**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1974**

УДК 532.59

ДВИЖЕНИЯ В СЛОЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПРИЛОЖЕННЫМ К СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДАВЛЕНИЕМ

А. А. ЗАЙЦЕВ, А. Б. ОДУЛО

(Калининград, Москва)

Известно [1, 2], что в слое однородной идеальной несжимаемой жидкости могут существовать лишь поверхностные гравитационные волны. Если же жидкость вращается, то становится возможным существование инерционных волн. В последнее время появился ряд работ, посвященных теоретическому [3–7] и экспериментальному [8] изучению инерционных волн.

В настоящей работе в линейной постановке рассматривается задача о неустановившихся движениях, возникающих во вращающемся слое однородной несжимаемой жидкости под действием атмосферного давления, приложенного к свободной поверхности. Показано, что возникают поверхностные и инерционные волны, и образуется геострофическое течение. Для поверхностных и инерционных волн выписаны асимптотические формулы и дан их анализ. Для конкретных случаев задания атмосферного давления геострофическое течение вычислено точно.

1. Рассмотрим слой идеальной однородной несжимаемой жидкости постоянной толщины h, вращающейся с угловой скоростью $^1/_2\Omega$ вокруг вертикальной оси z. Жидкость ограничена твердым дном и свободной поверхностью. Оси x и y проходят по невозмущенной поверхности жидкости.

К свободной поверхности первоначально невозмущенной жидкости в момент времени t=0 прикладывается давление

$$p_a=\rho p_0(x, y)f(t), \quad f(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0 \tag{1.1}$$

Линеаризованная система уравнений, описывающая возникающее движение, имеет вид

$$u_t-\Omega v=-p_x, \quad v_t+\Omega u=-p_y, \quad w_t=-p_z, \quad u_x+v_y+w_z=0 \tag{1.2}$$

Граничные и начальные условия запишем в виде

$$p-g\zeta=p_0f, \quad \zeta_t=w \quad \text{при} \quad z=0; \quad w=0 \quad \text{при} \quad z=-h \tag{1.3}$$

$$u=v=w=p=\zeta=0 \quad \text{при} \quad t<0 \tag{1.4}$$

Здесь ζ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня; $p=(p_n+g\rho z)/\rho$, p_n — полное давление, индекс внизу обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

Применяя преобразования Фурье и Лапласа из системы (1.2) с учетом условий (1.3), (1.4), находим

$$P=\sigma P_0FG^{-1}\operatorname{ch} k(z+h) \tag{1.5}$$

$$P=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} p\exp(i\alpha x+i\beta y-\sigma t)\,dt\,dx\,dy$$

$$P_0=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} p_0(x, y)\exp i(\alpha x+\beta y)\,dx\,dy, \qquad F=\int\limits_0^{\infty} f(t)\exp(-\sigma t)\,dt$$

$$\sigma G=\sigma^2\operatorname{ch} kh+gk\operatorname{sh} kh, \qquad k=r\sigma(\sigma^2+\Omega^2)^{-1/2}, \qquad r=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \tag{1.6}$$

Применяя обратные преобразования Фурье и Лапласа, получим

$$p=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}P_0I\exp i(-\alpha x-\beta y)\,d\alpha\,d\beta \tag{1.7}$$

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \sigma FQ\exp\sigma t\,dt,\qquad Q=G^{-1}\operatorname{ch}k(z+h) \tag{1.8}$$

Здесь L — прямолинейный контур, лежащий в плоскости комплексного переменного σ и определяемый условием $\operatorname{Re}\sigma=\mathrm{const}>0$.

2. Пусть атмосферное давление не меняется со временем, т. е. $f(t)=1$, тогда $\sigma F=1$ и

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L Q\exp\sigma t\,dt \tag{2.1}$$

Из выражений (1.6) и (1.8) видно, что корень $(\sigma^2+\Omega^2)^{1/2}$ входит в функцию Q четным образом. Следовательно, точки $\sigma=\pm\Omega$ не являются точками ветвления. Функция $Q(\sigma)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, а максимум ее модуля на окружностях $|\sigma|=R$ монотонно убывает с ростом R в этой окрестности. Все полюсы функции $Q(\sigma)$ совпадают с нулями функций $G(\sigma)$. Функция $G(\sigma)$ имеет счетное множество простых нулей, которые имеют две точки накопления $(\sigma=\pm i\Omega)$. Из нечетности $G(\sigma)$ следует, что $G(0)=0$ и если $G(\sigma_1)=0$, то и $G(-\sigma_1)=0$. Можно показать, что все нули функции $G(\sigma)$, кроме $\sigma=0$, чисто мнимые. Обозначим их $i(-1)^m\sigma_n$ $(m=0,\ 1;\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$, $\sigma_n>0$. Величины σ_n будем рассматривать как функции волнового числа r. При каждом $0<r<\infty$ выполняются неравенства

$$\sigma_1<\sigma_2<\ldots<\sigma_n<\ldots<\Omega<\sigma_0 \tag{2.2}$$

причем $\sigma_n(0)=\Omega$ для всех n.

