МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1975

УДК 534.23:532.517

О ДИПОЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА СВОБОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ СО СДВИГОМ

Т. Н. КРАСИЛЬНИКОВА

(Ленинград)

Наиболее распространенной при изучении шума потоков является теория аэрогидродинамической генерации звука, фундаментальные основы которой заложены Лайтхиллом в работах [1, 2]. Согласно этой теории процесс генерирования звука свободной турбулентностью сводится к квадрупольному механизму излучения, а интенсивность звука (без учета эффектов рефракции и конвекции) зависит от скорости потока в восьмой степени. В последующие годы теория Лайтхилла интенсивно развивалась в различных направлениях. В частности, рассматриваемому здесь вопросу о влиянии сдвига средней скорости посвящен ряд работ, например [3–7], в которых излучение звука свободным потоком представлялось в виде суперпозиции «шума сдвига» и «собственного шума» турбулентных пульсаций. В этих работах, опиравшихся на теорию Лайтхилла, сделан вывод об одинаковом порядке собственного и сдвигового шумов.

В то же время результаты ряда экспериментов [8, 9] по шуму дозвуковых струй показывают, что интенсивность шума при невысоких дозвуковых скоростях пропорциональна шестой степени скорости потока. Расчетным путем зависимость интенсивности шума от шестой степени скорости получена в работах [10, 11], не опирающихся на лайтхилловскую схему решения. В работе [10] на основании общего решения волнового уравнения рассчитана интенсивность шума дозвуковой струи только для сдвиговой составляющей излучения и выявлено, что для малых чисел Маха [$M \leqslant 0.5$] справедлив закон шестой степени. В работе [11] при использовании метода согласованных асимптотических разложений этот же закон получен для акустического поля, создаваемого парами движущихся вихрей.

Попытка объяснить закон шестой степени для интенсивности шума свободных турбулентных потоков, исходя из квадрупольной схемы изучения, была предпринята в работе [6], где предполагалось, что пульсации скорости зависят от скорости потока не в первой степени, а в степени $^3/_4$. Использование этого аргумента является недостаточным, так как прямой размерный анализ решения Лайтхилла приводит к закону степени 7.5 для шума сдвига и к закону седьмой степени для собственного шума турбулентных пульсаций.

Данная работа посвящена анализу расхождения между лайтхилловским квадрупольным характером излучения звука и полученной в результате указанных расчетов [10, 11] и ряда экспериментов зависимостью интенсивности звука от скорости потока в шестой степени.

1. Рассмотрим уравнение Лайтхилла в статистически стационарном турбулентном потоке с поперечным сдвигом средней скорости. В работе [7] указано, что в этом случае правая часть уравнения содержит дипольные источники звука, связанные с градиентом средней скорости. Действительно, выпишем уравнение Лайтхилла

$$\nabla^2\rho-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i\,\partial x_j}\qquad(i,j=1,2,3)\tag{1.1}$$

где ρ — плотность жидкости, c — скорость звука, (x_1, x_2, x_3) — декартовы координаты точки, t — время, $T_{ij}=\rho V_iV_j+(p-c^2\rho)\delta_{ij}+s_{ij}$ — тензор напряжений, s_{ij} — вязкий тензор, p — давление, δ_{ij} — символ Кронекера, V_i — компонента скорости в направлении оси x_i.

Ввиду того что в дальнейшем будет рассматриваться свободный турбулентный поток, можно пренебречь вязкостью и принять, что для небольших дозвуковых скоростей $T_{ij}\approx\rho_0 V_i V_j$. При наличии средней скорости движения потока $V_i=\langle V_i\rangle+v_i'$, где $\langle V_i\rangle$ — осредненная, а V_i' — пульсационная составляющая скорости в направлении оси x_i. Заметим, что для стационарного турбулентного потока $\langle V_i\rangle=\langle V_i(x_1, x_2, x_3)\rangle$, а $v_i'=v_i'(x_1, x_2, x_3, t)$. В силу этого T_{ij} можно представить в виде

$$T_{ij}\approx\rho_0\langle V_i\rangle\langle V_j\rangle+\rho_0\langle V_j\rangle v_i'+\rho_0\langle V_i\rangle v_j'+\rho_0 v_i' v_j' \tag{1.2}$$

Выпишем подробно правую часть уравнения (1.1), используя (1.2)

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i\,\partial x_j}\approx\rho_0\frac{\partial^2\langle V_i\rangle\langle V_j\rangle}{\partial x_i\,\partial x_j}+\rho_0\frac{\partial^2(\langle V_i\rangle v_j'+\langle V_j\rangle v_i')}{\partial x_i\,\partial x_j}+\rho_0\frac{\partial^2 v_i' v_j'}{\partial x_i\,\partial x_j} \tag{1.3}$$

