МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1974

УДК 532.529.5:533.6.011.72

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

Р. И. НИГМАТУЛИН, В. Ш. ШАГАПОВ

(Москва, Уфа)

Теоретически исследуется структура стационарной ударной волны в жидкости, содержащей пузырьки газа. Для описания такой двухфазной смеси используется двухскоростная, двухтемпературная, с двумя давлениями модель [1], учитывающая мелкомасштабные течения, несовпадение скоростей, температур и давлений фаз, пульсации пузырьков [1]. Показано существование ударных волн как с пульсационной, так и с монотонной структурой. Показано существование как ударных волн, имеющих впереди поверхности разрыва, так и ударных волн с непрерывной структурой. Показано, что в отличие от двухфазных смесей газа с каплями или частицами, где структура волны в основном зависит от межфазного трения, в двухфазных смесях жидкости с пузырьками поведение волны и ее структура кардинально зависят от межфазного теплообмена. При этом характеристики волн, такие как длина пульсационных волн, декремент их затухания, зависят не монотонно от параметров, определяющих интенсивность теплообмена, и не лежат между соответствующими значениями для изотермического и адиабатического режимов поведения пузырьков.

Ударные волны в жидкостях с пузырьками газа теоретически и экспериментально исследовались в [3–7]. Обстоятельный обзор работ по 1971 г. дан в [8].

1. Основные уравнения. Рассмотрим движение жидкости с взвешенными в ней пузырьками газа при следующих [1] основных допущениях: 1) расстояния, на которых параметры потока меняются существенно, много больше расстояний между пузырьками, которые в свою очередь гораздо больше размеров пузырьков (т. е. объемные содержания газовой фазы α_2 достаточно малые: $\alpha_2 \leqslant 0.1$); 2) смесь монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного диаметра δ; 3) вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессах межфазного взаимодействия, и в частности при пульсациях пузырьков.

Кроме того, будем рассматривать случаи, когда отсутствует массообмен между фазами, а температуру жидкости T_1 (в отличие от температуры пузырьков газа) можно считать постоянной.

Для рассматриваемой смеси в рамках представлений сплошной среды, следуя [1], запишем дифференциальные уравнения сохранения масс каждой фазы, числа пузырей и импульсов каждой фазы в одномерном стационарном движении

$$(1.1)\qquad \frac{d(\rho_1 v_1)}{dx}=0,\quad \frac{d(\rho_2 v_2)}{dx}=0,\quad \frac{d(nv_2)}{dx}=0$$

$$\rho_i=\rho_i^\circ\alpha_i,\quad i=1,2,\quad \alpha_1+\alpha_2=1$$

$$\rho_1 v_1\frac{dv_1}{dx}=-\alpha_1\frac{dp_1}{dx}-nf,\qquad \rho_2 v_2\frac{dv_2}{dx}=-\alpha_2\frac{dp_1}{dx}+nf$$

---

[1] Модель [1] в частном случае переходит в модель Б. С. Когарко [2]. Отметим, что более полные результаты Б. С. Когарко имеются в его кандидатской диссертации (МГУ, 1965).

Здесь индекс $i=1$, 2 внизу относится к параметрам соответственно жидкости и газа; ρ_i и ρ_i° — соответственно средняя и истинная плотность i-й фазы; α_i — объемное содержание i-й фазы; n — количество пузырей в единице объема смеси; v_i и p_i — скорость и давление i-й фазы; f — сила межфазного взаимодействия, приходящаяся на один пузырек, за счет трения и эффекта присоединенных масс.

В [9] для жидкости со взвешенными включениями при $\alpha_2 \ll 1$ уравнение импульса несущей (первой) фазы имеет дополнительное слагаемое $d\sigma/dx$ (где $\sigma = k\rho_1^\circ\alpha_2(v_2-v_1)(v_2-v_1)$, $k=1$), которое соответствует пульсационному переносу импульса из-за неоднородности поля скоростей жидкости при относительном движении в ней включений и является аналогом рейнольдсовых напряжений. Оставляя вопрос о значении k, заметим, что для жидкости с пузырями газа при $\alpha_2 \ll 1$ слагаемое $d\sigma/dx$ – величина более высокого порядка малости, чем остальные слагаемые, из-за $\alpha_2 \ll 1$, $|v_2-v_1| \ll v_1$, v_2 (см., например, п. 5).