Можно доказать, используя свойства $Q(\sigma)$, что интеграл I представим в виде суммы вычетов подынтегральной функции, несмотря на то, что $Q(\sigma)$ имеет бесконечное число полюсов

$$I=(1+ghr^2\Omega^{-2})^{-1}+\sum_{m=0}^{1}A_{m0}\operatorname{ch}k_0(z+h)\exp i(-1)^m\sigma_0t+ \tag{2.3}$$
$$+\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\cos k_n(z+h)\exp i(-1)^m\sigma_nt$$

$$k_0=\sigma_0r(\sigma^2-\Omega^2)^{-1/2},\qquad k_n=\sigma_nr(\Omega^2-\sigma_n^2)^{-1/2},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{2.4}$$

где A_{mn} означает вычет функции $G(\sigma)$ в точке $\sigma=i(-1)^m\sigma_n$, $m=0,\ 1$; $n=0,1,2,\ldots$ Подставляя полученное выражение для I в (2.1) и переходя к полярным координатам $x=R\cos\gamma$, $y=R\sin\gamma$, $\alpha=-r\cos\theta$, $\beta=-r\sin\theta$, запишем выражение для давления p в виде

$$p=p_1+p_2+p_3 \tag{2.5}$$

$$p_1=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m=0}^{1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}rA_{m0}P_0(r,\theta)\operatorname{ch}k_0(z+h)\exp i\Phi_{m0}\,dr\,d\theta \tag{2.6}$$

$$p_2=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}rA_{mn}P_0(r,\theta)\cos k_n(z+h)\exp i\Phi_{mn}\,dr\,d\theta \tag{2.7}$$

(2.8) $$p_3=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} rP_0(r,\theta)\,(1+ghr^2\Omega^{-2})\exp irR\cos(\theta-\gamma)\,dr\,d\theta$$

где p_1 представляет собой поверхностные волны, p_2 — инерционные волны, p_3 — не зависящее от времени геострофическое течение

(2.9) $$\Phi_{mn}=rR\cos(\theta-\gamma)+(-1)^m\sigma_n t,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Далее методом стационарной фазы для двойных интегралов [9] будет найдена асимптотика (2.6) и (2.7) для больших значений t. Интеграл (2.8) будет вычислен точно для некоторых конкретных зависимостей $p_0(x, y)$.

3. Стационарные точки интегралов (2.6), (2.7) определяются из системы

(3.1) $$\sin(\theta-\gamma)=0,\ (-1)^m(d\sigma_n/dr)t+R\cos(\theta-\gamma)=0$$

Для вычисления корней этой системы надо найти вещественные корни уравнения

(3.2) $$|d\sigma_n/dr|=R/t$$

Рассмотрим сначала случай $n=0$. Функция $\sigma_0(r)$ монотонно возрастает от Ω до ∞ с ростом r от 0 до ∞. Производная $d\sigma_0/dr$ имеет единственный максимум, который обозначим через c. Легко показать, что $c<(gh)^{1/2}$ и $c-(gh)^{1/2}=O(c\varepsilon)$. Для океана на Земле параметр $\varepsilon=\Omega(g/h)^{1/2}$ мал (если $\Omega=10^{-4}$ *сек*$^{-1}$, $h=10^3$ *м*, $g=10$ *м/сек*, то $\varepsilon=10^{-3}$). В дальнейшем будем предполагать, что $\varepsilon\ll1$.

Уравнение (3.2) для $n=0$, рассматриваемое относительно r не имеет вещественных корней, если $ct<R$, и имеет два положительных вещественных корня, которые обозначим r_i $(i=1, 2)$, если $ct>R$. Таким образом, для $n=0$ система (3.1) при $ct<R$ имеет два решения $(r_1, \theta_{01}=\gamma+\pi)$, $(r_2, \theta_{02}=\gamma)$ для $m=0$ и два решения $(r_1, \theta_{11}=\gamma)$, $(r_2, \theta_{12}=\gamma+\pi)$ для $m=1$. При этом $r_1<r_2$ и $r_1\to0$, $r_2\to\infty$ при $ct/R\to\infty$. Эти четыре корня системы (3.1) будем обозначать (r_l, θ_{ml}), $l=1, 2$, $m=0, 1$.

