

О СФЕРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРОД
ПО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Н. Н. ВЕРИГИН, В. С. САРКИСЯН, Ю. Л. ТАРОЩИН

(Москва)

Рассматривается сферическая задача о фильтрации жидкостей (или газов), закачиваемых через скважину с постоянным дебитом при упругом режиме фильтрации. Проницаемость пласта считается экспоненциальной функцией координат. Вязкости нагнетаемой и вытесняемой жидкостей считаются различными.

В целях увеличения емкости пластов — коллекторов, используемых для захоронения промышленных стоков и газов, применяются различные методы повышения трещиноватости и проницаемости горных пород (гидроимпульсная техника, взрывы и другие). В результате этого в породах образуется сферическая область, в которой проницаемость вдоль радиуса изменяется. Характер этого изменения хорошо описывается экспоненциальной функцией.

Закачка промстоков или промышленных газов в такую область приводит к вытеснению пластовой жидкости (или газа).

Задача о вытеснении одной жидкости несмешивающейся с нею другой жидкостью при жестком режиме фильтрации впервые рассматривалась в [1-5].

При этом изучалась область конечных размеров, ограниченная двумя границами с заданными давлениями или расходами (линейная и осесимметричная задачи). Проницаемость пласта считалась независимой от координат.

Особенностью этих задач является то, что в них нельзя рассматривать неограниченную или полуограниченную области фильтрации, так как при жестком режиме фильтрации на бесконечности не выполняется условие ограниченности давления (напора).

Упругий режим фильтрации двух несмешивающихся жидкостей впервые рассматривался в [6], а позднее в [7, 8] и других работах. При этом исследовались линейные и осесимметричные задачи для неограниченной области.

В работах [9, 10] приведены решения некоторых задач со сферической симметрией для неограниченной области при жестком режиме фильтрации и скачкообразном изменении проницаемости вдоль радиуса. В задачах [6-10] условие ограниченности давления выполняется. В [11] рассмотрен случай гиперболического изменения проницаемости пород.

Пусть в пласте имеется сферическая полость радиусом $r=r_0$, к которой примыкает область радиусом $r_0 \leq r \leq R_0$, где проницаемость с удалением от границы сферической полости уменьшается по экспоненциальному закону

$$(0.1) \quad k(\bar{r}) = \alpha \exp(-\beta \bar{r}), \quad \bar{r}_0 \leq \bar{r} \leq 1 \\ \alpha = k_0 \exp(\beta \bar{r}_0), \quad \beta = \frac{1}{1-\bar{r}_0} \ln \frac{k_0}{k_1}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{R_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_0}$$

где k_0 и k_1 — проницаемости при $\bar{r}=\bar{r}_0$ и $\bar{r}=1$.

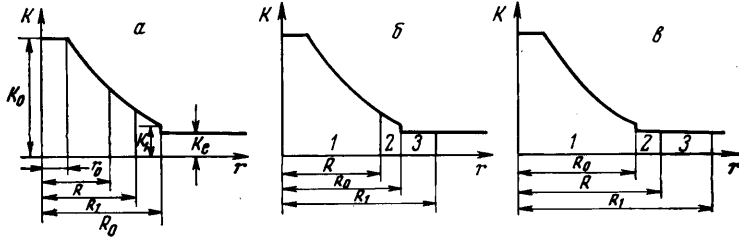
При $\bar{r} > 1$ проницаемость постоянна и равна естественной, т. е. $k(\bar{r}) = k_e = \text{const}$.

Процесс закачки жидкости в пласт разделим на три фазы (фигура, а-в): а — граница раздела $r=R$ и граница зоны возмущения $r=R_1$, где давление равно естественному P_e , находятся в зоне повышенной трещиноватости ($r_0 \leq R \leq R_1 \leq R_0$); б — граница раздела $r=R$ еще находится в пределах зоны повышенной трещиноватости, а граница зоны возмущения $r=R_1$ уже переместилась в зону естественной проницаемости ($r_0 < R < R_0 \leq$

$\leq R_1$); e — обе границы $r=R$ и $r=R_1$ находятся в пределах зоны естественной проницаемости ($r_0 < R_0 \leq R < R_1$).