Так как смесь монодисперсная и фазовые переходы отсутствуют, имеем

$$\alpha_2=\pi n\delta^3/6, \quad \rho_2^\circ/\rho_{20}^\circ=(\delta_0/\delta)^3 \tag{1.2}$$

Здесь и далее везде индекс 0 внизу относится к некоторому фиксированному состоянию, а именно к равновесному состоянию перед волной.

Уравнение притока тепла второй фазы (газа) имеет вид

$$\rho_2 v_2 \frac{du_2}{dx} = \frac{\alpha_2 p_2 v_2}{\rho_2^\circ}\frac{d\rho_2^\circ}{dx} + nq \tag{1.3}$$

где u_2 — удельная внутренняя энергия газа, q — интенсивность межфазного теплообмена, приходящаяся на один пузырек. Вместо уравнения энергии первой фазы (жидкости) будет использоваться условие $T_1=T_0=\mathrm{const}$.

Давление фаз и размер пузырей должны быть связаны условием совместного деформирования. Таким условием в данном случае является уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного сферического пузыря в безграничной несжимаемой жидкости

$$\delta v_2 \frac{dw}{dx} + 3w^2 - \frac{(v_1-v_2)^2}{2} + \frac{16\nu_1}{\delta} w = \frac{2(p_2-p_1-4\sigma/\delta)}{\rho_1^\circ} \tag{1.4}$$

$$v_2\frac{d\delta}{dx} = 2w$$

где w — радиальная скорость стенок пузыря, ν_1 — кинематический коэффициент вязкости жидкости и σ — коэффициент поверхностного натяжения. Третье слагаемое в левой части первого уравнения (1.4) приближенно учитывает влияние поступательного движения пузырька относительно жидкости [10].

Численные расчеты, описанные в п. 5, показали, что w и v_1-v_2 – величины одного порядка и влияние третьего и второго слагаемых в случае не очень сильных ударных волн ($p_e/p_0<5$) не существенно в плане сравнения расчетов с экспериментом.

Примем следующие уравнения состояния фаз:

$$p_1=p_0+a_1^2(\rho_1^\circ-\rho_{10}^\circ), \quad u_2=c_2T_2, \quad p_2=(\gamma-1)c_2\rho_2^\circ T_2 \tag{1.5}$$

где a_1 — скорость звука в чистой жидкости, c_2 и γ — теплоемкость при постоянном объеме и показатель адиабаты газовой фазы.

Величины q и f, характеризующие межфазные взаимодействия, можно представить в виде

$$q=\pi\delta^2\beta(T_1-T_2)=\pi\delta\lambda_2 N(T_1-T_2), \quad N=\beta\delta/\lambda_2 \tag{1.6}$$

$$f=f_m+f_f,\qquad f_m=\frac{\pi}{12}\rho_1{}^\circ\left[v_2\frac{d}{dx}(\delta^3(v_1-v_2))+\delta^3(v_1-v_2)\frac{dv_1}{dx}\right]$$

$$f_f=\chi_f\rho_1{}^\circ\nu_1\delta(v_1-v_2),\qquad \chi_f=\chi_f(R_{12}),\qquad R_{12}=\delta(v_1-v_2)\nu_1{}^{-1}$$

где β — коэффициент теплообмена между фазами, N — соответствующее число Нуссельта, λ_2 — коэффициент теплопроводности газа; составляющая f_m соответствует эффекту присоединенных масс[1] из-за ускорения жидкости относительно пузырька, а составляющая f_f — вязкому трению. Коэффициент трения χ_f при числе Рейнольдса $R_{12}<10$ определяется так же, как и для твердой частицы: $\chi_f=3\pi(1+0.15R_{12}^{0.687})$, что связано с действием поверхностно-активных веществ; при $10\leqslant R_{12}\leqslant 500$ значение $\chi_f\approx 6\pi$, что соответствует фомуле В. Г. Левича [12], при $R_{12}>500$ начинает сказываться несферичность пузырька и $C_D\sim\chi_f/R_{12}$ увеличивается с ростом R_{12} [13]. При больших числах Вебера $W=\rho_1{}^\circ\delta(v_1-v_2)^2/\sigma$ несферичность сказывается при меньших R_{12}, что может повлиять и на f_m.

