

ОТРАЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. ПОДЛУБНЫЙ, А. С. ФОНАРЕВ

(Москва)

Теоретическое исследование проблемы взаимодействия ударных и взрывных волн с препятствиями проводилось достаточно интенсивно в течение последних двух-трех десятилетий многими авторами. В силу сложности задачи рассматривались, как правило, некоторые предельные случаи взаимодействия ударных волн, причем параметры за фронтом волны обычно предполагались постоянными. Первые исследования дифракции волны с переменными параметрами за фронтом были проведены в [1, 2], где была развита теория «коротких волн» (взрывных волн на значительном расстоянии от центра взрыва) и их отражение от плоской поверхности. Теория коротких волн предполагает, что избыточное давление на фронте волны и размер области изменения параметров за фронтом достаточно малы.

Задача об отражении взрывной волны от поверхности рассмотрена также в работах [3, 4], где получено решение в начальные моменты времени в области за отраженной волной. Начальная стадия отражения взрывной волны от плоской, цилиндрической или сферической поверхности (одномерный случай) изучалась в [5].

Ниже исследуется взаимодействие взрывной сферической волны, созданной точечным взрывом, с плоской поверхностью в стадии как регулярного, так и нерегулярного отражения. Для решения задачи используется конечно-разностный метод С. К. Годунова.

Получены численные решения для различных значений интенсивности взрывной волны в момент встречи ее с плоскостью. Приведены поля давлений в области течения, распределение давления по поверхности в различные моменты времени, траектория тройной точки. Параметры на фронте отраженной волны сравниваются с результатами теории регулярного отражения ударных волн.

1. Пусть в начальный момент времени фронт сферической взрывной волны заданного радиуса Y коснулся плоской поверхности (фиг. 1). Поместим начало цилиндрической системы координат в эпицентр взрыва, ось y (ось симметрии) — по нормали к рассматриваемой поверхности, ось r расположена на плоскости (фиг. 1).

Рассматриваемая задача об отражении сферической взрывной волны от плоскости описывается системой уравнений Эйлера (с осевой симметрией), дивергентная форма которой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v r) + \frac{\partial}{\partial y}[(p + \rho v^2)r] + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u v r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v r) + \frac{\partial}{\partial r}[(p + \rho u^2)r] &= p \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] &= 0 \\ p &= \rho e (\gamma - 1) \end{aligned}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, u, v — составляющие вектора скорости по осям r и y соответственно, e — энергия единицы массы газа, t — время, γ — показатель адиабаты. (В численных расчетах полагалось $\gamma=1.4$.)

Для задания начальных данных в возмущенной взрывом области внутри сферы радиуса Y с центром в точке $(0, Y)$ используются результаты расчета точечного взрыва с противодавлением [6, 7]. (В силу сферической симметрии взрыва, параметры зависят только от расстояния до центра.)

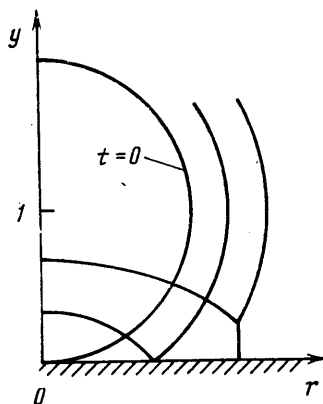
В невозмущенной области параметры газа постоянны

$$(y-Y)^2 + r^2 > Y^2, \quad p = p_1, \quad \rho = \rho_1, \\ u = v = 0$$

где величины p_1 и ρ_1 — значения давления и плотности газа перед ударной волной.

Граничным условием является условие непротекания через поверхность. В силу симметрии задачи будем рассматривать только правую половину области (фиг. 1). Примем в качестве характерных размерных величин (со звездочкой)

$$y^* = r^* = Y, \quad p^* = p_1, \quad \rho^* = \rho_1, \\ u^* = v^* = \sqrt{p^* / \rho^*}, \quad t^* = Y / \sqrt{p^* / \rho^*}$$



Фиг. 1

В дальнейшем все параметры течения будем считать безразмерными.