Правая часть (1.3) состоит из трех слагаемых. Первое из них представляет собой взаимодействие среднего сдвига со средним сдвигом, не зависит от времени для стационарного потока и потому не генерирует звук. Второе слагаемое представляет собой взаимодействие среднего сдвига и турбулентных напряжений и характеризует источники звука дипольного типа. В слабо сжимаемом турбулентном потоке это слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$\rho_0\frac{\partial^2(\langle V_i\rangle v_j'+\langle V_j\rangle v_i')}{\partial x_i\,\partial x_j}\approx\rho_0\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_j}\frac{\partial v_j'}{\partial x_i}+\rho_0\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_i}.$$

Производные от средних $\partial\langle V_i\rangle/\partial x_j$ не зависят от времени и поэтому определяют лишь пространственную неоднородность в распределении дипольных источников типа $\partial v_j'/\partial x_i$, что и указано в работе [7]. Третье слагаемое в (1.3) представляет собой взаимодействие двух турбулентных напряжений и характеризует источник звука квадрупольного типа, поскольку как v_i', так и v_j' зависят от времени.

Из проведенного анализа видно, что правая часть волнового уравнения (1.1) для свободного стационарного потока со сдвигом $[\partial\langle V_i\rangle/\partial x_j\neq 0]$ представляет собой сумму источников звука различных типов. В работе [7] замечено, что источники звука дипольного типа, генерирующие сдвиговый шум турбулентности, обладают более низкочастотными компонентами, чем источники звука квадрупольного типа, создающие собственный шум, но, к сожалению, в [7] сделан вывод об одинаковом порядке сдвигового и собственного шумов.

2. Детально исследуем, почему двойная дивергентная форма нивелирует различие между источниками звука дипольного и квадрупольного типов.

Выпишем общее решение волнового уравнения для свободного турбулентного потока, используя функцию Грина

$$\rho(\mathbf{y},t)=-\frac{1}{4\pi c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V\frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{x},t')}{\partial x_i\,\partial x_j}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-t')\,dV(\mathbf{x})\,dt' \tag{2.1}$$

$$\nabla^2 G-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta(t-t') \tag{2.2}$$

Здесь G — функция Грина свободного пространства, $\mathbf{y}$ — координата точки наблюдения, $\mathbf{x}$ — координата источников, заполняющих объем V.

К правой части решения (2.1) дважды применим интегрирование по частям. Будем делать эти преобразования последовательно. Первое интегрирование по частям приводит решение (2.1) к виду

$$\rho(\mathbf{y},t)=\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_V\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial x_i}dV(\mathbf{x})\,dt'-\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_S l_i\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}G\,dS\,dt' \tag{2.3}$$

В (2.3) поверхность S ограничивает объем V, занятый турбулентным потоком, l_i — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S. Объем V можно расширить таким образом, чтобы поверхность S проходила в невозмущенной жидкости. Тогда через S будут проходить только акустические процессы и из уравнения сохранения импульса

$$-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\bigg|_S=-\frac{\partial(\rho V_iV_j+s_{ij})}{\partial x_j}\bigg|_S=\left(\frac{\partial\rho V_i}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\bigg|_S=0$$

Таким образом, поверхностный интеграл в (2.3) обращается в нуль и решение имеет вид

$$\rho(\mathbf{y},t)=\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_V\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial x_i}dV(\mathbf{x})\,dt' \tag{2.4}$$

Однако следует заметить, что возможны случаи, когда вклад поверхностного интеграла формулы (2.3) в дальнее звуковое поле существен, например при наличии скачков уплотнения в потоке или при нестационарном истечении газа из сопла.

Проведем в (2.4) еще раз интегрирование по частям

$$\rho(\mathbf{y},t)=-\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_V T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\,\partial x_j}dV\,dt'+\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_S l_jT_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_i}dS\,dt' \tag{2.5}$$

Заметим, что поверхность S следует проводить так, чтобы внутри V и на самой поверхности S подынтегральное выражение было непрерывно, а значит, поверхность S не должна пересекать особой точки — точки наблюдения. Объемный интеграл в правой части (2.5) представляет собой квадрупольное распределение источников звука, а поверхностный интеграл в (2.5) характеризует распределение диполей с весом T_{ij}, причем на поверхности S $T_{ij}\approx\rho_0V_iV_j\neq0$, так как V_i и V_j представляют собой компоненты скорости в звуковой волне, которые не равны нулю и несут информацию о потоке.

