

К ОКОЛОЗВУКОВОМУ ОБТЕКАНИЮ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ
С ПРОТОКОМ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТЕКАЮЩЕЙ ИЗ ПРОТОКА
СТРУИ

А. Н. КРАЙКО, Р. К. ТАГИРОВ

(Москва)

Получены законы подобия для околозвукового обтекания осесимметричных тел с протоком типа мотогондолы воздушно-реактивного двигателя (или его кормовой части) при наличии струи, истекающей из сопла. Справедливость установленных законов подтверждается результатами численного решения задач околозвукового обтекания исследуемых тел, выполненного путем интегрирования полной нелинейной системы уравнений течения.

1. Рассмотрим стационарное околозвуковое обтекание невязким и нетеплопроводным газом осесимметричной конфигурации, составленной из двух полубесконечных цилиндров и заключенного между ними нецилиндрического участка длины l , как показано на фиг. 1, а (x, y — оси цилиндрической системы координат, газ течет слева направо). Начальное сечение нецилиндрического участка («тела») совместим с плоскостью $x=0$. Рассматриваемая ситуация сходна с «расчетным» режимом обтекания мотогондолы воздушно-реактивного двигателя, когда соответствующие струи близки к полубесконечным цилиндрам. Случай истечения струи из примыкающей к полубесконечному цилиндру кормовой части (фиг. 1, б) будет рассмотрен впоследствии и без замены струи цилиндром.

Пусть p — давление, ρ — плотность, i и s — удельные энтальпия и энтропия, а u и v — проекции вектора скорости газа q на оси x и y . Параметрам равномерного (изэнергетического и изэнтропического) набегающего потока будем приписывать нижний индекс ∞ . В силу стационарности течения и идеальности газа изэнергетичность сохраняется для всего потока. Кроме того, так как при околозвуковых скоростях интенсивность ударных волн, образующихся в сверхзвуковых зонах, мала даже для прямого скачка, то течение можно считать всюду и изэнтропическим. В данном приближении вне поверхностей разрыва должны выполняться уравнения

$$(1.1) \quad (a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2uv \frac{\partial u}{\partial y} + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a^2 v}{y} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 2i(a, s_\infty) + q^2 = 2I_\infty \quad (q^2 = u^2 + v^2)$$

в которых a — скорость звука, q — модуль скорости, а s_∞ и I_∞ — заданные константы. В силу последнего уравнения все термодинамические параметры — функции только q , причем можно показать, что $dp/dq = -\rho q$ и $d\rho/dq = -\rho q a^{-2}$. Для совершенного газа с показателем адиабаты κ

$$(1.2) \quad i(a, s) = i(a) = a^2 / (\kappa - 1)$$

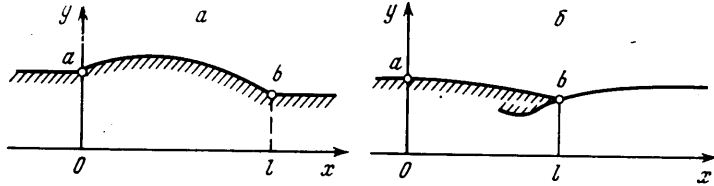
Соотношения на скачках с учетом справедливого в данном приближении условия сохранения энтропии и того, что конечное равенство из (1.1)

выполняется во всем потоке, после упрощений, обусловленных малой интенсивностью скачков, сводятся к равенствам

$$(1.3) \quad u_{\tau+} = u_{\tau-}, \quad u_{n+} u_{n-} = a_*^2 + (2\alpha^{-1} - 1) u_{\tau-}^2$$

$$(1.4) \quad \alpha = 2(1 + a_*/\beta_*) \quad (\beta = (\partial i / \partial a)_s = -2(\partial^2 p / \partial \rho^2)_s / \rho a^3)$$