Ниже рассматриваются все три фазы.

Область фильтрации разделим на три зоны (фигура): 1 — зона нагнетаемой жидкости в пределах пласта с повышенной трещиноватостью по (0.1); 2 — зона вытесняемой жидкости в пределах зоны повышенной трещиноватости (во время третьей фазы фильтрации эта зона перемещается



в породы с естественной проницаемостью); 3 — зона вытесняемой жидкости в породах с естественной проницаемостью.

В дальнейшем будем считать, что закачка жидкости в пласт производится с постоянным расходом Q , кроме того, жидкости считаются не смешивающимися и пренебрегается влиянием силы тяжести.

Уравнения фильтрации для всех трех зон можно записать так:

$$(0.2) \quad \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{k(\bar{r})}{\mu_j} \bar{r}^2 \frac{\partial p_i}{\partial \bar{r}} \right] = \beta_i^* \frac{\partial p_i}{\partial t}, \quad i=1, 2, 3, \quad j=1, 2$$

$$(0.3) \quad \beta_1^* = \alpha_1 n + \alpha_3 (1-n), \quad \beta_2^* = \alpha_2 n + \alpha_3 (1-n), \quad \beta_3^* = \alpha_2 n_e + \alpha_e (1-n_e)$$

Здесь p_{1-3} — давления соответственно в зонах 1, 2 и 3, $k(\bar{r})$ для зоны повышенной трещиноватости принимаются по (0.1), а для естественного пласта $k(\bar{r}) = k_e = \text{const}$, $\mu_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$ — вязкость и коэффициенты сжимаемости нагнетаемой и вытесняемой жидкостей, α_3 и α_e — коэффициенты сжимаемости пород зоны повышенной трещиноватости и естественных пород, $n = n(r)$ — пористость пород зоны повышенной трещиноватости, n_e — пористость естественных пород ($n_e = \text{const}$), β_{1-3}^* — коэффициенты упругоэластичности, характеризующие сжимаемость пород и жидкостей.

Величины $\beta_{1,2}^*$ являются функциями от r , а β_3^* — постоянная. Однако учет переменности $\beta_{1,2}^*$ в уравнениях (0.2) приводит к математическим осложнениям при решении этих задач. В [11] показано, что ошибка, возникающая при замене переменных коэффициентов упругоэластичности $\beta_{1,2}^*$ постоянным значением, равным естественному, составляет примерно 5% и может не учитываться. Более важное значение имеет учет изменений активной пористости при расчетах продвижения границы раздела нагнетаемой и вытесняемой (пластовой) жидкостей. Учитывая сказанное уравнение (0.2), можно представить в следующем виде:

$$(0.4) \quad \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\exp(-\beta \bar{r}) \bar{r}^2 \frac{\partial p_1}{\partial \bar{r}} \right] = \frac{R_0^2}{a_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

$$(0.5) \quad \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\exp(-\beta \bar{r}) \bar{r}^2 \frac{\partial p_2}{\partial \bar{r}} \right] = \frac{R_0^2}{a_2} \frac{\partial p_2}{\partial t}$$

$$(0.6) \quad \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r}^2 \frac{\partial p_3}{\partial \bar{r}} \right) = \frac{R_0^2}{a_e} \frac{\partial p_3}{\partial t}$$

$$\left(a_1 = \frac{\alpha}{\beta_1^* \mu_1}, a_2 = \frac{\alpha}{\beta_2^* \mu_2}, a_e = \frac{k_e}{\beta_3^* \mu_2} \right)$$

Далее решается система (0.4) — (0.6) с соответствующими граничными условиями для всех трех фаз.