Поскольку зависимость скорости в звуковой волне на поверхности S от скорости потока не известна, то использование решения уравнения (1.1) в форме (2.5) неудобно. Поэтому более приемлемой для расчетов шума является формула (2.4), ибо в этом случае не потеряется информация о дипольном характере излучения звука свободной турбулентностью со сдвигом средней скорости.

3. Проведем размерный анализ звукового поля на основании решения уравнения (1.1) в форме (2.4). Для этого рассмотрим более подробно входящую в интеграл (2.4) весовую функцию $\partial T_{ij}/\partial x_j$. Используя для T_{ij}

представление (1.2) и пренебрегая членами типа $\partial V_k/\partial x_k$, получим

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \approx \rho_0 \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_j} v_j' + \rho_0 \langle V_j \rangle \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \rho_0 v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \tag{3.1}$$

Очевидно, что наибольшими по величине членами в (3.1) являются первый и второй. Для простоты рассмотрим свободный турбулентный поток с поперечным сдвигом средней скорости. Пусть средняя скорость имеет компоненты $(\langle V_1 \rangle, 0, 0)$ и $\partial \langle V_1 \rangle / \partial x_2 \neq 0$. Тогда

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \approx \rho_0 \langle V_1 \rangle \frac{\partial v_i'}{\partial x_1} + \rho_0 v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}, \qquad i=2,3 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} \approx \rho_0 \frac{\partial \langle V_1 \rangle}{\partial x_2} v_2' + \rho_0 \langle V_1 \rangle \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} + \rho_0 v_j' \frac{\partial v_1'}{\partial x_j}$$

Теперь можно представить правую часть (2.4) в виде суммы трех слагаемых

$$\rho(\mathbf{y}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\partial \langle V_1 \rangle}{\partial x_2} v_2' \frac{\partial G}{\partial x_1} dV\, dt' + \tag{3.3}$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \langle V_1 \rangle \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial x_i} dV\, dt' + \frac{\rho_0}{4\pi c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial x_i} dV\, dt'$$

Интегрируя по t' с учетом вида функции Грина G для свободного пространства

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-t') = \frac{\delta(t'-t-c^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \qquad \frac{\partial G}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial y_i}$$

получим следующее выражение для $\rho(\mathbf{y}, t)$:

$$\rho(y, t) = -\frac{\rho_0}{4\pi c^2} \int_V \frac{\partial \langle V_1(x) \rangle}{\partial x_2} \frac{\partial v_2'(x, \tau)}{\partial y_1} \frac{\partial V}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \tag{3.4}$$

$$-\frac{\rho_0}{4\pi c^2} \int_V \langle V_1(\mathbf{x}) \rangle \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{\partial v_i'(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_1} \right] \frac{dV}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} -$$

$$-\frac{\rho_0}{4\pi c^2} \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left[v_j'(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial v_i'(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_j} \right] \frac{dV}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

$$\tau = t - c^{-1} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \tau)}{\partial y_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y_i} = -\frac{1}{c} \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

то в дальнем звуковом поле, когда $|\mathbf{x}| \ll |\mathbf{y}|$, из (3.4) имеем

$$\rho(\mathbf{y}, t) \approx -\frac{\rho_0}{4\pi c^3} \frac{y_1}{|\mathbf{y}|^2} \int_V \frac{\partial \langle V_1 \rangle}{\partial x_2} \frac{\partial v_2'(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} dV - \tag{3.5}$$

$$-\frac{\rho_0}{4\pi c^3}\frac{y_i}{|y|^2}\int\limits_V \langle V_1\rangle\frac{\partial^2 v_i'(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau\partial x_1}dV-$$

$$-\frac{\rho_0}{4\pi c^3}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^2}\int\limits_V \frac{\partial}{\partial\tau}\left[v_j'(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial v_i'(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_j}\right]dV$$

Для проведения размерного анализа в дальнем поле введем характерные величины: l — линейный размер области, U — скорость, f — частота. Кроме того, $\partial\langle V_1\rangle/\partial x_2 \sim U/l$, $v_i'\sim U$, $\partial/\partial\tau\sim f$ и $\partial v_i'/\partial t\sim c\partial v_i'/\partial x_j$, поскольку излучается в виде звука только та часть пульсаций скорости, которая переносится со скоростью звука и соответствует малым пространственным волновым числам. В силу изложенного из (3.5) имеем

$$\rho\sim A\rho_0\frac{U^2}{c^3}f\frac{l^2}{|\mathbf{y}|}+B\rho_0\frac{U^2}{c^4}f^2\frac{l^3}{|\mathbf{y}|}+C\rho_0\frac{U^2}{c^4}f^2\frac{l^3}{|\mathbf{y}|} \tag{3.6}$$