Здесь u_n и u_τ — нормальная и касательная к поверхности скачка составляющие q ; индекс минус (плюс) приписан параметрам потока перед (после) скачка; звездочкой помечены критические величины, отвечающие



Фиг. 1

$q=a$ в последнем уравнении из (1.1), причем связь между производными $(\partial i / \partial a)_s$ и $(\partial^2 p / \partial \rho^2)_s$, есть следствие только термодинамических соотношений и формулы $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$. Для совершенного газа в согласии с (1.2) и

$$(1.4) \quad \alpha = 1 + \kappa$$

Если $y = y_s(x)$ — уравнение ударной волны, то

$$(1.5) \quad u_n = (v - u y_s') / \sqrt{1 + y_s'^2}, \quad u_\tau = (u + v y_s') / \sqrt{1 + y_s'^2}$$

Здесь и далее штрихом обозначаются полные производные по соответствующему аргументу.

Если $y = y_w(x)$ — уравнение образующей тела, а u_∞ — скорость набегающего потока (известная константа), то в случае фиг. 1, a граничные условия рассматриваемой задачи записываются в виде

$$(1.6) \quad v(x, y_w) = y_w'(x) u(x, y_w) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$v(x, y) \rightarrow 0, \quad u(x, y) \rightarrow u_\infty \quad (x \rightarrow -\infty)$$

2. Рассмотрим тела, принадлежащие следующему семейству:

$$(2.1) \quad y_w(x) = Y + \tau l \varphi(x^\circ) \quad (x^\circ = x / l)$$

где $\varphi(x^\circ)$ — фиксированная функция порядка единицы, а τl характеризует отклонение ординаты контура от цилиндра радиуса Y . В рамках анализа, используемого при выводе законов подобия, в качестве Y можно брать радиус любого из полубесконечных цилиндров. Однако при применении указанных законов к реальным конфигурациям под Y лучше понимать радиус некоторого «среднего» цилиндра.

Наряду с x° введем новые переменные (с верхним значком градус) равенствами

$$(2.2) \quad y = Y(1 + k^y y^\circ), \quad u = a_*(1 + k^u u^\circ), \quad v = a_* k^v v^\circ$$

где k^y, \dots — пока неопределенные масштабные множители. Для цилиндрического тела ($\tau = 0$) имеем $v^\circ = 0$, а $k^u u^\circ$ — относительное отклонение u_∞ от a_* . Следовательно, при околосвуковом обтекании тел из семейства (2.1) с $\tau \ll 1$ вне небольших окрестностей тех точек излома, в которых поток полностью затормаживается, $k^u u^\circ$ и $k^v v^\circ$ будут малы. Тогда из (2.2)

и конечного уравнения из (1.1) с точностью до членов первого порядка включительно

$$a^2 = a_*^2 - (2a^3 / \beta) * k^u u^0$$

Подставим полученное выражение для a^2 в (1.1) и упростим указанную систему, отбрасывая в ее первом уравнении члены второго и более высоких порядков в коэффициентах перед производными, а также слагаемое $v(\partial u / \partial y)$. Кроме того, линеаризуем условие непротекания из (1.6) и упростим соотношения (1.3) и (1.5), учитывая, что в слабозвуковом околозвуковом потоке угол скачка с осью x близок к $\pi/2$ и, следовательно, $|y_s'| \gg 1$. Если затем масштабные множители в (2.2) положить равными

$$(2.3) \quad k^y = l / Y(\alpha\tau)^{1/3}, \quad k^u = \tau^{2/3} / \alpha^{1/3}, \quad k^v = \tau$$

