

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ**

Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ, В. Н. ЛЯХОВ

(Москва)

Систематическое развитие теории отражения ударной волны от твердой стенки было начато в работе [1]. В ней было рассмотрено регулярное отражение и трехударная конфигурация, возникающая при маховском отражении, в предположении однородности областей между разрывами и, следовательно, прямолинейности последних.

Трудности теоретического изучения заключаются в существенной нелинейности процесса, а также в неустойчивости тангенциального разрыва, возникающего при маховском отражении. Известны аналитические решения задачи в линейной постановке для малого угла клина или слабой волны (см., например, [2-4]).

Решение в нелинейной постановке для произвольных углов клина и интенсивностей волн численно проведено, например, в работах [5, 6]. Поскольку волна была нестационарной, по приведенным кривым постоянного давления и плотности трудно выявить внутреннюю структуру течения.

В работе [7] дана постановка задачи для полной системы уравнений газовой динамики в автомодельных переменных и предложен метод решения, но результаты не приведены. Отмечаются трудности с неустойчивостью контактного разрыва.

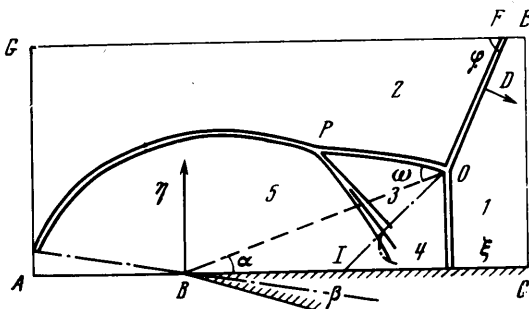
В настоящей работе постановка задачи аналогична предложенной в работе [7]. Однако для расчета разрывных течений выбран метод сквозного счета без выделения скачков уплотнения в поле течения. Ударные волны и контактные разрывы в таком случае — это области с резкими изменениями газодинамических параметров. Расчеты проводились для широкого диапазона углов взаимодействия и интенсивности ударных волн. Полученные результаты хорошо согласуются с аналитическими решениями и экспериментальными данными. В процессе решения получена информация о дополнительном повышении давления отражения после маховской ножки.

1. Для решения целесообразно воспользоваться автомодельными переменными  $\xi = x/Dt$ ,  $\eta = y/Dt$ , где  $x$  и  $y$  — декартовы координаты с центром в носике клина,  $D$  — скорость падающей волны. Вместо безразмерной временной координаты  $t$  введем  $\tau = \ln t$ .

Уравнения газовой динамики в безразмерной форме имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(A - \xi f) + \frac{\partial}{\partial \eta}(B - \eta f) + 2f = 0$$

$$f = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{vmatrix}$$



Фиг. 1

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad \gamma = c_p/c_v$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление, отнесенные к  $\rho_1$  и  $\rho_1 D^2$  соответственно. Индекс 1 относится к параметрам невозмущенного потока перед падающей волной  $FO$  (фиг. 1), индекс 2 — за волной;  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости на оси  $x, y$ , отнесенные к  $D$ .

2. Схема дифракции изображена на фиг. 1. В автомодельных переменных  $\xi, \eta$  течение стационарно. На контуре  $FEC$  задаются параметры невозмущенного потока ( $f=f_1$ ), на  $AGF$  — параметры за падающей волной ( $f=f_2$ ). При наличии условий симметрии для линии  $AB$  и непротекания на поверхности  $BC$  граничные условия полностью определены.

Начальным условием является задание  $f=f_1$  справа от линии  $FO$  (до пересечения с поверхностью клина), слева —  $f=f_2$ . Сохранение в (1.1) производных по  $\tau$  обеспечивает гиперболичность уравнений во всей рассматриваемой области, что позволяет применить метод установления по этой координате.

Интегрирование системы уравнений (1.1) осуществляется с помощью явной девятиточечной разностной схемы второго порядка точности, описанной в работах [8, 9].

3. Основное внимание при решении задачи уделено маховскому отражению и режимам регулярного взаимодействия при углах падения, близких к критическим, когда происходит переход к маховскому отражению. Результаты расчетов сравниваются с элементарной теорией регулярного ( $I$ ) и маховского ( $II$ ) отражений, [1, 4], в которой скачки предполагаются прямолинейными, а маховская ножка перпендикулярна поверхности клина.