2. Для получения численного решения задачи о взаимодействии взрывной волны с плоской поверхностью удобно применить конечно-разностный метод С. К. Годунова [8, 9] с использованием экономичного алгоритма расчета распада разрыва, описание которого приводится ниже.

Основным элементом рассматриваемого численного метода является решение задачи о распаде произвольного разрыва на каждой границе между двумя соседними счетными ячейками, алгоритм расчета которого в точной постановке требует значительного числа арифметических операций из-за нелинейности уравнений и необходимости итерационного процесса в каждой точке. Это приводит к тому, что время, затрачиваемое на расчет итераций, является достаточно большим в балансе полного времени решения задачи на ЭВМ. Линеаризация уравнений для распада разрыва приводит к существенному упрощению вычислительной процедуры; однако область применимости линеаризованных уравнений и погрешность, связанная с этим, заранее неизвестны, что затрудняет, а иногда делает невозможным их применение в задачах в сильными ударными волнами. Параметрическое исследование распада разрыва в точной и линеаризованной постановке позволяет разработать алгоритм, который в каждой счетной ячейке автоматически выбирает либо линеаризованную, либо точную схему расчета разрыва в зависимости от его параметров; при этом погрешность счета не превышает задаваемой величины.

Введем функции

$$(2.1) \quad \varepsilon_p(\delta p, \delta \rho, \delta u) = (p_E - p_L) / p_E, \quad \varepsilon_u(\delta p, \delta \rho, \delta u) = \\ = (u_E - u_L) / \sqrt{p_{-1/2} / \rho_{-1/2}} \\ \delta p = (p_{1/2} - p_{-1/2}) / p_{-1/2}, \quad \delta \rho = (\rho_{1/2} - \rho_{-1/2}) / \rho_{-1/2} \\ \delta u = (u_{1/2} - u_{-1/2}) / \sqrt{p_{-1/2} / \rho_{-1/2}}$$

характеризующие относительную погрешность линейной теории по давлению и скорости. Индексы $-1/2$ и $1/2$ в (2.1) соответствуют значениям параметров газа слева и справа от линии разрыва до распада разрыва. Величины p_E, u_E и p_L, u_L — соответственно точные и рассчитанные по линейной теории значения давления и скорости, образующихся в результате распада разрыва. Их значения будем вычислять по соотношениям, приведенным в [8].

Величины ε_p и ε_u приближенно могут быть представлены квадратичными формами

$$(2.2) \quad \varepsilon_p = -\frac{\gamma+1}{4\gamma}(\delta p)^2 - \frac{1}{2}\delta p \delta \rho + \frac{\gamma+1}{16}(\delta u)^2, \quad \varepsilon_u = \frac{(\gamma\delta\rho - \delta p)\delta u}{4\gamma}$$

канонический вид которых записывается в виде соотношений

$$(2.3) \quad \varepsilon_p = \frac{1}{4}(\sqrt{1+\beta^2} - \beta)\xi_1^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{1+\beta^2} + \beta)\eta_1^2 + \frac{\gamma+1}{16}\xi_1^2$$

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{\gamma^2+1}}{8\gamma}\xi_2^2 - \frac{\sqrt{\gamma^2+1}}{8\gamma}\eta_2^2$$

$$\xi_1 = \frac{\delta p - (\beta + \sqrt{1+\beta^2})\delta\rho}{\sqrt{1 + (\beta + \sqrt{1+\beta^2})^2}}, \quad \xi_2 = \frac{-\delta p + \gamma\delta\rho + \sqrt{\gamma^2+1}\delta u}{\sqrt{2(\gamma^2+1)}}$$

$$\eta_1 = \frac{\delta p - (\beta - \sqrt{1+\beta^2})\delta\rho}{\sqrt{1 + (\beta - \sqrt{1+\beta^2})^2}}, \quad \eta_2 = \frac{\delta p - \gamma\delta\rho + \sqrt{1+\gamma^2}\delta u}{\sqrt{2(\gamma^2+1)}}$$

$$\xi_1 = \delta u, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+1}}(\gamma\delta p + \delta\rho), \quad \beta = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$$