то уравнения (1.1), соотношения на скачках и граничные условия (1.6) примут вид

$$(2.4) \quad u^0 \frac{\partial u^0}{\partial x^0} - \frac{\partial v^0}{\partial y^0} - \frac{v^0}{y^0 + Y^0} = 0, \quad \frac{\partial u^0}{\partial y^0} - \frac{\partial v^0}{\partial x^0} = 0$$

$$u_+^0 - u_-^0 = (v_-^0 - v_+^0) f', \quad (u_+^0 + u_-^0) f'^2 = -2 \quad (y^0 = f(x^0))$$

$$v^0(x^0, 0) = \begin{cases} \varphi'(x^0) & (0 < x^0 < 1) \\ 0 & (x^0 < 0, x^0 > 1) \end{cases}$$

$$v^0(x^0, y^0) \rightarrow 0, \quad u^0(x^0, y^0) \rightarrow K \quad (x^0 \rightarrow -\infty)$$

Здесь функция $f(x^0)$ введена так, что $y_s(x) = Y(1 + k^y f(x^0))$. Поэтому в переменных x^0, y^0 уравнение скачка есть $y^0 = f(x^0)$. Наконец, константы K и Y^0 равны

$$(2.5) \quad K = (\lambda_\infty - 1) \alpha^{1/3} / \tau^{2/3} = (M_\infty - 1) / (\sigma\tau)^{2/3}, \quad Y^0 = Y(\alpha\tau)^{1/3} / l$$

В (2.5) при переходе от $\lambda_\infty = u_\infty / a_*$ к числу Маха $M_\infty = u_\infty / a_\infty$ использована связь $\lambda_\infty - 1 = (M_\infty - 1) / \alpha$, справедливая при околозвуковых скоростях.

Так как в уравнения и условия (2.4) кроме x^0 и y^0 входят только комбинации (2.5), то последние являются параметрами подобия при околозвуковом обтекании тел из семейства (2.1). Следовательно,

$$(2.6) \quad u/a_* = 1 + \tau^{2/3} \alpha^{-1/3} u^0, \quad v/a_* = \tau v^0$$

$$c_p = 2(p - p_\infty) / \rho_\infty u_\infty^2 = 2\tau^{2/3} \alpha^{-1/3} (K - u^0)$$

$$c_x = \frac{1}{lY} \int_0^l c_p y_w y_w' dx = \frac{\tau^{1/3}}{\alpha^{1/3}} c^0, \quad y^0 = (y - Y) (\alpha\tau)^{1/3} / l$$

Здесь c_p — коэффициент давления; c_x — коэффициент волнового сопротивления; u^0 и v^0 — функции x^0 и y^0 , а также параметров подобия; c^0 — функция только параметров подобия.

Линеаризованная запись в (2.4) условия непротекания справедлива при выполнении неравенства $\tau l \ll Y$. Если $\tau l \gg Y$, то указанное условие следует записать и линеаризовать так же, как при получении околозвукового закона подобия для тонких остроконечных тел вращения [1, 2], контур которых дается формулой $y_w = \tau l \varphi^0(x^0)$ с фиксированной функцией $\varphi^0(x^0)$. Переходя от $\varphi(x^0)$, введенной в (2.1), к $\varphi^0(x^0)$, а затем линеаризуя и снося на ось симметрии условие непротекания, записанное для произведения uv , найдем что при $\tau l \gg Y$ закон околозвукового подобия для тел

из семейства (2.1) принимает вид

$$(2.7) \quad u/a_* = 1 + \tau^2 u^\circ, \quad v/a_* = \tau^3 \alpha^{1/2} v^\circ \\ c_p = 2\tau^2 (K - u^\circ), \quad c_x = (l\tau^4/Y) c^\circ$$

Здесь, как и в (2.6), u° и v° — функции x° , y° и параметров подобия, а c° — функция только параметров подобия. Здесь

$$x^\circ = x/l, \quad y^\circ = y\tau\alpha^{1/2}/l, \quad K = (M_\infty - 1)/\alpha\tau^2, \quad Y^\circ = Y/\tau l$$

В плоском случае, когда $Y^\circ = \infty$, из (2.6) получаем закон подобия С. В. Фальковича [1]. С другой стороны, для тел из семейства (2.1), начинающихся или заканчивающихся на оси симметрии, $Y/\tau l = 0.5$ и (2.7) сводится к закону подобия Т. Кармана [1].