Результаты численного решения для волны с числом Маха  $M_y$ , угла клина  $\beta=40^\circ$  и  $\gamma=1.4$  иллюстрирует фиг. 2, где кривыми  $a$  изображены линии постоянного давления, кривыми  $b$  — плотности газа. Возникающие в потоке ударные волны и контактные разрывы определяются по характерному сгущению изобар и изохор. Значения давления и плотности в зависимости от номеров кривых (верхняя строка) представлены ниже:

	1	2	3	4	5	6	7
$p/p_1$	4.1	8.8	18.9	27.7	31.2	37.1	40.3
$\rho/\rho_1$	1.53	2.60	4.47	4.74	5.27	6.87	7.14
	8	9	10	11	12	13	
$p/p_1$	37.1	40.3	49.7	52.8	56.0	59.1	
$\rho/\rho_1$	7.14	7.67	9.81	10.30	—	—	

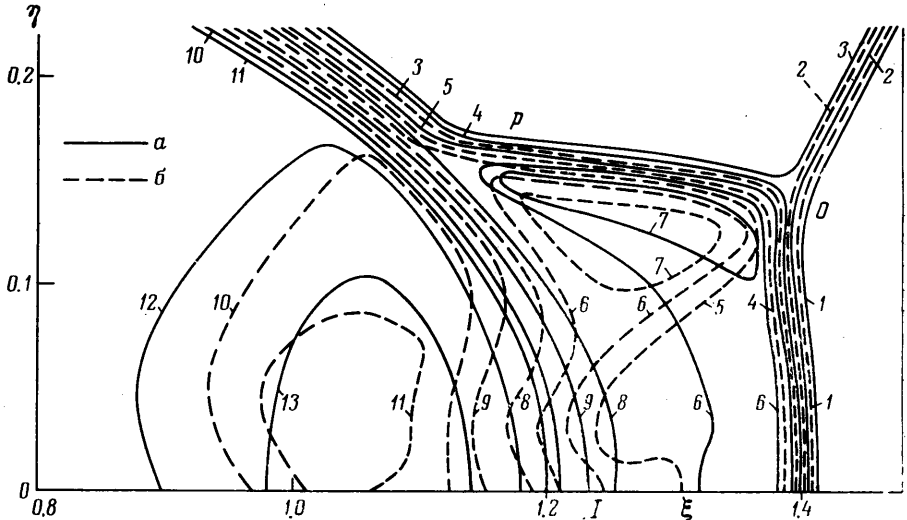
В окрестности первой тройной точки  $O$  наблюдается хорошее совпадение результатов численного решения и ( $II$ ) по газодинамическим параметрам и геометрии скачков (отличие менее 2% по углу отражения  $\omega$  и углу траектории тройной точки  $\alpha$ ).

Следует отметить, что вторая возможная в рамках ( $II$ ) конфигурация с приходящей отраженной волной (терминология по Л. Д. Ландау [10]) не реализуется при решении краевой задачи. Это соответствует экспериментальным данным [11].

На фиг. 2 видна вторая тройная точка  $P$  (ср. с фиг. 1), образованная пересечением отраженной ударной волны с внутренней волной сжатия. В экспериментах аналогичное явление наблюдается как для газов, у которых показатель адиабаты  $\gamma$  сильно меняется при переходе через скачок [12], так и с мало меняющимся показателем [11]. Настоящие расчеты

проведены с постоянным показателем  $\gamma=1.4$ . Вторая тройная точка  $P$  наблюдается и тогда, когда по данным (II) отраженная волна располагается выше траектории первой тройной точки.

Возникновение волны сжатия  $PI$  (фиг. 1) удобнее объяснять, рассматривая течение в системе координат, связанной с первой тройной точкой  $O$ . В этом случае вдоль тангенциального разрыва  $OI$  движутся потоки с числами Маха  $M_3$  и  $M_4$ , а точка пересечения контактного разрыва с поверх-



Фиг. 2

ностью клина  $I$  удаляется от точки  $O$  со скоростью  $u_4 < u_3$ . Таким образом, газ области  $3$ , имеющий относительно точки  $I$  скорость  $u = u_3 - u_4$ , тормозится, приближаясь к точке  $I$ , и поворачивает внутри угла  $OIB$ . В результате этого при определенных режимах течения возникают волны сжатия, которые могут образовать всякий скачок уплотнения, приходящий во вторую тройную точку  $P$ . В тех случаях, когда величина  $u/a_3$  ( $a_3$  — скорость звука в области  $3$ ) значительно превышает единицу, скачок может быть присоединенным к точке разворота  $I$ . На фотографиях работы [13] просматривается конфигурация, при которой скачок выходит из точки  $I$ . При уменьшении значения  $u/a_3$  возникает отошедшая нестационарная волна, удаляющаяся от точки  $I$ . Наконец, еще меньшие значения  $u/a_3$  обуславливают возникновение слабых волн сжатия, вызывающих лишь искривление отраженной ударной волны или даже вовсе не влияющих на форму последней.