I. Первая фаза фильтрации (фигура, а). Во время первой фазы область возмущения R_1 находится в пределах зоны повышенной трещиноватости и пористости ($\bar{R}_1 \leq 1$), поэтому имеют место только уравнения (0.4) для первой зоны ($\bar{r} \leq \bar{r} \leq \bar{R}$) и (0.5) для второй зоны ($\bar{R} \leq \bar{r} \leq \bar{R}_1$). Примем, что в первой зоне режим фильтрации является жестким, тогда в (0.4) можно положить $\partial p_1 / \partial t = 0$. Во второй зоне режим фильтрации считается упругим, однако, следуя [13], осредним в правой части (0.5) по координате r и будем считать его функцией времени $C_3(t)$. Тогда интегралы (0.4), (0.5)

$$(1.1) \quad p_1 = -C_1 F_1(\beta, \bar{r}) + C_2$$

$$(1.2) \quad p_2 = \frac{1}{3} C_3 F_2(\beta, \bar{r}) - C_4 F_1(\beta, \bar{r}) + C_5$$

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(\beta, \bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}} \exp(\beta \bar{r}) - \beta \text{Ei}(\beta \bar{r}) \\ F_2(\beta, \bar{r}) = \left(\frac{\bar{r}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) \exp(\beta \bar{r}) \\ \text{Ei}(x) = - \int_x^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du \end{array} \right.$$

Постоянные интегрирования C_{1-5} определяются из граничных условий

$$(1.4) \quad Q = -4\pi \frac{\alpha R_0}{\mu_1} \left| \bar{r}^2 \exp(-\beta \bar{r}) \frac{\partial p_1}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{r}_0} = \text{const}$$

$$(1.5) \quad p_1|_{\bar{r}=\bar{R}} = p_2|_{\bar{r}=\bar{R}}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{R}} = \rho \frac{\partial p_2}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{R}}$$

$$(1.6) \quad p_2|_{\bar{r}=\bar{R}_1} = p_e = \text{const}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{R}_1} = 0$$

$$(1.7) \quad \rho = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1}{R_0}$$

Параметры $R(t)$ и $R_1(t)$ находятся из следующих условий:

$$(1.8) \quad n(R) \frac{dR}{dt} = - \frac{k(R)}{\mu_1} \frac{\partial p_1(R, t)}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$(1.9) \quad Qt = 4\pi \int_R^{R_1} \beta_2^* r^2 [p_2(r, t) - p_e] dr$$

Здесь $n(R)$ — пористость на границе раздела, β_2^* — коэффициент упругости пласта в пределах второй зоны. Хотя он зависит от радиуса r , в дальнейшем осредняем его и считаем не зависящим от r .

При решении уравнения (1.8) предполагается, что проницаемость k и пористость n связаны между собой соотношением

$$(1.10) \quad k = An^\theta$$

где A и θ — постоянные, определяемые по опытным данным. Исследования показывают, что $\theta = 3 \div 4$. Для конкретности в дальнейшем будем считать $\theta = 4$.

Определяя коэффициенты C_{1-3} и подставляя в (1.1), (1.2), найдем давление $p_{1,2}$

$$(1.11) \quad p_1 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi\alpha R_0} \left\{ F_1(\beta, \bar{r}) - F_1(\beta, \bar{R}) + \frac{\bar{R}_1^3}{\rho(\bar{R}_1^3 - \bar{R}^3)} F_1(\beta, \bar{R}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho(\bar{R}_1^3 - \bar{R}^3)} [F_2(\beta, \bar{R}) - F_2(\beta, \bar{R}_1) - \bar{R}_1^3 F_1(\beta, \bar{R}_1)] \right\}$$

$$(1.12) \quad p_2 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} \frac{1}{\bar{R}_1^3 - \bar{R}^3} \{ F_2(\beta, \bar{r}) + \bar{R}_1^3 [F_1(\beta, \bar{r}) - \\ - F_1(\beta, \bar{R}_1)] - F_2(\beta, \bar{R}_1) \}$$

В (1.11), (1.12) функции $F_1(\beta, \bar{R})$ и $F_1(\beta, \bar{R}_1)$ определяются по (1.3) соответственно при $\bar{r} = \bar{R}$ и $\bar{r} = \bar{R}_1$. Аналогично вычисляются функции $F_2(\beta, \bar{R})$ и $F_2(\beta, \bar{R}_1)$.

Забойное давление p_0 находится по (1.11) при $\bar{r} = \bar{r}_0$ ($\bar{r}_0 = r_0 / R_0$).