Поверхности уровня погрешностей (2.3) будем аппроксимировать поверхностями более простой формы, что позволяет построить простые приближенные формулы для границ области параметров, где погрешность не превышает заданной величины. Заменяя поверхности уровней плоскостями, получим серию зависящих от величин ε и γ восьмигранников ($\varepsilon = \max\{\varepsilon_p, \varepsilon_u\}$)

$$|\delta p| + |\delta\rho| + \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2(\sqrt{1+\beta^2} + \beta)}}|\delta u| = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sqrt{1+\beta^2} + \beta}}$$

в случае $\gamma=1.4$ имеем

$$(2.4) \quad |\delta p| + |\delta\rho| + 2|\delta u| = 4.4\sqrt{\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 0.05$$

Ценой некоторого усложнения за счет нелинейных членов можно расширить области $\{\delta p, \delta\rho, \delta u\}$ при фиксированной величине ε ; в этом случае приближенные поверхности уровней имеют следующий вид (для $\gamma=1.4$):

$$(2.5) \quad \delta p \delta\rho \leq 0, \quad (\delta p - \delta\rho)^2 + (2.4\delta u)^2 = (5.5\sqrt{\varepsilon})^2$$

$$\delta p \delta\rho > 0, \quad |\delta u| = 9\varepsilon + 0.1[1 - \exp\{-2500\varepsilon\}], \quad |\delta p + \delta\rho| = 4.3\sqrt{\varepsilon}$$

$$0 \leq \varepsilon \leq 0.1, \quad \delta p \geq -1, \quad \delta\rho \geq -1$$

Стоящий во втором выражении экспоненциальный член можно не учитывать при расчетах распада разрыва с погрешностью $\varepsilon \geq 0.001$.

С использованием приведенных выше выражений (2.3) или (2.4) в алгоритме численного решения задач методом С. К. Годунова можно в ряде случаев значительно сократить время счета на ЭВМ.

Так, в рассматриваемой задаче об отражении взрывной волны от плоскости время счета на ЭВМ может быть сокращено на 25–30%, если вместо схемы только с итерационными формулами применяется гибридная схема.

3. Будем использовать прямоугольную сетку с переменным шагом по y ; шаг по r выберем постоянным. Конечно-разностная схема аналогична схеме, приведенной в [9, 10]. Сетка по y -координате имеет область с постоянным шагом вблизи поверхности, а затем по мере удаления от поверхности величина шага по y -координате возрастает по арифметической прогрессии. Верхняя граница расчетного поля расположена на расстоянии Y от поверхности, левая – ось симметрии, правая граница – некоторая вертикаль в невозмущенной области.

При удалении волны от эпицентра взрыва во внутренней области, примыкающей к оси симметрии, градиенты давления становятся малыми. В связи с этим в расчетном поле задачи можно исключать часть центральной области с соответствующим перемещением левой и правой границ расчетного поля. Эта процедура периодически повторяется в моменты времени, когда взрывная волна подходит к правой границе сетки. Граничные условия зададим следующим образом.

На верхней границе (а также на левой границе после первого перемещения) ставится условие равенства нулю производных всех газодинамических параметров по нормали к границе. Правая граница в течение всего времени счета располагается в области невозмущенного покоящегося газа. На оси симметрии и самой поверхности ставится условие непротекания (нормальная составляющая скорости равна нулю).

Расчетная сетка состоит из 60×130 узлов по осям y и r соответственно. Расстояние, на которое волна должна удалиться от центра, чтобы можно было начать перемещение левой границы, заранее не известно. Определение этого расстояния потребовало некоторых методических исследований – проведения «пробных» расчетов. Из них установлено, что горизонтальный размер (ширину) поля с перемещаемыми границами можно взять равными $1.5 \div 2 Y$ (для рассматриваемых вариантов задачи); при этих условиях отбрасывание части внутреннего поля практически не изменяет течения в области, прилегающей к падающей и отраженной волнам.