При получении формул подобия был сделан ряд допущений, нуждающихся в проверке, которая может быть выполнена с использованием (2.6) или (2.7). Так, если $\tau l \ll Y$, то отношение $v(\partial u/\partial y)/(\partial v/\partial y)$ оказывается порядка $\tau^{2/3}$, что оправдывает пренебрежение слагаемым $v(\partial u/\partial y)$ при упрощении первого уравнения системы (1.1). Кроме того, для справедливости перехода от (1.3) и (1.5) к (2.4) требуется малость отношения $v/(u - a_*)y_s'$, которое при $\tau l \ll Y$ также оказывается порядка $\tau^{2/3}$. Аналогичные проверки могут быть сделаны и при $\tau l \gtrsim Y$.

3. Пусть теперь из сечения $x=l$ истекает струя газа (фиг. 1, б), причем ограничимся случаем, когда поток на срезе сопла изэнэргетичен и изэнтропичен. Тогда течение в струе изэнэргетично, а в предположении малой интенсивности скачков, которые могут возникнуть в струе, и изэнтропично также при $x > l$. Параметрам газа в начальном сечении струи будем приписывать нижний индекс нуль.

При сделанных предположениях уравнения, описывающие течение в струе, отличаются от (1.1) лишь последним уравнением, которое здесь имеет вид

$$(3.1) \quad 2i(a, s_0) + q^2 = 2I_0$$

причем если во внешнем потоке и в струе текут разные газы, то функции $i(a, s)$ в (1.1) и (3.1) будут различными.

Граница струи находится в процессе решения задачи и отличается от прямой $y = \text{const}$. На указанной границе — линии тангенциального разрыва — выполняются условия отсутствия нормальной к разрыву составляющей вектора скорости и непрерывности давления. На оси струи обращается в нуль вертикальная компонента v . Дополнительные условия, определяющие течение в струе, а следовательно, и во всем потоке, зависят от режима истечения. Так, если поток на срезе сопла сверхзвуковой, то при $x=l$ должны быть известны все параметры струи. Ограничиваясь случаем равномерного поступательного потока в начальном сечении струи, необходимые условия сформулируем в виде

$$(3.2) \quad u(x, y) = u_0, \quad v(x, y) = 0 \quad (x=l, 0 \leq y \leq y_b)$$

Здесь y_b — ордината точки b , а u_0 — заданная константа, причем $u_0 > a_0$, т. е. $M_0 > 1$.

При получении закона подобия, как и выше, рассматриваются слабовозмущенные течения, возмущение которых теперь вызывается двумя причинами: нецилиндричностью тела ($\tau \neq 0$) и отличием давления на срезе сопла (p_0) от давления набегающего потока (p_∞) или p_0 от p_* . Отношение $(p_0 - p_*)/p_*$, как и τ , предполагается малым. Для течения в струе линеаризация проводится относительно равномерного поступательного потока с энтропией s_0 , полной энтальпией I_0 и давлением p_* . Приписывая параметрам такого потока звездочку сверху, будем иметь: $p^* = p_*$, $a^* = a(p_*, s_0)$, $v^* = 0$ и $u^* = q^*$, где q^* находится из (3.1) при $a = a^*$. В согласии с этим из равенства $p_0 = p_*$ следует, что $u_0 = u^*$, причем $a^* \neq u^*$, и ни одна из этих величин не есть критическая скорость струи. В то же время из-за малого отличия p_0 от p_* скорость u^* близка к u_0 , а $M^* = u^*/a^* \approx M_0$.