Вводя значение $k(\bar{R})$ по (0.1), p_1 по (1.11) в (1.8) и интегрируя в пределах от r_0 до R и от 0 до t , найдем закон движения границы раздела

$$(1.13) \quad \tau\psi = F_3(\beta, \bar{r}_0) - F_3(\beta, \bar{R})$$

$$(1.14) \quad \tau = \frac{at}{R_0^2}, \quad \psi = -\frac{Q}{16\pi a R_0} \left(\frac{A}{\alpha} \right)^{1/4}$$

$$(1.15) \quad F_3(\beta\bar{r}) = \frac{1}{\beta} \left(\bar{r}^2 + \frac{8\bar{r}}{\beta} + \frac{32}{\beta^2} \right) \exp(-0.25\beta\bar{r})$$

Функции $F_3(\beta, \bar{r}_0)$ и $F_3(\beta, \bar{R})$ определяются по (1.15) при $\bar{r} = \bar{r}_0, \bar{R}$. В (1.14) a — средняя пьезопроводность зоны $\bar{r}_0 \leq \bar{r} < 1$.

Радиус зоны возмущения R_1 находим, подставляя значение p_2 по (1.12) в (1.9)

$$(1.16) \quad \tau = \frac{1}{\bar{R}_1^3 - \bar{R}^3} \left\{ F_4(\beta, \bar{R}_1) - F_4(\beta, \bar{R}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} (\bar{R}_1^3 - \bar{R}^3) \left[\frac{1}{\beta^2} (\beta\bar{R}_1 - 1) \exp(\beta\bar{R}_1) + \bar{R}_1^3 F_1(\beta, \bar{R}_1) \right] \right\}$$

$$(1.17) \quad F_4 = \frac{1}{\beta^2} \left(\bar{r}^3 - \frac{4\bar{r}^2}{\beta} + \frac{8\bar{r}}{\beta^2} - \frac{8}{\beta^3} \right) \exp(\beta\bar{r}) - \frac{\beta\bar{R}_1^3}{3} \bar{r} \text{Ei}(\beta\bar{r}) + \\ + \frac{R_1^3}{3} \left(\bar{r}^2 + \frac{\bar{r}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) \exp(\beta\bar{r})$$

Функции $F_4(\beta, \bar{R})$ и $F_4(\beta, \bar{R}_1)$ определяются по (1.17) при $\bar{r} = \bar{R}, \bar{R}_1$; $F_1(\beta, \bar{R})$ вычисляется по (1.3).

Рассмотрим частные случаи, вытекающие из этих решений.

1°. Если в водоносный пласт нагнетается газ, то в формулах (1.10),

(1.11) $\mu_1 \approx 0$ ($\rho=0$) и тогда

$$(1.18) \quad p = p_0 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} \frac{1}{\bar{R}_1^3 - \bar{R}^3} [\bar{R}_1 F_1(\beta, \bar{R}) - F_1(\beta, \bar{R}_1) + F_2(\beta, \bar{R}) + F_2(\beta, \bar{R}_1)]$$

Давление p_2 определяется по (1.12), а координаты зоны возмущения и границы раздела — по (1.16) и (1.13).

2°. Если в пласт, насыщенный газом, нагнетается жидкость, то в решениях (1.11), (1.12) принимается $\mu_2 \approx 0$ ($\rho \rightarrow \infty$). Тогда

$$(1.19) \quad p_1 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi\alpha R_0} [F_1(\beta, \bar{r}) - F_1(\beta, \bar{R})]$$

$$(1.20) \quad p_2 = p_e = \text{const}$$

В формулах (1.18), (1.19) функции F_1 и F_2 выражаются по (1.3). Забойное давление p_0 находится по (1.19) при $r=r_0$.

Координата границы раздела R находится по (1.13), а зона возмущения $R_1 \rightarrow \infty$.

В дальнейшем для упрощения записи черточки над r , r_0 , R_1 , R опускаются.

