

## РАСЧЕТ ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ НА ПРИТУПЛЕННЫХ КОНУСАХ

В. Г. ВОРОНКИН

(Москва)

Предлагается численный метод решения уравнений сжатого вязкого ударного слоя на гладких притупленных по сфере осесимметричных конусах под нулевым углом атаки при обтекании совершенным газом. Эффективно используется идея разделения исходной системы уравнений на параболические (второго порядка) и невязкие (первого порядка) подсистемы, для решения которых применяются присущие им методы. Приведены результаты расчетов. Метод допускает естественное обобщение на случай учета неравновесных физико-химических процессов и диффузии.

В большинстве опубликованных работ, посвященных расчету сжатого вязкого ударного слоя, рассматривается либо окрестность критической точки, либо некоторая часть сферического затупления [1-5]. При этом во всех работах, кроме [4, 5], сделан ряд упрощающих предположений о картине течения. Расчету вязкого ударного слоя на боковой поверхности затупленных тел посвящено очень мало работ [6-8]. В работах [6, 7] приближенно рассмотрены только гиперboloиды и параболоиды вращения, обладающие к тому же весьма благоприятной геометрией. В работе [8] используется приближенный интегральный метод Кармана - Польгаузена для весьма упрощенной системы уравнений.

Предлагаемый здесь метод является по существу точным численным методом решения уравнений вязкого ударного слоя.

1. Под вязким ударным слоем понимается область между ударной волной и поверхностью тела, в которой существенно влияние вязкости и теплопроводности. Рассматриваются такие числа Рейнольдса, что ударную волну можно считать тонкой. Нарушение этого условия можно увидеть по результатам расчетов в случае, если градиенты продольной скорости и температуры вблизи ударной волны будут велики. Поверхность тела считается холодной. По этой причине, а также вследствие умеренных чисел Рейнольдса скольжение и скачок температуры у поверхности тела не учитываются.

В системе координат, связанной с поверхностью тела, уравнения тонкого сжатого вязкого ударного слоя в безразмерных переменных имеют вид [4, 6]

$$(1.1) \quad \frac{\rho U}{1+\sigma y} \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\sigma}{1+\sigma y} \rho UV = - \frac{1}{1+\sigma y} \frac{\partial P}{\partial y} + \\ + \frac{\text{Re}^{-1}}{r^j(1+\sigma y)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu r^j (1+\sigma y)^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\sigma U}{1+\sigma y} \right) \right]$$

$$(1.2) \quad \frac{\rho U}{1+\sigma y} \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\sigma}{1+\sigma y} \rho U^2 = - \frac{\partial P}{\partial y}$$

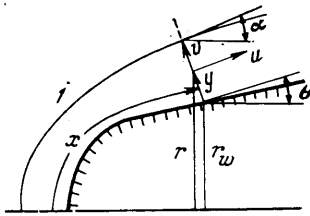
$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho U r^j) + \frac{\partial}{\partial y} [(1+\sigma y) r^j \rho V] = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\rho U}{1+\sigma y} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{U}{1+\sigma y} \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} +$$

$$(1.5) \quad + \frac{\text{Re}^{-1}}{r^j(1+\sigma y)} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{\text{Pr}} r^j(1+\sigma y) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \text{Re}^{-1} \mu \left[ \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\sigma U}{1+\sigma y} \right]^2$$

$$P = (\gamma - 1) \rho T / \gamma$$

В этих уравнениях  $r = r_w + y \cos \theta$ ;  $\text{Re} = \rho_\infty U_\infty R / \mu_\infty$  — число Рейнольдса,  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $\gamma = 1.4$  — показатель адиабаты. Смысл координат  $x$  и  $y$ , а также проекций скорости  $U$  и  $V$ , радиуса точки  $r$  и других обозначений ясен из фиг. 1, на которой  $I$  — ударная волна. Кривизна образующей тела обозначается через  $\sigma > 0$ ; для осесимметричного и плоского случаев  $j = 1$  и  $0$  соответственно. Остальные обозначения общепринятые.