Если ct/R не слишком близко к единице, то метод стационарной фазы дает

(3.3) $$p_1\sim\begin{cases}0, & R>ct\\ \displaystyle\sum_{m=0}^{1}\sum_{l=1}^{2}\frac{\sqrt{r_l}}{2\pi}[Rt|d^2\sigma_0(r_l)/dr^2|]^{-1/2}P_0(r_l,\theta_{ml})A_{m0}(r_l,\theta_{ml})\times & \\ \times\operatorname{ch}k_0(z+h)\exp i\Phi_{mn}(r_l,\theta_{ml}), & R<ct\end{cases}$$

Когда ct/R близко к единице, используя метод стационарной фазы для близких стационарных точек, можно получить асимптотические формулы через функции Эйри.

Асимптотику (3.3) можно представить в более обозримом виде, если предположить, что $\varepsilon\ll1$ и $ct\gg R$. Тогда $r_1\approx R\Omega/c^2t$, $r_2\approx ct^2/4R^2$ и

(3.4) $$p_1\sim\sum_{m=0}^{1}\frac{R^2\Omega}{\pi c^4t^3}P_0(r_1,\theta_{m1})\exp i(-1)^m\left(\frac{\Omega}{c}\sqrt{c^2t^2-R^2}+\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\sum_{m=0}^{1}\frac{gt^2}{8\sqrt{2}\,\pi r^3}P_0(r_2,\theta_{m2})\frac{\operatorname{ch}r_2(z+h)}{\operatorname{ch}r_2h}\exp i(-1)^m\frac{gt^2}{4R}$$

В случае осесимметричного атмосферного давления формула (3.4) еще более упрощается и на свободной поверхности ($z=0$) имеем

$$(3.5)\qquad p_1 \sim -\frac{2R^2\Omega}{\pi c^4 t}P_0(r_1)\sin\left(\frac{\Omega}{c}\sqrt{c^2t^2-R^2}\right)+\frac{gt^2}{4\sqrt{2}\pi R}P_0(r_2)\cos\frac{gt^2}{4R}$$

Для определения корней системы (3.1) при $n=1, 2, \ldots$ исследуем поведение функций $\sigma_n(r)$. С ростом r от 0 до ∞ функции $\sigma_n(r)$ монотонно убывают от Ω до 0. Производная $d\sigma_n/dr$ с ростом r от 0 до ∞ сначала уменьшается от нуля до некоторого минимального значения, а затем возрастает, стремясь к нулю при $r\to\infty$. Если считать $\varepsilon\ll1$, то приближенно

$$(3.6)\qquad \sigma_n\approx\Omega n\pi/(\pi^2n^2+r^2h^2)^{1/2},\ n=1, 2, 3,\ldots$$

откуда $k_n\approx\sigma_n r(\Omega^2-\sigma_n^2)^{-1/2}\approx\pi n/h$ и

$$(3.7)\qquad c_n\equiv-\min d\sigma_n/dr\approx2\Omega h/3\sqrt{3}\pi n,\ n=1, 2, 3,\ldots$$

Система (3.1) для фиксированного n не имеет ни одного корня, если $c_nt<R$; а при $c_nt>R$ — два корня (r_{n1}, θ_{01}), $(r_{n2}, \theta_{02}=\gamma+\pi)$ для $m=0$ и два корня $(r_{m1}, \theta_{11}=\gamma+\pi)$, $(r_{n2}, \theta_{12}=\gamma)$ для $m=1$. При этом $r_{n1}<r_{n2}$ и $r_{n1}\to0$, $r_{n2}\to\infty$ при $ct/R\to\infty$. Эти корни системы (3.1) будем обозначать (r_{nl}, θ_{ml}) $l=1, 2$; $m=0, 1$; $n=1, 2, 3,\ldots$ Как и выше, применяя метод стационарной фазы, получим

$$(3.8)\qquad p_2\sim\begin{cases}0, & c_1t<R\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{1}\sum_{l=1}^{2}(-1)^m(r_{nl})^{1/2}(2\pi)^{-1}(Rt|d^2\sigma_n(r_{nl})/dr^2|)^{-1/2}\times & \\ \displaystyle\times P_0(r_{nl}, \theta_{ml})\cos\frac{\pi nz}{h}\exp i\Phi_{mn}(r_{nl}, \theta_{ml}), & c_1t>R\end{cases}$$