2. Вторая фаза фильтрации (фигура, б). Во второй фазе граница раздела жидкостей R находится в зоне повышенной трещиноватости и проницаемости ($R \leq 1$), а граница зоны возмущения R_1 — в зоне естественной проницаемости ($R_1 > 1$). Поэтому в этом случае имеют место все три уравнения (0.4) — (0.6). Уравнения (0.4) и (0.5) решаем, предполагая $\partial p_{1,2}/\partial t = 0$, а в (0.6) осредняем член $a_e^{-1} \partial p_3/\partial t$ по координате r , считая его равным $c_5(t)$.

Тогда решение этих уравнений можно представить так:

$$(2.1) \quad p_1 = C_1 \left[\beta \text{Ei}(\beta r) - \frac{1}{r} \exp(\beta r) \right] + C_2, \quad r_0 \leq r \leq R$$

$$(2.2) \quad p_2 = C_3 \left[\beta \text{Ei}(\beta r) - \frac{1}{r} \exp(\beta r) \right] + C_4, \quad R \leq r \leq 1$$

$$(2.3) \quad p_3 = \frac{C_5}{2} r^2 - \frac{C_6}{r} + C_7, \quad 1 < r \leq R_1$$

Постоянные интегрирования C_{1-7} определяются из (1.4), (1.5), а также из условий

$$(2.4) \quad p_2|_{r=1} = p_3|_{r=1}, \quad \left. \frac{\partial p_2}{\partial r} \right|_{r=1} = \varepsilon \left. \frac{\partial p_3}{\partial r} \right|_{r=1}$$

$$(2.5) \quad p_3|_{r=R_1} = p_e = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial p_3}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0$$

$$(2.6) \quad \varepsilon = \frac{k_e}{\alpha} \exp(\beta)$$

Подставляя (2.1) — (2.3) в (1.4), (1.5), (2.4), (2.5), найдем коэффициенты C_{1-7} . Тогда давления p_{1-3} будут определяться по формулам

$$(2.7) \quad p_1 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi\alpha R_0} \left[F_1(\beta, r) - \frac{1}{\rho} F_1(\beta, 1) - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) F_1(\beta, R) + \frac{1}{\rho} F_5(1, R) \right]$$

$$(2.8) \quad p_2 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} [F_1(\beta, r) - F_1(\beta, 1) + F_5(1, R_1)]$$

$$(2.9) \quad p_3 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} F_5(r, R_1)$$

$$(2.10) \quad F_5(r, R_1) = \frac{\exp(\beta)}{\varepsilon(R_1^3 - 1)} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{\bar{r}} - \frac{3}{2} R_1^2 \right)$$

При вычислении $F_5(1, \bar{R}_1)$ в (2.10) принимается $r=1$.

Координата границы раздела R определяется по (1.13). Подставляя в (1.9) вместо p_2 значение p_3 по (2.9), а вместо β_2^* величину $\beta_3^* = \text{const}$ и интегрируя в пределах от 1 до R_1 , найдем следующее соотношение для определения радиуса зоны возмущения R_1 :

$$(2.11) \quad \tau = \frac{1}{\bar{a}_e(R_1 - 1)} [0.1(R_1^5 - 1) + 0.5(R_1^2 - R_1^3)], \quad \bar{a}_e = \frac{a_e}{a}$$

Из (2.11) следует, что $\tau=0$ при $R_1=1$, т. е. продолжительность первой фазы не учитывается. Это происходит вследствие учета упругого режима фильтрации только в третьей зоне. Более точно задачу можно решить, если учесть упругий режим еще и во второй зоне.

Рассмотрим частные случаи.

1°. В случае нагнетания газа в водоносный пласт для определения давления p_{1-3} в (2.7) — (2.10) принимается $\mu_1 \approx 0$ ($\rho=0$). Тогда получим

$$(2.12) \quad p_1 = p_0 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} [F_1(\beta, R) - F_1(\beta, 1) + F_5(1, R_1)]$$

$$(2.13) \quad p_2 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} [F_1(\beta, r) - F_1(\beta, 1) + F_5(1, R_1)]$$

$$(2.14) \quad p_3 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} F_5(r, R_1)$$

где F_5 выражается по (2.10).

Из выражения (2.12) видно, что давление в зоне, занятой газом, не зависит от радиуса r и является только функцией времени t , поэтому давление p_1 равно забойному p_0 .