Фиг. 1

В уравнениях (1.1) — (1.5) переменные, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу затупления  $R$ , проекции скорости — к скорости набегающего потока  $U_\infty$ , плотность — к плотности набегающего потока  $\rho_\infty$ , давление — к  $\rho_\infty U_\infty^2$ , температура — к  $U_\infty^2 / c_p$ , коэффициент вязкости — к его значению в набегающем потоке  $\mu_\infty$ .

Граничные условия на поверхности тела и ударной волне имеют соответственно вид

$$(1.6) \quad \begin{aligned} U = V = 0, \quad T = T_w = \text{const} \quad (y = 0) \\ U = U_s, \quad V = V_s, \quad T = T_s, \quad P = P_s \quad (y = y_s) \end{aligned}$$

где величины с индексом  $s$  соответствуют условиям за ударной волной. К системе (1.1) — (1.5) с граничными условиями (1.6) полезно добавить геометрическое соотношение для ударной волны

$$(1.7) \quad y_s' = (1 + \sigma y_s) \text{tg}(\alpha - \theta)$$

(штрих здесь и далее означает первую производную по продольной координате  $x$ ).

Наряду с тем, что эта система следует при определенных допущениях из уравнений Навье — Стокса, ее можно также рассматривать как искусственную комбинацию систем уравнений Эйлера для невязкого течения и пограничного слоя, обеспечивающую при больших числа Рейнольдса равномерно точное описание течения в невязкой части ударного слоя и в пограничном слое. При умеренных числах Рейнольдса система (1.1) — (1.5) автоматически учитывает эффекты второго порядка в теории пограничного слоя. Нижняя граница по числу Рейнольдса, определяющая область применимости рассматриваемой системы уравнений, может быть оценена путем сравнения с численными решениями уравнений Навье — Стокса [4].

Вводя следующие переменные:

$$\begin{aligned} u = U/U_s, \quad v = V/V_0 \quad (V_0 = \text{const}), \quad t = T/T_s, \quad \eta = \rho/\rho_s, \quad p = P/P_s \\ x = x, \quad z = y / y_s \end{aligned}$$

уравнения второго порядка (1.1) и (1.4) можно привести к виду

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial z} + c_2 u + c_3 + c_4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + d_1 \frac{\partial t}{\partial z} + d_2 t + d_3 + d_4 \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $c_i$  и  $d_i$  приведены в [6]. Уравнения первого порядка (1.2), (1.3) примут вид

$$(1.9) \quad \frac{\rho_s U_s V_0 y_s}{P_s (1 + \sigma y_{s,z})} \eta u \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\rho_s V_0^2}{P_s} \eta v - y_s' \frac{\rho_s U_s V_0 z}{P_s (1 + \sigma y_{s,z})} \eta u \right) \times \\ \times \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\sigma \rho_s U_s^2 y_s}{P_s (1 + \sigma y_{s,z})} \eta u^2 = - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial x} (y_s \rho_s U_s r^j \eta u) + \frac{\partial}{\partial z} [r^j \rho_s V_0 (1 + \sigma y_{s,z}) \eta v - y_s' r^j \rho_s U_s z \eta u] = 0$$

Граничные условия (1.6) переходят в следующие:

$$(1.11) \quad u=v=0, \quad t=t_w \quad (z=0) \\ u=t=p=1, \quad v=V_s/V_0 \quad (z=1)$$

Значения параметров на ударной волне определяются по соотношениям Ренкина — Гюгоню.

2. Система уравнений (1.8) — (1.10) такова, что она не позволяет получить замкнутое решение на критической линии затупления без привлечения информации о нижележащей области течения. Вследствие этого весь ударный слой на затупленном конусе был разделен на две части: на область затупления, примерно соответствующую области дозвукового течения при невязком обтекании, и нижележащую область.

Идея решения уравнений вязкого ударного слоя основывается на расщеплении исходной системы на две подсистемы: на параболические уравнения (1.8) и на невязкие уравнения первого порядка (1.9), (1.10). Решение двух параболических уравнений при известных  $p$  и  $v$  достигается стандартным конечно-разностным методом.

Невязкие уравнения первого порядка (1.9), (1.10) с граничными условиями на теле и ударной волне решаются в области затупления методом, аналогичным методу [9], а в нижележащей области — конечно-разностным методом [10].