Не выписывая линеаризованные уравнения для сверхзвукового течения в струе, а также перечисленные выше условия на границе и на оси струи и опуская анализ, аналогичный выполненному в предыдущем пункте, приведем окончательные формулы, дающие соответствующий закон подобия. При этом здесь и далее ограничимся случаем $\tau l \ll Y$. В согласии с указанным законом для струи

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u/u^* &= 1 + (Y\tau/l)u^{\circ\circ}, & v/u^* &= \tau v^{\circ\circ} \\ c_p &= 2(p-p^*)/\rho^*u^{*2} = -2(Y\tau/l)u^{\circ\circ} \\ y_{\Gamma} &= Y + \tau l \chi \end{aligned}$$

Здесь $u^{\circ\circ}$ и $v^{\circ\circ}$ — функции x° , $y^{\circ\circ} = (y-Y)/Y$ и параметров подобия, которыми теперь наряду с (2.5) являются

$$(3.4) \quad \begin{aligned} K_1 &= (M^{*2}-1)Y^2/l^2, & K_2 &= \rho^*u^{*2}/\rho_*a_*^2 \\ K_3 &= (u_0-u^*)l/Yu^*\tau \end{aligned}$$

Функция χ в (3.3) зависит от x° и всех параметров подобия, причем $y = y_{\Gamma}(x)$ — уравнение границы струи. Наконец, для внешнего потока сохраняются формулы (2.7), в которых u° , v° и c° теперь зависят не только от K и Y° , но и от K_1 , K_2 и K_3 .

Итак, в данном случае число параметров подобия возросло до пяти, т. е. на три больше, чем при замене струи цилиндром. Тем не менее это меньше числа безразмерных комбинаций, которые можно составить из определяющих параметров задачи. Так, даже для совершенных газов с показателями адиабаты κ и κ_0 и газовыми постоянными R и R_0 для внешнего потока и для струи соответственно указанных комбинаций девять: Y/l , τ , M_{∞} , M_0 , κ , κ_0 , R/R_0 , I_{∞}/I_0 и s_{∞}/s_0 .

Если струя дозвуковая, то вместо задания скорости на выходе из сопла, т. е. условий (3.2), требуется ввести условие непротекания на его стенке. Ограничимся при этом соплами, близкими к цилиндрическому каналу, контуры которых задаются уравнением

$$(3.5) \quad y = Y + \varepsilon l \zeta(x^{\circ})$$

где $\zeta(x^{\circ})$ — фиксированная функция порядка единицы, такая, что $\varepsilon \zeta(1) = \tau \varphi(1)$, а $\varepsilon \ll 1$ характеризует отклонение контура сопла от контура цилиндрической трубы радиуса Y . В соответствии с (3.5), используя условие непротекания на стенке сопла, можно показать, что после замены K_3 в (3.4) на $K_3 = \varepsilon/\tau$ в рассматриваемом случае сохраняется установленный выше закон подобия для сверхзвуковой струи.

Тем же путем получается закон подобия для околозвуковой струи. Здесь параметрами подобия наряду с K и Y° из (2.5) служат

$$(3.6) \quad \begin{aligned} K_1 &= \alpha_0 \tau (Y/l)^3, & K_2 &= \gamma, & K_3 &= \varepsilon/\tau, & K_4 &= \delta \alpha^{1/2} \tau^{-2/3} \\ & (\gamma = (\rho_* a_*^2)_0 / \rho_* a_*^2, & \delta &= (p_{*0} - p_*) / \rho_* a_*^2) \end{aligned}$$

Кроме того, в этом случае u^* , ρ^* и p^* в (3.3) следует заменить на a_{*0} , ρ_{*0} и p_{*0} , где, как и ранее, индекс нуль приписан параметрам струи.

Все полученные выше законы подобия сохраняются для бесконечных и полубесконечных тел, близких к круговому цилиндру. В этих случаях под l понимается такой параметр с размерностью длины, который позволяет записать уравнения контуров тела и сопла в форме (2.1) и (3.5). Кроме того, если тело простирается до бесконечности влево, то начало координат следует совмещать с началом цилиндрического участка или с плоскостью среза сопла.