Радиусы зоны возмущения R_1 и границы раздела R находятся по-прежнему из (2.11) и (1.13).

2°. В случае нагнетания жидкости в пласт, насыщенный газом, для определения давления p_{1-3} в (2.7) — (2.10) принимается $\mu_2 \approx 0$ ($\rho \rightarrow \infty$). Имеем

$$(2.15) \quad p_1 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi\alpha R_0} [F_1(\beta, r) - F_1(\beta, R)]$$

$$(2.16) \quad p_2 = p_3 = p_e = \text{const}$$

Координата границы раздела находится из соотношения (1.13). Зона возмущения здесь $R_1 \rightarrow \infty$.

3°. Если режим фильтрации во всех зонах считать жестким, то давления $p_{1,2}$ по-прежнему будут определяться по (2.1) — (2.2), а p_3 будет

$$(2.17) \quad p_3 = \frac{C_5}{r} + C_6$$

В этом случае граничные условия для определения C_{1-6} выражаются по (1.4), (1.5), (2.4), а вместо уравнений (2.5) будем иметь

$$(2.18) \quad p_3(\infty) = p_e = \text{const}$$

При вышеуказанных условиях давления p_{1-3} определяются по формулам

$$(2.19) \quad p_1 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi\alpha R_0} \left\{ F_1(\beta, r) - F_1(\beta, R) + \frac{1}{\rho} [F_1(\beta, R) - F_1(\beta, 1)] + \frac{1}{\varepsilon\rho} \exp(\beta) \right\}$$

$$(2.20) \quad p_2 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} \left[F_1(\beta, r) - F_1(\beta, 1) + \frac{1}{\varepsilon} \exp(\beta) \right]$$

$$(2.21) \quad p_3 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e R_0} \frac{\exp(\beta)}{r}$$

Закон движения границы раздела R находится из (1.13). Здесь также можно получить частные случаи $\mu_1=0$ и $\mu_2=0$.

3. Третья фаза фильтрации (фигура, в). В этом случае граница раздела $r=R$ и граница области возмущения $r=R_1$ находятся в зоне с естественной проницаемостью k_e .

Для третьей фазы, как и для второй, в уравнениях (0.4) — (0.6) предполагаем, что $\partial p_{1,2} / \partial t = 0$, и осредняем член $a_e^{-1} \partial p_3 / \partial t$ по координате r , считая его функцией $c_3(t)$. Тогда давления p_{1-3} будут выражаться по (2.1) — (2.3), где p_1 — давление в зоне $r_0 \leq r \leq 1$, p_2 — в зоне $1 \leq r \leq R$, а p_3 — в зоне $R \leq r \leq R_1$.

Коэффициенты интегрирования C_{1-7} в этом случае определяются из условий

$$(3.1) \quad Q = -4\pi \frac{\alpha R_0}{\mu_1} \left[r^2 \exp(-\beta r) \frac{\partial p_1}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_0} = \text{const}$$

$$(3.2) \quad p_1|_{r=1} = p_2|_{r=1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$(3.3) \quad p_2|_{r=R} = p_3|_{r=R}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=R} = \rho \frac{\partial p_3}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$(3.4) \quad p_3|_{r=R_1} = p_e = \text{const}, \quad \frac{\partial p_3}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{k_e}{\alpha} \exp(\beta), \quad \rho = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Аналогично случаю второй фазы находим давления

$$(3.5) \quad p_1 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi\alpha R_0} \left\{ F_1(\beta, r) - F_1(\beta, 1) + \left(1 - \frac{1}{R}\right) \frac{\exp(\beta)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon R} \exp(\beta) \frac{R^3 + 2R_1^3 - 3RR_1^2}{2(R_1^3 - R^3)} \right\}$$

$$(3.6) \quad p_2 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi k_e R_0} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \left[1 - \frac{R^3 + 2R_1^3 - 3RR_1^2}{2\rho(R_1^3 - R^3)} \right] \right\}$$

$$(3.7) \quad p_3 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e R_0} \frac{1}{R_1^3 - R^3} \left[\frac{1}{2} r^2 + \frac{R_1^3}{r} - \frac{3}{2} R_1^2 \right]$$