Здесь N определяется неравенствами

$$(3.9)\qquad N+1>2\Omega ht/3\sqrt{3}\pi R\geqslant N$$

Если $c_nt\gg R$, то $r_{n1}\approx\pi^2n^2R/\Omega h^2t$, $r_{n2}\approx(\pi\Omega nt/hR)$ и n-й член в (3.8) можно записать в виде

$$(3.10)\qquad p_{2n}\sim\sum_{m=0}^{1}\frac{\pi n^2R^2}{2g\Omega h^3t^3}P_0(r_{n1}, \theta_{m1})\cos\frac{\pi nz}{h}\times$$
$$\times\exp i(-1)^m\left[\Omega t\left(1+\frac{\pi^2n^2R^2}{2h^2\Omega^2t^2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+\sum_{m=0}^{1}\sqrt{\frac{n\Omega t}{2\pi hR^3}}P_0(r_{n2}, \theta_{m2})\times$$
$$\times\cos\frac{\pi nz}{h}\exp 2i(-1)^m\sqrt{\pi n\Omega Rt/h}$$

В случае осесимметричного атмосферного давления формула (3.10) еще более упрощается

$$(3.11)\qquad p_{2n}\sim\frac{\pi^2n^2R^2}{g\Omega h^3t^3}P_0(r_{n1})\cos\frac{\pi nz}{h}\sin\Omega t\left(1+\frac{\pi^2n^2R^2}{2h^2\Omega^2t^2}\right)+$$
$$+\sqrt{\frac{2n\Omega t}{\pi hR^3}}P_0(r_{n2})\cos\frac{\pi nz}{h}\cos2\sqrt{\pi n\Omega Rt/h}$$

4. Вычислим теперь давление p_3, задаваемое выражением (2.8) и представляющее собой геострофическое течение, для двух конкретных зависимостей $p_0(x, y)$.

Пусть $p_0(x, y) = A(a^2 - R^2)^{-1/2}$, $0 < R \leqslant a$; $p_0(x, y) = 0$, $R > a$. Тогда $P_0 = 2\pi A r^{-1} \sin ar$

$$p_3 = \frac{A\Omega}{2\pi\sqrt{gh}} \operatorname{sh} \frac{a\Omega}{\sqrt{gh}} K_0\left(\frac{\Omega R}{\sqrt{gh}}\right), \qquad v_{r3} = 0$$

$$v_{\gamma 3} = \frac{A\Omega}{2\pi gh} \operatorname{sh} \frac{a\Omega}{\sqrt{gh}} K_1(\Omega R/\sqrt{gh})$$

Здесь v_r — радиальная, v_γ — тангенциальная составляющие скорости геострофического течения.

Пусть $p_0(x, y) = p_0(x)$ (плоская задача). Тогда

$$p_3 = \frac{\Omega^2}{2\pi gh} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + \Omega^2/gh)^{-1} P_0(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad P_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x) e^{i\alpha x} dx$$

В частности, если $p_0(x) = A$ при $|x| \leqslant a$ и $p_0(x) = 0$ при $|x| > a$, то легко находим

$$p_3 = \begin{cases} A[1 - \exp(-\Omega a/\sqrt{gh})] \operatorname{ch} \Omega x/\sqrt{gh}, & |x| \leqslant a \\ A \exp(-\Omega |x|/\sqrt{gh}) \operatorname{sh} \Omega a/\sqrt{gh}, & |x| > a \end{cases}$$

Рассмотренные примеры показывают, что геострофическое течение концентрируется около области приложения атмосферного давления и очень быстро (экспоненциально) ослабевает с удалением от нее. Легко показать, что так будет всегда, когда $p_0(x, y)$ является финитной функцией.

Отметим, что, рассматривая сразу установившееся движение (описываемое системой, получающейся из (1.2) отбрасыванием производных по времени), невозможно получить найденное выше геострофическое течение. Например, в плоской задаче получается, что $w \equiv 0$, а давление p может быть произвольной функцией от x. Заметим также, что при отсутствии вращения ($\Omega = 0$) $p_3 \equiv 0$.