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если дозвуковая или околосзвуковая струя вытекает из цилиндрической трубы, т. е. функция $\zeta(x^\circ)$ в (3.5) постоянна, то, как показывает анализ, параметр $K_3 = \varepsilon/\tau$ оказывается несущественным.

Если постоянна функция $\varphi(x^\circ)$ в (2.1), что отвечает цилиндрическому телу, то в полученных выше для дозвуковой и околосзвуковой струй законах подобия под l следует понимать размер, характеризующий форму канала. Кроме того, в соответствующих формулах τ заменяется на ε и, как и в предыдущем случае, из числа параметров подобия исключается K_3 . Наконец, здесь и в последующих примерах, относящихся к истечению струи из цилиндрического тела, начало координат удобно помещать в плоскость среза сопла.

При истечении из цилиндрического тела сверхзвуковой струи с постоянными параметрами в сечении среза сопла соответствующий закон подобия принимает вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} v/a_* &= 1 + (M^{*2} - 1)\alpha^{-1}u^\circ, & v/a_* &= (M^{*2} - 1)^{3/2}\alpha^{-1}v^\circ \\ c_p &= 2(p - p_\infty)/\rho_\infty u_\infty^2 = 2(M^{*2} - 1)\alpha^{-1}(K_1 - u^\circ) & (0 \leq y^\circ \leq \infty) \\ u/u_* &= 1 + (M^{*2} - 1)\alpha^{-1}u^\circ, & v/u_* &= (M^{*2} - 1)^{3/2}\alpha^{-1}v^\circ \\ c_p &= 2(p - p^*)/\rho^* u^{*2} = 2(1 - M^{*2})\alpha^{-1}u^\circ & (-1 \leq y^\circ \leq 0) \\ y_\Gamma &= Y + Y\chi(x^\circ, K, K_1, K_2) \\ x^\circ &= x/Y(M^{*2} - 1)^{1/2}, & y^\circ &= (y - Y)/Y \\ K &= (M_\infty - 1)/(M^{*2} - 1), & K_1 &= \rho^* u^{*2}/\rho_* a_*^2, & K_2 &= (u_0 - u^*)\alpha/u^*(M^{*2} - 1) \end{aligned}$$

Здесь u° , v° , u° и v° — функции x° , y° , K , K_1 и K_2 . Если из цилиндрического канала в цилиндрическом теле вытекает дозвуковая струя, то в (4.1) остается лишь два параметра подобия K и K_1 . Наконец, для дозвуковой струи, вытекающей из такой же конфигурации, закон подобия формулируется следующим образом:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u/a_* &= 1 + \delta u^\circ, & v/a_* &= \alpha_0^{1/2}|\delta|^{1/2}v^\circ \\ c_p &= 2(p - p_\infty)/\rho_\infty u_\infty^2 = 2\delta(K - u^\circ) & (0 \leq y^\circ \leq \infty) \\ u/a_{*0} &= 1 + \delta u^\circ, & v/a_{*0} &= \alpha_0^{1/2}|\delta|^{1/2}v^\circ \\ c_p &= 2(p - p_{*0})/\rho_{*0} a_{*0}^2 = -2\delta u^\circ & (-1 \leq y^\circ \leq 0) \\ y_\Gamma &= Y + Y\delta^2\alpha_0\chi(x^\circ, K, K_1, K_2) \\ x^\circ &= x/Y(\alpha_0|\delta|)^{1/2}, & y^\circ &= (y - Y)/Y \\ K &= (M_\infty - 1)/\alpha\delta, & K_1 &= \gamma, & K_2 &= \alpha_0/\alpha \end{aligned}$$

Здесь u° , v° , u° и v° — функции x° , y° , K , K_1 и K_2 , а γ и δ те же, что в (3.6).