Для применения метода [9] на сферическом затуплении выбирались четыре луча:  $x_1=0$ ,  $x_2=0.24$ ,  $x_3=0.48$ ,  $x_4=0.72$ . Уравнения (1.9), (1.10), записанные на этих лучах, имеют тот же вид, что и исходные, и являются обыкновенными дифференциальными уравнениями относительно переменной  $z$ , если известны из предыдущего приближения первые производные по  $x$ . При таком подходе уравнения могут быть решены независимо на каждом луче в каждой итерации. Необходимые производные по  $x$  определяются по предыдущей итерации. Компоненту скорости  $v$  удобнее находить из проинтегрированного по  $z$  уравнения (1.10) с учетом баланса массы в ударном слое

$$(2.1) \quad v = \frac{y_s' r^j \rho_s U_s \eta u - (\partial/\partial x) (I(z) y_s)}{r^j \rho_s V_0 (1 + \sigma y_{s,z}) \eta}$$

$$(2.2) \quad I(z) = \rho_s U_s \int_0^z r^j \eta u dz, \quad y_s = \frac{r_s^{j+1}}{(j+1)I(1)}$$

Производная  $\partial/\partial x$  в уравнении (2.1) находится по предыдущему приближению. Уравнение (2.2) используется для нахождения формы ударной волны. Давление  $p$  находится из уравнения (1.9) путем интегрирования от ударной волны, на которой  $p=1$ .

Итерационный процесс организован таким образом, чтобы совместное решение уравнений (1.8), (1.9), (2.1), (2.2) на интервале  $x$  от 0 до 0.72 обеспечило форму ударной волны с желаемой точностью, после чего расчет области затупления считается законченным.

Параметры, полученные на последнем луче при расчете области затупления, используются в качестве начальных данных для продолжения счета в нижележащей области (т. е. на оставшейся части сферического притупления и на боковой поверхности конуса). Вместо  $v$  и  $p$  удобно ввести новые функции  $v$  и  $\ln \eta$ . Уравнения (1.9), (1.10) примут вид

$$(2.3) \quad \frac{\rho_s U_s V_0 y_s}{P_s (1 + \sigma y_s z)} u \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\rho_s V_0^2}{P_s} v - \frac{\rho_s U_s V_0 y_s}{P_s (1 + \sigma y_s z)} \times \right. \\ \left. \times z \frac{y_s'}{y_s} u \right) \frac{\partial v}{\partial z} + t \frac{\partial \ln \eta}{\partial z} = \frac{\sigma \rho_s U_s^2 y_s}{P_s (1 + \sigma y_s z)} u^2 - \frac{\partial t}{\partial z}$$

$$(2.4) \quad y_s \rho_s U_s u r^j \frac{\partial \ln \eta}{\partial x} + [r^j \rho_s V_0 (1 + \sigma y_s z) v - y_s' r^j \rho_s U_s z u] \times \\ \times \frac{\partial \ln \eta}{\partial z} + r^j \rho_s V_0 (1 + \sigma y_s z) \frac{\partial v}{\partial z} = -y_s \rho_s U_s r^j \frac{\partial u}{\partial x} - \\ - u \frac{\partial}{\partial x} (y_s \rho_s U_s r^j) - \rho_s V_0 v \frac{\partial}{\partial z} [r^j (1 + \sigma y_s z)] + \rho_s U_s y_s' \frac{\partial}{\partial z} (r^j z u)$$

Уравнения (2.3), (2.4) записываются в векторно-матричном виде и решаются послойно конечно-разностным методом [10]. Для уменьшения погрешностей счета у стенки конечно-разностные уравнения на первом шаге от поверхности тела были скорректированы с учетом равенств

$$(2.5) \quad \partial p / \partial z = 0, \quad \partial v / \partial z = 0 \quad (z=0)$$

следующих строго из исходных уравнений.