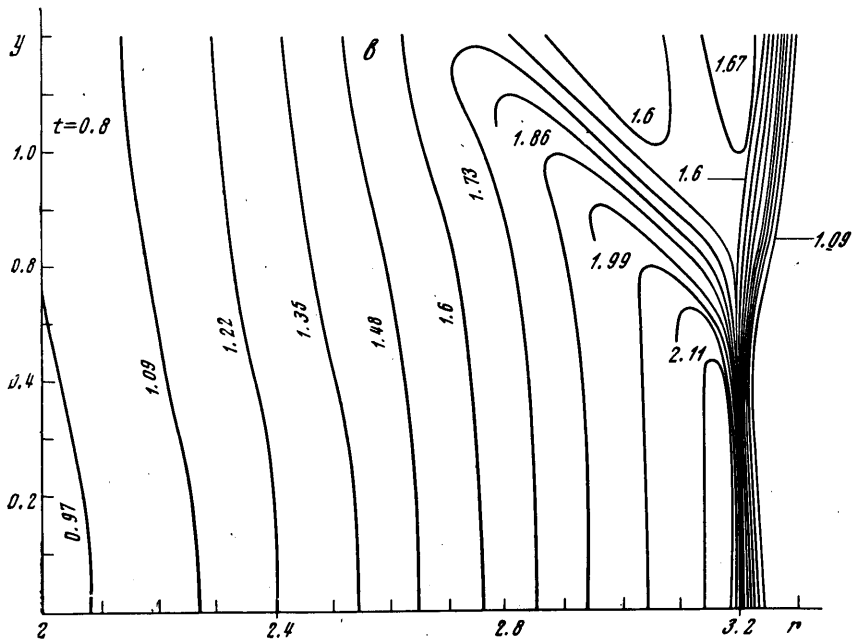
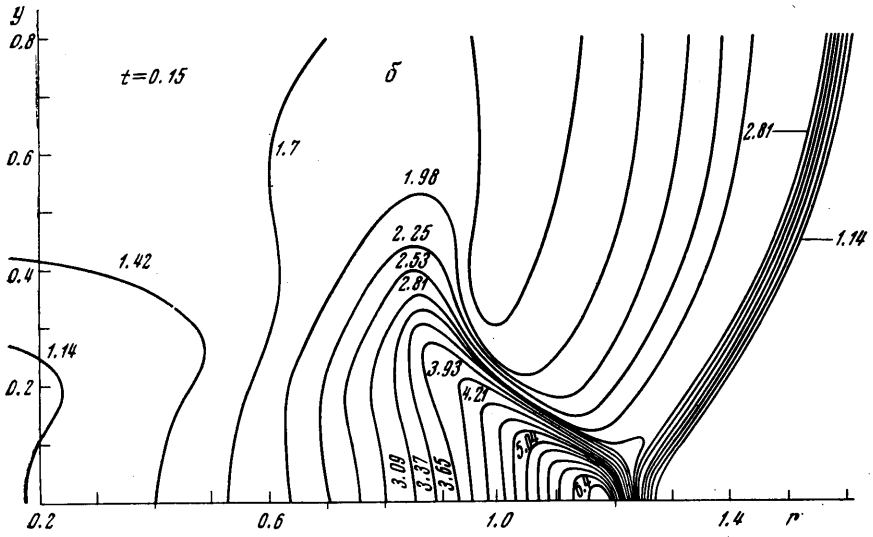
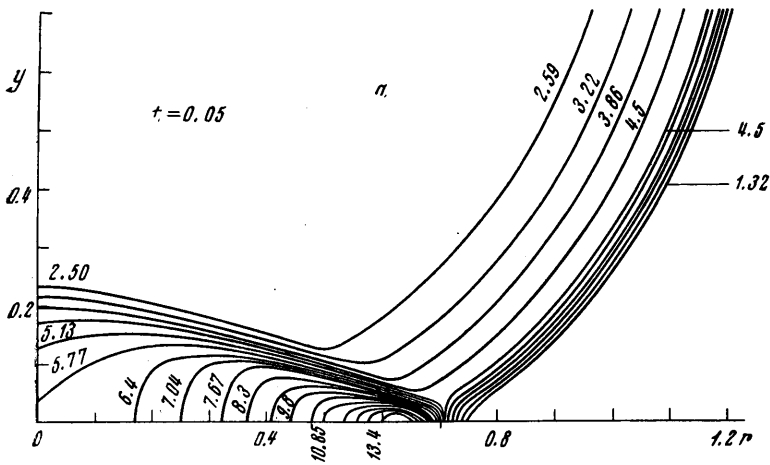
4. Численное решение задачи проведено для случаев взрывных волн с начальными распределениями параметров газа за волной, соответствующими таблицам [6, 7].