5. Полученное выше решение дает возможность описать движение жидкости вдали от области приложения атмосферного давления (функция $p(x, y)$ предполагается финитной). Итак, в точке (R_0, γ_0) движение мало до момента времени $t_0 = R_0/c$, когда в эту точку приходит передний фронт поверхностных волн. После прохождения этого фронта в точке (R_0, γ_0) наблюдаются две системы поверхностных волн (см. (3.3)), длинных и коротких. Из (3.4) видно, что глубина проникновения коротких поверхностных волн быстро уменьшается со временем. Изменение со временем их амплитуды существенно зависит от распределения атмосферного давления $p_0(x, y)$. Из структуры вторых членов в правых частях формул (3.4), (3.5) видно, что амплитуда коротких волн стремится к нулю при $t \to \infty$, если

$$\lim_{r \to \infty} r \max_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |P_0(r, \theta)| = 0 \tag{5.1}$$

Условие (5.1), в частности, выполняется, если $p_0(x, y)$ является непрерывной абсолютно интегрируемой функцией. Если $p_0(x, y)$ принадлежит классу бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой степени R вместе со всеми производными (пространство быстро убывающих основных функций [10]), то амплитуда коротких волн убывает быстрее любой степени t при $t\to\infty$. Частота коротких поверхностных волн растет пропорционально времени (см. (3.4)).

При $ct\gg R_0$, как видно из (3.4), амплитуда поверхностных волн не изменяется с глубиной z и мало зависит от распределения атмосферного давления. С ростом времени t амплитуда длинных волн уменьшается как t^{-3}. Из выражения для фазы этих волн видно, что их частота больше инерционной ($\sigma>\Omega$), с течением времени убывает и при $t\to\infty$ $\sigma\to\Omega$.

К моменту времени $t_1=R_0/c_1$ в точку (R_0, γ_0) приходит фронт первой системы инерционных волн, а в момент времени $t_n=R_0/c_n$ приходит n-я система инерционных волн. Так как $t_0/t_1=c_1/c\approx2\Omega\sqrt{g}/3\sqrt{3h}\ll1$, то инерционные волны приходят в точку наблюдения значительно позже поверхностных. Качественно зависимость амплитуды инерционных волн от времени такая же, как и поверхностных. В частности, если выполнено условие (5.1), то амплитуда коротких инерционных волн также затухает со временем. Частота коротких инерционных волн монотонно убывает и стремится к 0 при $t\to\infty$. Частота длинных инерционных волн возрастает с ростом t и стремится к Ω при $t\to\infty$. Отметим, что n входит в амплитуду инерционных волн в числитель (3.11). Это означает, что, вообще говоря, наибольший вклад в волновое поле дает последняя система из пришедших в данную точку инерционных волн.

Инерционные волны изменяются с глубиной по синусоидальному закону, причем n соответствует числу нулей в интервале $(-h, 0)$. Если выполнено условие (5.1), то при $t\to\infty$ p_1 и p_2 стремятся к нулю и остается только геострофическое течение p_3, анализ которого дан в п. 4.

6. Дифференцированием по времени полученных выше формул (2.4) – (2.8) и (3.3) – (3.11) найдем точное (интегральное) и приближенное (асимптотическое) решения для случая, когда приложенное давление имеет импульсивный характер, т. е. $f(t)=\delta(t)$. В этом случае $p_3=0$, т. е. при $t\to\infty$ устанавливается покой. Качественно характер колебаний будет такой же, как и в предыдущем случае. Количественные изменения в асимптотических формулах будут в амплитудных множителях, а фаза изменится на $\pi/2$. Амплитуда коротких неустановившихся поверхностных волн в случае импульсивного атмосферного давления затухает со временем медленнее, чем в рассмотренном ранее. А амплитуда коротких инерционных волн затухает быстрее.

Аналогичные результаты можно получить для произвольной зависимости $f(t)$. В этом случае все движение жидкости можно разделить на неустановившееся движение, которое затухает со временем, и на движение, формирующееся при $t\to\infty$. Последнее будет стационарным, если $f(t)$ стремится к постоянной величине при $t\to\infty$. Качественно характер неустановившегося движения будет такой же, как в рассмотренном случае.

Поступила 29 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
2. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. *Rao V. S.* Surface waves in rotating liquids. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, vol. 65, pt 1, p. 309.
4. *Войт С. С.* Волны, возбуждаемые периодической системой давлений, перемещающихся по поверхности вращающейся жидкости. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4.
5. *Greenspan H. P.* The theory of rotating fluids. Cambridge, Cambridge Univ. Press., 1968.
6. *Sant-Guily B.* Sur les ondes d'inertie en milieu homogène. C. r. Acad. Sci., 1971, vol. 272, No. 20, pp. 2531, 2532.
7. *Debnath L.* In the cauchy-poisson wave problem in a rotating fluids. Indian J. Pure and Appl. Math., 1972, vol. 3, No. 1, pp. 1—11.
8. *Beardsley R. C.* An experimental study of inertial waves in a closed cone. Stud. Appl. Math., 1970, vol. 49, No. 2, pp. 187—196.
9. *Федорюк М. В.* Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 2, № 1, стр. 145—150.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.