Граничными условиями для (2.3), (2.4) являются  $v=0$  ( $z=0$ ),  $\ln \eta=0$  ( $z=1$ ). Условие при  $z=1$  позволяет найти в результате прямой прогонки значение  $V_s$ , которое по соотношениям Ренкина — Гюгонно связано с углом наклона ударной волны

$$V_s = (1 - 1/\rho_s) \sin \alpha \cos (\alpha - \theta) - \sin \theta$$

Решение этого уравнения при  $\rho_s$ , не зависящем от  $\alpha$ , имеет вид

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{\beta + \theta}{2}, \quad \beta = \arcsin (2a - \sin \theta), \quad a = \frac{\sin \theta + V_s}{1 - 1/\rho_s}$$

Точное решение быстро получается итерациями по (2.6) с использованием известной зависимости  $\rho_s$  от  $\alpha$ . Зная  $\alpha$ , можно по (1.7) найти  $y_s'$  и  $y_s$ .

Процесс итераций на заданном слое продолжается до тех пор, пока давление на теле не будет получено с желаемой точностью. Затем производится расчет следующего слоя.

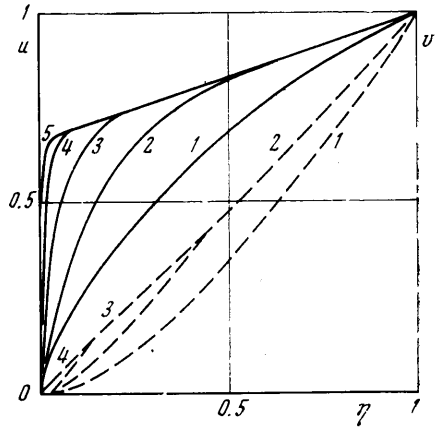
Разрешив систему уравнений (1.1) — (1.5) относительно  $\partial U / \partial x$ ,  $\partial T / \partial x$ ,  $\partial P / \partial x$ ,  $\partial V / \partial x$ , можно показать, что задача Коши для этой системы с начальными данными при  $x = \text{const}$  при условии прилипания на стенке является некорректной (вблизи стенки получается уравнение теплопроводности для отрицательного времени), поэтому послойное решение этой

системы, вообще говоря, невозможно. Для преодоления неустойчивости счета, обусловленной некорректностью задачи, производная  $du/dx$  в правой части уравнения (2.4) сносилась с предыдущей пары слоев, т. е. с точки  $n-1/2$ . Такой снос не вносит большой ошибки, поскольку функция  $u(x, z) = U/U_s$  довольно слабо изменяется вдоль тела. Во всяком случае расчеты с различными шагами по  $x$  не позволили заметить различий на графиках.

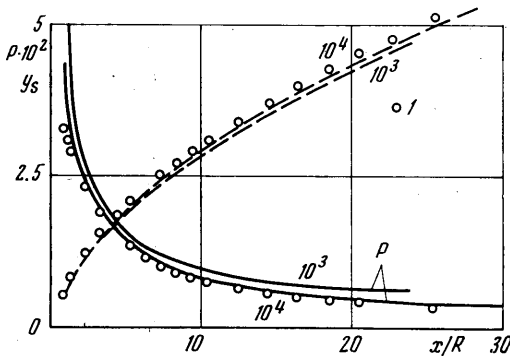
Вследствие разрыва кривизны образующей  $\sigma$  в точке сопряжения сферической части с боковой поверхностью конуса производная  $y_s'$  в этой точке также терпит разрыв (см. (1.7)), что необходимо учесть при организации счета.

При построении разностных уравнений использовалась сетка с произвольными шагами по координате  $z$ , позволившая в области больших градиентов параметров располагать достаточное количество узловых точек. В приведенных ниже расчетах обеспечено попадание не менее 15 узловых точек в пограничный слой.

3. Расчеты затупленных по сфере круговых конусов проведены при числе Прандтля  $Pg=0.72$  и с использованием закона Сатерленда для коэф-



