+x^2+y^2+z^2-(ct-l)^2=0 \tag{4.1}$$

Эллипс (4.1) представляет собой проекцию на плоскость xy линии пересечения поверхности S с плоскостью, заданную уравнением $\xi\cos\beta+$ $+c\tau'-l=0$, где l — расстояние между фронтами.

Поступила 14 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
3. *Седов Л. И.* Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
4. *Красильщикова Е. А.* Неустановившиеся движения крыла конечного размаха в сжимаемой среде. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 5.
5. *Красильщикова Е. А.* Обтекание тонких тел потоком газа при наличии набегающей ударной волны. В кн. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». М., «Наука», 1969.
6. *Красильщикова Е. А.* Трехмерные задачи с подвижной границей в нестационарной сверхзвуковой аэродинамике тонкого крыла. В сб. «Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам». Казань, Изд-во Казанск. ун-та. 1970.