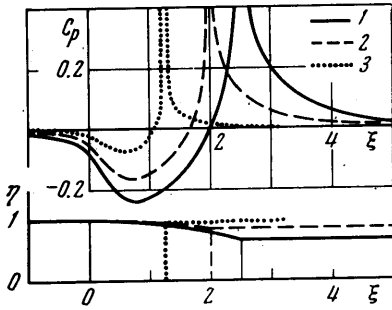
Отметим, что соотношения, установленные в п.3 и 4, как и (2.7), справедливы лишь при выполнении условия $tl \ll Y$ и дополнительного требования о малом отклонении границы струи от прямой $y = Y$. В случае формул (3.3), (4.1) и (4.2) последнее сводится к малости комбинаций $\alpha^2\delta^{3/2}l/Y$, $1 - (u_0/u_*)^2$ и $\alpha_0\delta^2$ соответственно.

5. Так как законы подобия были получены в рамках теории малых возмущений, то с целью их проверки были выполнены расчеты, основанные на численном интегрировании полной нелинейной системы уравнений при нелинеаризованных граничных условиях с использованием методов, предложенных в [3-6], и расчетных схем, описанных в [7, 8].

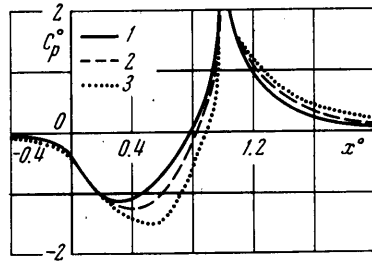
При проведении части расчетов в указанные схемы была введена модификация, связанная с вычислением параметров газа на верхней границе рассчитываемой области — прямой $y = Y_+$ (Y_+ — заданная константа). Указанная модификация состояла в изменении граничного условия $p = p_\infty$ при $y = Y_+$, используемого в [7, 8], с целью уменьшения значений Y_+ , т. е. размеров рассчитываемой области, для которых распределения параметров вблизи тела близки к значениям, соответствующим безграничному потоку. Расчеты, выполненные в [7, 8], показали, что $Y_+ \approx 5Y$ при $M_\infty = 0.9$ и быстро растет с приближением M_∞ к единице. В то же время ясно, что уже на существенно меньшем удалении от тела возмущения параметров достаточны малы, чтобы была применима обычная линейная теория, связывающая v и $\Delta p = p - p_\infty$ на прямой $y = Y_+$. Так, если $M_\infty < 1$, то при $y = Y_+$ и $-\infty < x < +\infty$ имеют место формулы ($m^2 = 1 - M_\infty^2$)

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{\Delta p}{\rho_\infty u_\infty} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)(\xi - x)d\xi}{[(x - \xi)^2 + (mY_+)^2]^{3/2}} \\ \frac{v}{m^2 Y_+} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)d\xi}{[(x - \xi)^2 + (mY_+)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

Данные формулы использовались для нахождения распределения $p=p(x)$ при $y=Y_+$ в процессе установления. Распределение $p(x)$ пересчитывалось через 100 временных шагов по найденному к этому моменту распределению $v(x)$, по которому из второго уравнения (5.1) находилась функция $g(\xi)$, используемая затем для вычисления $p(x)$. В начале счета брали $g(\xi) \equiv 0$, что отвечает условию $p=p_\infty$. К достоинствам введенной модификации (по сравнению с [7, 8]) следует отнести заметное уменьшение ординаты верхней границы и как следствие — сокращение времени счета.