Рассмотрены случаи, когда при подходе фронта волны к поверхности перепад давления на фронте равен соответственно $\Delta p_H = 7.90, 2.33, 1.32$.

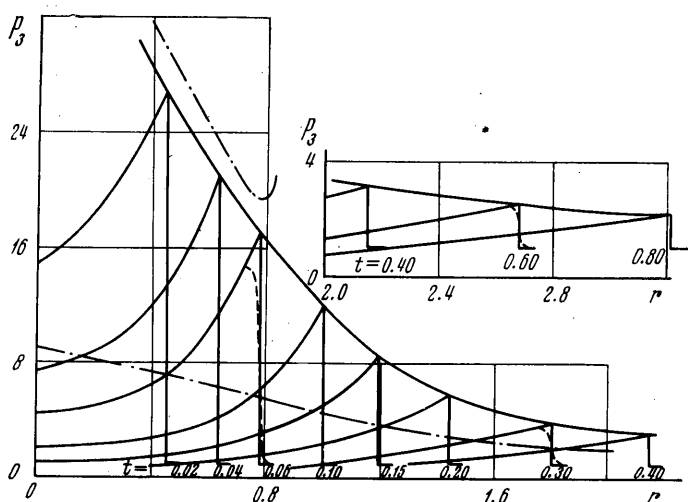
При взаимодействии волны с плоской поверхностью сначала имеет место регулярное отражение, которое затем, начиная с некоторого критического угла между фронтом падающей волны и плоскостью переходит в стадию нерегулярного отражения. Развитие картины дифракции для случая $\Delta p_H = 7.9$ показано на фиг. 2, где изображены поля равных значений давления в области над плоскостью в различные фиксированные моменты времени. Ударные волны представлены в виде резкого сгущения изобар.

Из графиков видно, как происходит переход от регулярного отражения к нерегулярному с образованием тройной ударной конфигурации. Можно проследить, как с течением времени происходит возникновение и рост «маховской ножки». Расчеты проведены до момента, когда взрывная волна удалась от центра взрыва на расстояние $r \approx 3$.

На фиг. 3 приведено распределение давления по поверхности в различные моменты времени для одного из рассматриваемых случаев отражения взрывной волны ($\Delta p_H = 7.9$). Был проведен расчет параметров газа за отраженной от плоскости ударной волной по соотношениям для косых скачков уплотнения [11] с учетом ослабления падающей волны по мере ее распространения. Результаты этого расчета продемонстрированы на



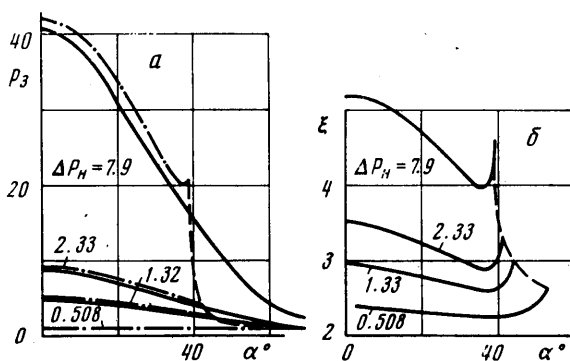
Фиг. 2



Фиг. 3

фиг. 4, где показана штрихпунктирной линией зависимость давления на фронте в отраженной волне от расстояния до эпицентра. Сплошные линии соответствуют численным решениям.