Для определения координаты границы раздела вводим в (1.8) вместо p_1 величину p_2 по (3.6), принимая $k(R) = k_e$, $n = n_e = \text{const}$, и интегрируем в

пределах от t_2 до t и от 1 до R

$$(3.8) \quad (\tau - \tau_2) \psi_1 = \exp(\beta) \left[\left(1 + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right) \exp(\beta) - \right. \\ \left. - \left(R^2 + \frac{2R}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right) \exp(\beta R) \right] \\ \tau = \frac{at}{R_0^2}, \quad \tau_2 = \frac{at_2}{R_0^2}, \quad \psi_1 = \frac{Q\beta}{4\pi n_e a R_0}$$

Здесь t_2 — время прохождения нагнетаемой жидкости от r_0 до R_0 , определяемое по формуле (1.13) при $R=1$, т. е.

$$(3.9) \quad t_2 = \frac{16\pi R_0^3}{Q\beta} \left(\frac{\alpha}{A} \right)^{1/4} [F_3(\beta, r_0) - F_3(\beta, 1)]$$

где F_3 выражается по (1.15).

Радиус зоны возмущения R_1 находим по (1.9), принимая вместо p_2 величину p_3 по (3.7) и заменяя β_2^* на $\beta_3^* = \text{const}$

$$(3.10) \quad (\tau - \tau_2) = \frac{1}{2\bar{a}_e (R_1^3 - R^3)} \left[\frac{1}{5} (R_1^5 - R^5) - R_1^3 R^2 + R_1^2 R^3 \right]$$

Для частных случаев будем иметь.

1°. При закачке газа в водоносный пласт можно в (3.1) — (3.3) положить $\mu_1 \approx 0$. Тогда найдем

$$(3.11) \quad p_1 = p_2 = p_0 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e R_0} \frac{R^3 + 2R_1^3 - 3RR_1^2}{2R(R_1^3 - R^3)}$$

$$(3.12) \quad p_3 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e R_0} \frac{1}{R_1^3 - R^3} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{3}{2} R_1^2 \right)$$

Координаты границы раздела R и зоны возмущения R_1 определяются по (3.8) и (3.10).

2°. При закачке жидкости в газоносный пласт в (3.1) — (3.3) можно положить $\mu_2 \approx 0$. Получим

$$(3.13) \quad p_1 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi \alpha R_0} \left[F_1(\beta, r) - F_1(\beta, 1) + \frac{1}{\varepsilon} \exp(\beta) \left(1 - \frac{1}{R} \right) \right]$$

$$(3.14) \quad p_2 = p_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi k_e R_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \quad p_3 = p_e = \text{const}$$

Граница раздела находится из условий

$$n_e \frac{dR}{dt} = - \frac{k_e}{\mu_1 R_0^2} \frac{\partial p_2(R)}{\partial r}$$

Вводя сюда p_2 по (3.14) и интегрируя в пределах от t_2 до t и от 1 до R , получим

$$t = t_2 + \frac{4}{3} \frac{\pi R_0^3}{Q} (R^3 - 1)$$

где t_2 определяется по (3.9). Зона возмущения $R_1 \rightarrow \infty$.

3°. В случае жесткого режима фильтрации во всех зонах ($\partial p_{1-3} / \partial t = 0$) аналогично случаю второй фазы находим

$$p_1 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e R_0} \left[\frac{1}{R} (1-\rho) - \rho \right] + \frac{Q\mu_1}{4\pi \alpha R_0} [F_1(\beta, r) - F_1(\beta, 1)]$$

$$p_2 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e R_0} \frac{1}{R} + \frac{Q\mu_1}{4\pi k_e R_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

$$p_3 = p_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e R_0} \frac{1}{r}$$

Координата границы раздела находится по формуле (3.8).

Численные расчеты при значениях безразмерных параметров

$$\psi = 2.169 \cdot 10^{-9}, \quad r_0 = 0.292, \quad \beta = 7.494, \quad \bar{\alpha}_e = 5.56 \cdot 10^{-6}$$

показали, что продолжительность первой фазы t_1 составляет секунды, поэтому можно ее не рассматривать.