Конфигурация в окрестности второй тройной точки, по-видимому, ближе к типу, рассмотренному в [14], когда пересекаются две приходящие ударные волны. При этом в области  $5$  должны возникнуть контактный разрыв и волна сжатия (или разрежения). Интенсивности последних очень малы, поэтому в численном сквозном счете их трудно выделить.

Координата второй тройной точки определяется довольно точно по схеме, предложенной в работе [12]. По этой схеме, точкой  $P$  является место пересечения отраженной ударной волны с окружностью звуковых возмущений радиуса  $a_3$ , источник которых сносится потоком  $3$  со скоростью  $u_3$  вдоль контактного разрыва  $OI$  от первой тройной точки. Такая оценка хорошо согласуется с экспериментами [12] и с настоящими расчетами.

Для угла клина  $\beta=40^\circ$  и  $\gamma=1.4$  на фиг. 3 изображено распределение давления, отнесенного к давлению нормального отражения

$$p_0 = \frac{1 - \gamma + (3\gamma - 1)p_2/p_1}{1 + \gamma + (\gamma - 1)p_2/p_1} p_2/\rho_1 D^2$$

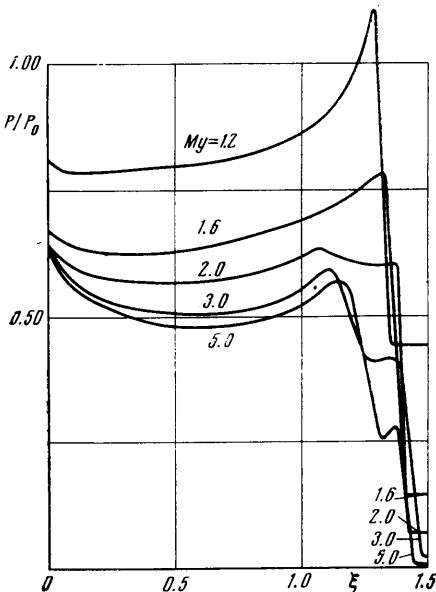
По оси абсцисс отложено расстояние  $\xi$  от острия клина, параметром является число Маха  $M_y$  ударной волны. Видно, что в окрестности точки *I* (фиг. 1) происходит дополнительный подъем давления в образовавшейся волне *PI*, который уменьшается с понижением интенсивности падающей волны. При  $M_y \lesssim 1.8$  дополнительный подъем давления исчезает совсем.

При числе  $M_y=3$  проведены расчеты по определению влияния угла падения  $\varphi=\pi/2-\beta$  на структуру взаимодействия. На фиг. 4 изображены кривые распределения давления по поверхности клина для  $\gamma=1.4$  при различных значениях  $\varphi$ .

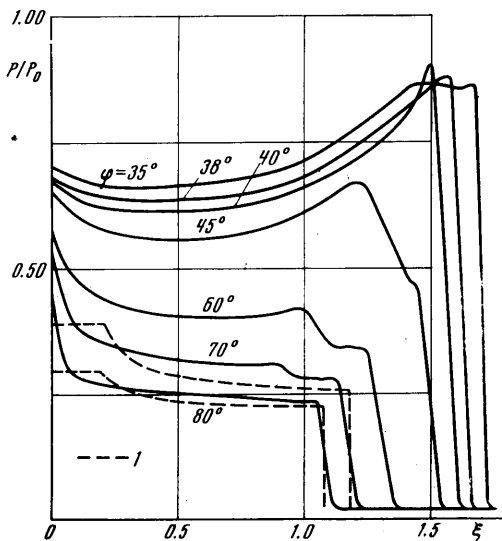
Линией *1* на фиг. 4 показано решение работы [2], полученное для малых углов клина. Различный характер кривых в окрестности  $\xi=0$  объясняется тем, что пересчет по линейной зависимости был проведен для кривой распределения давления по поверхности при  $p_2/p_1=10$  ( $M_y \approx 2,952$ ) и  $\beta=0.1$  рад ( $5.7^\circ$ ). Такой режим обтекания клина газом за падающей волной происходит с присоединенным скачком уплотнения, и около носика возникает область постоянных параметров. Это различие несущественно при анализе течения вдали от носика. В районе маховской ножки для  $\varphi=80^\circ$  наблюдается расхождение до 6%, связанное с нелинейностью процесса отражения. Использование линейного решения при меньших углах падения ( $\varphi=70^\circ$ ) дает погрешность  $\sim 15 \div 20\%$ , обусловленную дополнительным сжатием.