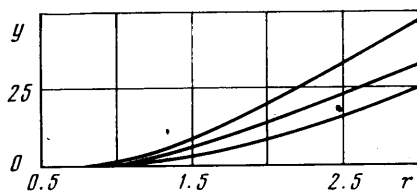
Как следует из графика, характерное повышение давления по теории регулярного отражения в момент перехода регулярного отражения в нере-



Фиг. 4

гулярное весьма невелико для рассматриваемых случаев; оно реализуется в области резкого уменьшения давления на фронте падающей волны при ее движении от центра взрыва. Этот эффект более существенно проявляется в случае слабых ударных волн [1, 2] на большом расстоянии от центра взрыва, когда на длине порядка начального радиуса взрыва ($\Delta r \sim Y$) давление на фронте и угол падения практически не меняются.

Однако расчет таких предельных режимов используемым численным методом провести достаточно точно не удается в рассматриваемой постановке из-за большого диапазона изменения избыточного давления на фронте и относительно больших погрешностей в масштабе малых возмущений. Весьма незначительное проявление аномального эффекта, получаемого по теории косоугольного отражения ударных волн и показанное на фиг. 3, а также на фиг. 4, а, находится в пределах точности расчета и поэтому специальных попыток его обнаружить в численных расчетах не делалось.



Фиг. 5

давления, а именно к перепаду давления, который является характерным в теории малых возмущений. На фиг. 4, б приведены рассчитанные по формулам регулярного отражения значения избыточного давления на фронте отраженной волны, отнесенные к перепаду давления в падающей волне ($\xi = \Delta P_3 / \Delta P_2$), в зависимости от угла между фронтом волны и плоскостью с учетом затухания волны. Пунктирная линия — граница между областями регулярного и нерегулярного отражения.

В полученных численных результатах фронт волны представляется размазанным на 3–6 точек, а пик давления — сглаженным. В связи с этим для нахождения координаты фронта волны и величины давления на нем была применена специальная процедура: координатой фронта считалась середина (точка перегиба) размазанного фронта, а величина пика определялась с помощью линейной экстраполяции давления за фронтом в точку, характеризующую положение фронта. Приведенные на фиг. 3 распределения давления построены с применением описанной процедуры. Для иллюстрации пунктирными линиями изображены «размазанные» волны. Приведенная там же стрихпунктирная кривая соответствует изменению давления на фронте падающей волны, согласующаяся с точностью 1–2% с данными расчета взрыва с противодавлением [6].

На фиг. 5 приведены траектории тройной точки, снятые приближенно по графическим материалам полей давления. Кривые 1–3 соответствуют начальным избыточным давлениям $\Delta p_n = 7.9, 2.33, 1.32$.

Поступила 17 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, № 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Васильев М. М. Об отражении сферической ударной волны от плоскости. Сб. «Вычислительная математика», сб. 6. М., Изд-во АН СССР, 1960.
4. Chang T. S., Laporte O. Reflection of strong blast waves. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 8.
5. Тугазаков Р. Я., Фонарев А. С. Начальная стадия столкновения взрывных волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
6. Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1957, т. 50.
7. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шаровагова К. В. Газодинамические функции точечного взрыва. Тр. ВЦ АН СССР, 1969.
8. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, № 3.
9. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
10. Фонарев А. С. Расчет дифракции ударной волны на профиле с последующим установлением стационарного сверхзвукового и трансзвукового обтекания. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
11. Арутюнян Г. М. Теория аномальных режимов регулярного отражения ударных волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.