R	0.308	0.462	0.616	0.789	1.0	
$\tau \cdot 10^{-4}$	8.5	137.1	328.2	554.6	942.9	
Жесткий режим						
$\Delta \bar{p}_0$	$\rho = 0.1$	8.719	8.717	8.714	8.706	8.682
	$\rho = 1$	8.719	8.719	8.719	8.719	8.719
	$\rho = 10$	8.720	8.737	8.764	8.821	9.025
Упругий режим						
R_1	2.79	8.99	14.23	17.68	23.09	
$\Delta \bar{p}_0$	$\rho = 0.1$	4.453	7.284	7.803	7.973	8.130
	$\rho = 1$	4.453	7.286	7.808	7.983	8.161
	$\rho = 10$	4.454	7.304	7.852	8.086	8.467

Результаты расчета для второй фазы приводятся в таблице для жесткого и для упругого режимов фильтрации. Безразмерное забойное (избыточное) давление

$$\Delta \bar{p}_0 = \frac{4\pi \alpha R_0}{Q\mu_1} \Delta p_0, \quad \Delta p_0 = p_0 - p$$

определено для трех значений $\rho = \mu_1 / \mu_2 = 0.1, 1.10$.

Видно, что в случае жесткого режима фильтрации при закачке менее вязкой жидкости в более вязкую ($\rho < 1$) давление Δp_0 со временем уменьшается, стремясь к предельному значению, когда весь пласт будет насыщен менее вязкой жидкостью. При закачке более вязких жидкостей в менее вязкие ($\rho > 1$) наблюдается обратная картина, т. е. с увеличением продолжительности закачки давление возрастает, стремясь к предельному значению, когда пласт полностью будет насыщен более вязкой жидкостью. Однако изменения давления как при $\rho < 1$, так и при $\rho > 1$ незначительны. При упругом режиме фильтрации с увеличением времени закачки t давление в

обоих случаях ($\rho \leq 1$) растет. С увеличением ρ при одинаковых t давление повышается. Изменение давления здесь в зависимости от t существенно.

При принятых выше значениях ψ , r_0 , β , \bar{a}_e и ρ забойное (избыточное) давление с большой точностью можно определить по формуле (вместо (2.7) при $r=r_0$)

$$\Delta p_0 = \frac{Q\mu_2}{4\pi\alpha R_0} F_5(1, R), \quad \Delta p_0 = p_0 - p_e$$

где $F_5(1, R)$ определяется по (2.10).

Поступила 14 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.—Л., Гостоптехиздат, 1949.
2. Щелкачев В. Н. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1944.
3. Щелкачев В. Н. Расстановка скважин в пластах с водонапорным режимом. В сб. «Научно-исследовательские работы нефтяников», вып. 3. М., Гостоптехиздат, 1944.
4. Щелкачев В. Н. Основы подземной нефтяной гидравлики. М., Гостоптехиздат, 1945.
5. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
6. Веригин Н. Н. Нагнетание вязких растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
7. Рубинштейн Л. И. О решении задачи Н. Н. Веригина. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 1.
8. Камынин Л. И. О линейной задаче Веригина. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 6.
9. Веригин Н. Н., Саркисян В. С. Закачка жидкостей в пласты-коллекторы, имеющие локальную зону искусственно повышенной трещиноватости, насыщенную водой, при постоянном дебите. Тр. Ин-та ВОДГЕО, 1973, вып. 37.
10. Веригин Н. Н., Саркисян В. С. Закачка жидкостей в пласты-коллекторы, имеющие локальную зону искусственной трещиноватости, насыщенную газом, при постоянном дебите. Тр. Ин-та ВОДГЕО, 1973, вып. 37.
11. Шержуков Б. С. Автомодельное решение задачи сферической фильтрации жидкости и газа в неоднородном пласте. Тр. Ин-та ВОДГЕО, 1973, вып. 37.
12. Лайбензон Л. С. Собрание трудов, т. 2. Подземная гидрогазодинамика. М., Изд. АН СССР, 1953.
13. Пирвердян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1956.