Давление в районе острия клина можно оценить по давлению торможения потока *2* за падающей волной, если пренебречь нестационарностью отраженного скачка, так как скорость его удаления от клина вдоль плоскости симметрии невелика.

На фиг. 5 для  $M_y=3$  сплошными линиями *1* и *2* показаны результаты численного решения, характеризующие максимальное давление при регу-



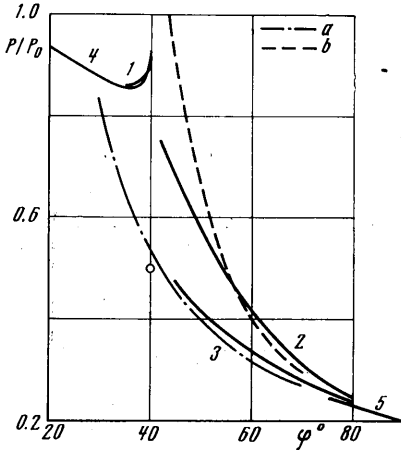
Фиг. 3



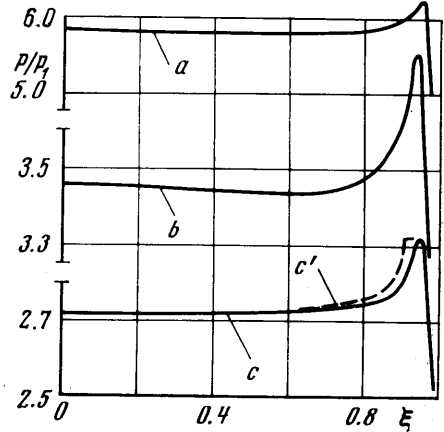
Фиг. 4

лярном и маховском отражениях соответственно,  $\beta$  — давление непосредственно за маховской ножкой. Сплошные линии 4 и 5 — результаты (I) и работы [4] соответственно, кривая  $a$  — давление по (II), кривая  $b$  — давление торможения потока  $\beta$ .

Сравнение полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными свидетельствует о том, что модель идеальной жидкости хорошо описывает процесс дифракции ударной волны на клине. В частности,



Фиг. 5



Фиг. 6

для  $M_v=3$ ,  $\beta=24^\circ$  и  $\gamma=1.4$  различие между соответствующими величинами отношения максимального давления к давлению за маховской ножкой, полученных в результате численного решения и эксперимента работы [12], не превышает погрешностей, определяемых толщиной линий графиков.

В некоторой области  $\varphi < \varphi_c$  ( $\varphi_c$  — критический угол падения, выше которого регулярное отражение невозможно) локальное рассмотрение задачи о взаимодействии ударной волны с клином допускает как регулярное, так и маховское отражения. При этом из (I) известно, что в окрестности  $\varphi_c$  зависимость величины давления отражения от угла падения  $\varphi$  не монотонна. Вопрос о реализации возрастающей ветви кривой регулярного отражения или переходе при  $\varphi < \varphi_c$  на маховское с обеспечением монотонной зависимости максимального давления от угла падения  $\varphi$  до настоящего момента остается открытым. В связи с этим расчеты в окрестности  $\varphi \approx \varphi_c$  проводились особенно тщательно. Было обнаружено, что при отражении ударной волны от клина при углах падения, близких к  $\varphi_c$ , реализуется режим с немонотонной зависимостью давления от угла  $\varphi$ , и такое решение устойчиво. Значения максимальных давлений (кривая 1 на фиг. 5) хорошо согласуются с данными (I) (кривая 4). При  $\varphi \rightarrow \varphi_c$  область постоянных параметров на поверхности клина уменьшается (фиг. 4) и течение за отраженной волной относительно точки взаимодействия становится дозвуковым.