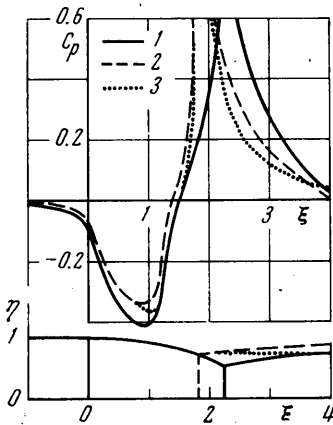


Фиг. 2

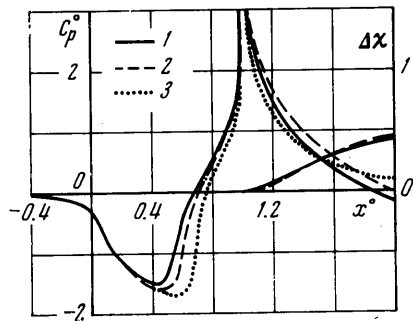


Фиг. 3

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2–5. Фиг. 2 и 3 отвечают обтеканию трех тел, примыкающих к полубесконечным цилиндрам. На первой из них изображены контуры тел в переменных $\xi=x/Y$ и $\eta=y/Y$ и над ними — рас-



Фиг. 4



Фиг. 5

пределения коэффициента давления $c_p=c_p(\xi)$ вдоль поверхности. На фиг. 3 те же распределения даны в переменных подобия $c_p^0=c_p^0(x^0)$ в согласии с (2.6). Здесь и в следующем примере контуры тел образованы дугами окружности радиуса r , которые при $x=0$ плавно сопрягаются с цилиндром радиуса Y . Кривые 1, 2 и 3 на фиг. 2 и 3 относятся к телам с $\tau=0.132, 0.068$ и 0.016 и $r/Y=9.7, 14.8$ и 38 , которые обтекались совершенным газом с показателем адиабаты $\kappa=1.4$ и $M_\infty=0.9, 0.935$ и 0.975 соответственно. Параметры подобия во всех трех случаях совпадали и были равны: $K=-0.44$ и $Y^0=0.27$. Видно, что в результате использования переменных подобия различие кривых распределения коэффициентов давления заметно уменьшается.

Применение закона подобия (4.1), описывающего околосзвуковое обтекание кормовой части с истекающей из нее струей, демонстрируют фиг. 4 и 5, построенные по тому же принципу, что и фиг. 2 и 3. Кривые 1 и 2 на этих фигурах отвечают двум течениям, характеризующимся одинаковыми параметрами подобия: $K=-0.25, Y^0=0.35, K_1=-1.10, K_2=5.37$ и $K_3=-1.05$ при различающихся прочих параметрах. Последние в указанных двух случаях были равны: $l/Y=1.99$ (2.24), $\tau=0.14$ (0.21), $M_\infty=0.940$ (0.923), $\kappa_0=1.40$ (1.15), $M_0=2$ (2.22), $r/Y=7.22$ (5.65) и $p_0/p_\infty=1.53$ (1.75).

Показатели адиабаты внешнего потока в обоих случаях были равны 1.4. Кроме контуров тел и распределений коэффициента давления в нижней части фиг. 4 изображены границы струи в переменных ξ , η , а на фиг. 5 — в переменных подобия: $\Delta\chi = \Delta\chi(x^*) = \chi(x^*) - \chi(1)$, где функция χ , определяющая форму струи, введена в соответствии с (4.1).

Замена струи полубесконечным цилиндром ведет к сокращению числа параметров подобия. В связи с этим был выполнен дополнительный расчет обтекания одной из рассмотренных кормовых частей (с отношением $l/Y=1.99$) с заменой струи цилиндром. Параметры набегающего потока, как и форма кормовой части, а следовательно, и значения K и Y^* при этом не изменялись. Полученные в результате такого расчета кривые обозначены на фиг. 4 и 5 цифрой 3.

В заключение авторы выражают признательность А. М. Конкиной за помощь в работе.

Поступила 27 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. М., Гостехиздат, 1954.
2. Гудерлей К. Г. *Теория околосвуковых течений*. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, № 3.
4. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
5. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. 1. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2.
6. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. 2. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 3.
7. Тагиров Р. К. Расчет обтекания кормовых частей тел вращения дозвуковым или трансзвуковым потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
8. Тагиров Р. К. Трансзвуковое обтекание тела вращения при истечении реактивной струи из его кормовой части. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.