Фиг. 2

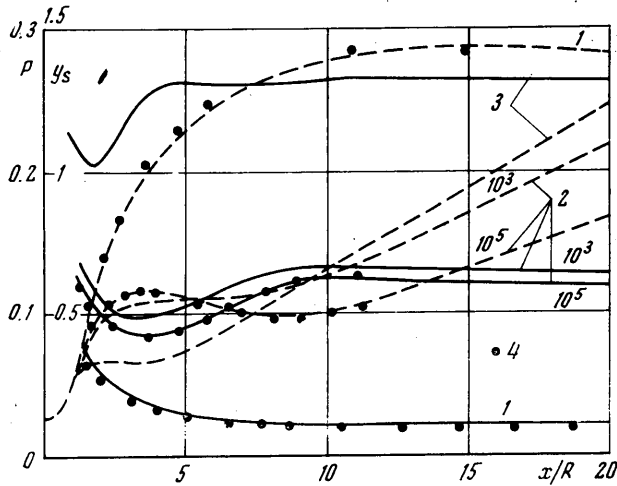


Фиг. 3

фициента вязкости  $\mu = kT^{1/2} / (1 + s/T)$ ,  $s = 110.3^\circ \text{K}$ . Показатель адиабаты  $\gamma$  принимался равным 1.4. Все расчеты выполнены при  $T_\infty = 300^\circ \text{K}$  и  $c_p T_\infty / U_\infty^2 = 0.02$ . В качестве  $V_0$  принято значение скорости за прямой ударной волной.

Распределение параметров на сферическом притуплении уже достаточно хорошо известно из опубликованных работ, поэтому на фиг. 2 приводится распределение компонент скорости  $u = U/U_s$ ,  $v = V/V_s$  (пунктир) только вдоль критической линии ударного слоя ( $x=0$ ) при числе Маха набегающего потока  $M_\infty = 20$  и для чисел Рейнольдса от  $173$  до  $1.73 \cdot 10^6$ . Кривые 1–5 соответствуют  $Re = 1.73 \cdot 10^2$ ,  $1.73 \cdot 10^3$ ,  $1.73 \cdot 10^4$ ,  $1.73 \cdot 10^5$  и  $1.73 \cdot 10^6$ . Рассматриваемый диапазон чисел Рейнольдса охватывает режимы течения от полностью вязкого ударного слоя до невязкого ударного слоя с тонким пограничным слоем, что хорошо видно из фиг. 2.

Расчеты обтекания затупленных по сфере конусов проведены при  $M_\infty = 23$  с тем, чтобы сравнить их с расчетами обтекания невязким совершенным газом [11], и охватывают диапазон чисел Рейнольдса от  $10^3$  до  $10^5$  и углов полураствора конуса  $\theta_s$  от 0 до  $30^\circ$ . Температура стенки была  $\sim 1270^\circ \text{K}$ , температура торможения  $\sim 32\,000^\circ \text{K}$ .



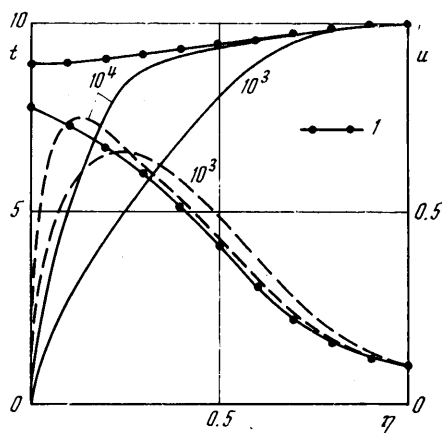
Фиг. 4

На фиг. 3 для затупленного цилиндра ( $\theta_s = 0$ ) приведено распределение давления по поверхности (сплошные кривые) и отход ударной волны  $y_s$  (пунктирные кривые) в зависимости от расстояния вдоль оси, отсчитываемого от передней точки, для чисел Рейнольдса  $10^3$  и  $10^4$ . Цифрой 1 обозначены результаты расчетов невязкого обтекания. Эти же параметры для конусов с  $\theta_s > 0$  приведены на фиг. 4 в зависимости от расстояния вдоль поверхности, отсчитываемого от критической точки. Здесь кривые 1 соответствуют  $\theta_s = 10^\circ$ ,  $Re = 10^4$ , кривые 2 —  $\theta_s = 20^\circ$ , кривые 3 —  $\theta_s = 30^\circ$ ,  $Re = 10^4$ . Сплошные линии — распределение давления, пунктирные —  $y_s$ . Результаты расчетов невязкого обтекания обозначены цифрой 4. Расчеты для конусов с  $\theta_s = 20^\circ$  проведены при  $Re = 10^3$ ,  $10^4$  и  $10^5$ . Уже при  $Re = 10^4$  распределение давления и отход ударной волны довольно близки к соответствующим величинам в случае невязкого обтекания. Зависимость этих параметров от числа Рейнольдса более сильно проявляется для конусов с  $\theta_s > 0$ , чем для цилиндра, что связано с несколько различным характером распределения  $u$  и  $\eta$  в ударном слое этих тел.