Однако при дифракции ударной волны на теле с криволинейной образующей (например, на сфере или цилиндре) немонотонный характер зависимости максимального давления от угла падения  $\varphi$  не наблюдается. Об этом свидетельствуют экспериментальные данные [15] и результаты численного исследования [16], в котором расчеты специально проводились с существенным увеличением числа узлов разностной сетки (шаг по

углу  $\Delta\varphi \approx 0.75^\circ$ ). Таким образом, при взаимодействии ударной волны с поверхностью сферы или цилиндра переход от регулярного отражения к маховскому наступает при углах падения  $\varphi < \varphi_c$ .

Изложенный метод естественным образом обобщается на случай, когда дифракция волны происходит на клине, обтекаемом сверхзвуковым потоком с числом Маха  $M_H$ . В этом случае на части границы  $EC$  (фиг. 1), примыкающей к поверхности клина и отсекаемой присоединенным скачком, задаются значения, соответствующие параметрам на поверхности клина при обтекании его потоком с числом  $M_H$ . На фиг. 6 представлено распределение давления по поверхности клина для следующих режимов течения: кривые  $a$  и  $b - \beta = 15^\circ$ ,  $M_H = 2$ ,  $M_y = 1.5$  и  $1.2$  соответственно, кривая  $c - \beta = 15.5^\circ$ ,  $M_H = 2.207$ ,  $M_y = 1.061$ .

Для последней кривой проведено сравнение с линейным решением [17], результаты которого представлены кривой  $c'$ . Наблюдается хорошее согласие по величинам давления. Различие характеров кривых в окрестности точки пересечения преломленного скачка с поверхностью клина объясняется, видимо, тем, что при данном режиме невозможно регулярное отражение.

Поступила 6 II 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Polachek H., Seeger R. J. On shock-wave phenomena: interaction of shock-waves in gases. Proc. Sympos. Appl. Math. Brown Univ. 1947, vol. 1, N. Y., Amer. Math. Soc. Publ., 1949.
2. Lighthill M. J. The diffraction of blast. 1. Proc. Roy. Soc., 1949, A198, No. 1055.
3. Ludloff H. F. On aerodynamics of blasts. Adv. Appl. Mech., vol. 3, N. Y., Acad. Press., 1964.
4. Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М., «Машиностроение», 1973.
5. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. Ж. вычислит. матем. и матем. физ. 1961, т. 1, № 2.
6. Schneyer G. P. Numerical simulation of regular and Mach reflection in a shock tube. Topical report, S<sup>3</sup> IRED Project 9041-4314, SSS-IR-73-1711, May 24, 1973.
7. Richtmyer R. D. Progress report on the Mach reflection calculation. Report NYO 9764, Courant Inst. Math. Sci., N. Y. Univ., 1961.
8. Каширский А. В., Корovin Ю. В., Чудов Л. А. Явный разностный метод для расчета двумерных нестационарных задач о движении продуктов детонации. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 19. М., Изд. МГУ 1972.
9. Балакин В. Б., Буланов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке. Инж.-физ. ж., 1971, т. 21, № 6.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
11. Семенов А. Н., Сыщикова М. П., Березкина М. К. Экспериментальное изучение особенностей маховского отражения в ударной трубе. Ж. техн. физ. 1970, т. 40, вып. 5.
12. Gvozdeva L. G., Vazhenova T. V., Predvodjteleva O. A., Fokeev V. P. Pressure and temperature at the wedge surface for Mach reflection of strong shock waves. Astronautica acta, 1970, vol. 15, No. 5, 6.
13. Merritt D. L. Mach reflection on a cone. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 6.
14. Росляков Г. С. Взаимодействие плоских скачков одного направления. В сб. «Численные методы в газовой динамике», вып. 4. М., Изд-во МГУ 1965.
15. Голубинский А. И., Соколов К. Б. Исследование распределения давления по поверхности плоских и цилиндрических тел при падении на них взрывной волны. Тр. ЦАГИ, 1970, № 1298.
16. Белошицкий А. В., Крикунов В. В., Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н. Исследование различных газодинамических течений с помощью явных разностных схем сквозного счета. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1973, № 30.
17. Гер-Минасянц С. М. Дифракция плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.