Заметим, что в (3.6) второй и третий члены имеют одинаковую зависимость от характерных параметров и в силу этого они могут быть объединены. Это свидетельствует о том, что в решении (3.5) второй и третий интегралы характеризуют источники звука одного типа. При этом как второй, так и третий интегралы соответствуют более высокочастотному шуму, чем первый интеграл в правой части (3.5). Здесь следует подчеркнуть, что источники звука дипольного типа в правой части волнового уравнения (1.3) представлены в формуле (3.5) суммой дипольного и квадрупольного излучений (первый и второй интегралы соответственно). Поскольку характерная частота определяется характерной скоростью и размером ($f\sim U/l$), то (3.6) можно представить в виде

$$\rho\sim A\rho_0\frac{U^3}{c^3}\frac{l}{|\mathbf{y}|}+D\rho_0\frac{U^4}{c^4}\frac{l}{|\mathbf{y}|} \tag{3.7}$$

В формулах (3.6) и (3.7) A, B, C, D — некоторые константы, зависящие от тонкой структуры турбулентности.

Пользуясь формулами (3.5) и (3.7), можно получить следующие выражения для интенсивности звука в дальнем поле двух различных составляющих излучения — дипольной I_1 и квадрупольной I_2

$$I_1\sim\rho_0\frac{U^6}{c^3}\frac{l^2}{|\mathbf{y}|^2}=\rho_0M^3U^3\frac{l^2}{|\mathbf{y}|^2} \tag{3.8}$$

$$I_2\sim\rho_0\frac{U^8}{c^5}\frac{l^2}{|y|^2}=\rho_0M^5U^3\frac{l^2}{|y|^2}$$

Таким образом, акустическое поле свободного турбулентного потока со сдвигом может быть представлено в виде суммы дипольного и квадрупольного полей. На основании (3.8) составим отношение их интенсивностей: $I_1/I_2\sim M^{-2}$.

Отсюда следует, что при малых числах Маха ($M\ll 1$) дипольная составляющая излучения должна доминировать над квадрупольной. При этом, как показывают результаты расчетов, проведенных в [10] для сдвиговой составляющей излучения, интенсивность звукового поля струи в дальнем поле пропорциональна шестой степени скорости истечения вплоть до чисел Маха, равных 0.5. При возрастании скорости квадрупольное излучение доминирует над дипольным и при $M\to 1$ зависимость интенсивности шума от скорости приближается к закону восьмой степени, который, однако, при больших скоростях искажается за счет влияния эффектов рефракции и конвекции.

Таким образом, при небольших дозвуковых скоростях излучение звука свободной турбулентностью со сдвигом носит дипольный характер, причем в соответствии с (3.3) максимум излучения направлен вдоль основного потока.

В заключение автор благодарит Ю. Г. Блюдзе и Е. Н. Островского за полезные советы при обсуждении работы.

Поступила 20 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically, pt 1. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A., 1952, vol. 211, No. 1107.
2. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically, pt 2. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 1954, vol. 222, No. 1148.
3. *Jones I. S. F.* Aerodynamic noise dependent on mean shear. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt 1.
4. *Ribner H. S.* Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 1.
5. *Krishnappa G.* Note on the shear noise source terms a circular jet. J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1968, vol. 35, No. 4.
6. *Кузнецов В. М., Мунин А. Г.* Акустическая мощность дозвуковой струи при различных скоростях истечения. Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1371.
7. *Csanady G. T.* The effect of mean velocity variations on jet noise. J. Fluid. Mech., 1966, vol. 26, pt 1.
8. *Gerrard J. H.* An investigation of the noise produced by a subsonic air jet. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 9.
9. *Кузнецов В. М., Мунин А. Г., Науменко З. Н.* Влияние скорости истечения и начальной турбулентности на акустические характеристики дозвуковой струи. Тр. ЦАГИ, 1968, вып. 1092.
10. *Вязьменская Л. М.* Акустическое излучение дозвуковых турбулентных струй. Инж.-физ. ж., 1971, т. 20, № 4.
11. *Sayeed-ur-Rahman.* Berechnung der Schallerzeugung beim frontalen Zusammenstoss zweier Wirbelpaare. Acustica, 1971, Bd 24, Nr 1.