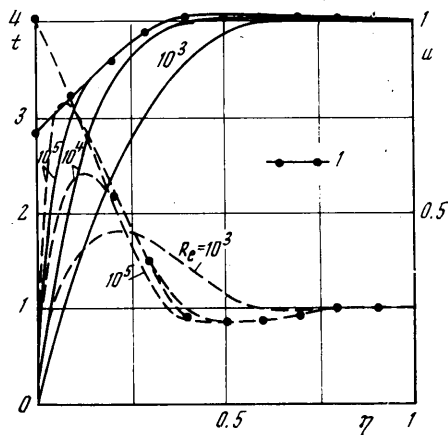
На фиг. 5 приведены профили  $u = U/U_s$  (сплошные кривые) и  $t = T/T_s$  (пунктир) для цилиндра в сечении  $x/R \approx 13.5$  при  $Re = 10^3$  и  $10^4$  в сравнении со случаем невязкого обтекания (обозначены цифрой 1). Видно, что при  $Re = 10^3$  практически весь ударный слой следует считать вязким, а при  $Re = 10^4$  пограничный слой занимает около половины ударного слоя. Аналогичные параметры в тех же обозначениях для конуса с  $\theta_s = 20^\circ$  приведены на фиг. 6 в сечении  $x/R \approx 12$  ( $x$  отсчитывается от оси) при  $Re = 10^3$ ,  $10^4$  и  $10^5$ . Из сравнения фиг. 5 и 6 можно заметить, что часть ударного слоя, занятая пограничным слоем, уменьшается с ростом угла полураствора конуса. При увеличении числа Рейнольдса профили  $u$  и  $t$  в основной части ударного слоя приближаются к невязким.

Из расчетов для больших значений  $x/R$  следует, что различие температуры при вязком и невязком обтеканиях увеличивается по мере удаления от носка, причем температура при вязком обтекании в большей части

ударного слоя значительно превышает ее значение при невязком обтекании вследствие превращения части кинетической энергии в тепловую. Это в свою очередь приводит к тому, что при больших  $x/R$  отход ударной волны в случае вязкого обтекания превышает отход в случае невязкого обтекания (см. фиг. 4). На сферическом затуплении и на конусах с  $\theta_s > 0$



Фиг. 5



Фиг. 6

при небольших  $x/R$ , а также на цилиндре превалирует влияние охлаждающего эффекта стенки, вследствие чего отход ударной волны при вязком обтекании оказывается меньше, чем при невязком.

Распределение давления поперек ударного слоя как в качественном, так и в количественном отношении (максимальное различие имеет место на поверхности конусов) сравнительно близко к распределению давления при невязком обтекании и поэтому не приводится.

Автор благодарит В. В. Лунева за обсуждение работы.

Поступила 3 X 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. Inst. Aerospace paper, 1963, No. 63-92.
2. Shih W. C. L., Krupp R. S. Viscous nonequilibrium blunt-body flow. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 1.
3. Kang S.-W. Nonequilibrium, ionized, hypersonic flow over a blunt-body at low Reynolds number. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 7.
4. Головачев Ю. П., Попов Ф. Д. Обтекание охлаждаемого сферического затупления сверхзвуковым потоком вязкого газа. ПМТФ, 1972, № 5.
5. Головачев Ю. П., Попов Ф. Д. Расчет сверхзвукового обтекания затупленных тел вязким газом при больших числах Рейнольдса. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 5.
6. Davis R. T. Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equations. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 5.
7. Анкудинов А. Л. Вязкий ударный слой около параболоида вращения. Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1448.
8. Kang S.-W., Jones W. L., Dunn M. G. Theoretical and measured electron-density distributions at high altitudes. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 2.
9. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
10. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
11. Лунев В. В., Магомедов К. М., Павлов В. Г. Гиперзвуковое обтекание притупленных конусов с учетом равновесных физико-химических превращений. М., ВЦ АН СССР, 1968.