Вместо (1.1) возможен несколько иной подход, использованный в [3, 5, 6, 8]. В (1.1), следуя [1], полагается, что импульс единицы объема смеси равен

$$\rho I=\rho_1v_1+\rho_2v_2 \tag{1.7}$$

и v_1 соответствует среднемассовой скорости жидкой фазы, которая отличается от скорости жидкости вдали от пузыря $v_1{}^\circ$ из-за возмущений, вносимых относительным движением включений. Если вместо v_1 использовать $v_1{}^\circ$, то наряду с (1.7) имеем

$$\rho I=\rho_1v_1{}^\circ+ni_v+\rho_2v_2,\qquad i_v\doteq\frac{1}{2}\rho_1{}^\circ\frac{\pi\delta^3}{6}(v_2-v_1) \tag{1.8}$$

где i_v соответствует импульсу, приходящемуся на один пузырек жидкости из-за его относительного движения.

Численные расчеты, описанные в п. 5, показали, что несмотря на различие между системами, результаты решения практически в плане сравнения с экспериментом неотличимы друг от друга даже для достаточно слабых волн с осциллирующей структурой, реализующихся при допущении политропичности поведения газа в пузырьках, когда учет относительного движения фаз заметно влияет на структуру ударной волны. Это связано с тем, что хотя $|ni_v|\gg\rho_2v_2$, тем не менее $|ni_v|/\rho_1v_1\approx|ni_v|/\rho_1v_1{}^\circ<{}^1/_2\alpha_2\ll 1$, т. е. поток импульса смеси практически равен $\rho_1v_1{}^2\approx\rho_1v_1{}^{\circ 2}$. Кроме того, из (1.7), (1.8) следует:

$$\rho_1v_1=\rho_1v_1{}^\circ+ni_v,\qquad \frac{v_1-v_2}{v_1{}^\circ-v_2}=1-\frac{\alpha_2}{2} \tag{1.9}$$

поэтому, в частности, в выражениях для сил межфазного взаимодействия f_f и f_m вместо $v_1{}^\circ-v_2$ можно подставлять v_1-v_2 (см. (1.6)) и наоборот.

Система уравнений (1.1) — (1.6) замкнутая. Перейдем к безразмерным переменным и приведенным параметрам

$$P_i=\frac{p_i}{p_{10}},\qquad U_i=\frac{v_i}{a_*},\qquad \theta_i=\frac{T_i}{T_0},\qquad r_i=\frac{\rho_i{}^\circ}{\rho_{i0}{}^\circ} \tag{1.10}$$

$$D=\frac{\delta}{\delta_0},\qquad W=\frac{w}{a_*}$$

$$M_2=\frac{\rho_2v_2}{\rho_1v_1}=M_{20}=\frac{\rho_{20}{}^\circ}{\rho_{10}{}^\circ}\frac{\alpha_{20}U_{20}}{\alpha_{10}U_{10}},\qquad M_{12}=\chi_m\frac{\rho_1{}^\circ\alpha_2v_2}{\rho_1v_1}=\chi_m\frac{\alpha_2r_1U_2}{\alpha_{10}U_{10}}$$

$$A_1=\frac{a_1}{a_*},\qquad \eta=\frac{16\nu_1}{\delta_0a_*},\qquad s=\frac{4\sigma}{\delta_0p_{10}},\qquad C_2=\frac{c_2T_{10}}{a_*{}^2},\qquad a_*{}^2=\frac{p_{10}}{\rho_{10}{}^\circ}$$

---

[1] Выражение для f_m записано с учетом [9, 11].

$$(1.11)\qquad f^*=\frac{nf_f}{\rho_1 v_1 a_*}=\frac{6\chi_f \nu_1}{\pi\delta_0^2 a_*}\frac{\alpha_{20}r_1 D(U_1-U_2)}{\alpha_{10}U_2}$$

$$q^*=\frac{nq}{\rho_1 v_1 a_*^2}=\frac{6\lambda_2 T_0 N}{\rho_{10}{}^\circ\delta_0^2 a_*^3}\frac{\alpha_{20}D^2(1-\theta_2)}{\alpha_{10}U_2}$$

Следует отметить, что пузырьковая структура существует при $\alpha_2\leqslant 0.1$, и при умеренных давлениях ($p\leqslant 10-30$ *бар*) $M_{20}\ll M_{12}\ll 1$, $A_1^{-2}\ll 1$.

С учетом (1.10) и (1.11) из (1.1) — (1.5) получим систему уравнений относительно безразмерных переменных

$$(1.12)\qquad (1+M_{12})\frac{dU_1}{dx}-M_{12}\frac{dU_2}{dx}+\frac{\alpha_1}{\alpha_{10}U_{10}}\frac{dP_1}{dx}=-f^*$$

$$-M_{12}\frac{dU_1}{dx}+(M_{20}+M_{12})\frac{dU_2}{dx}+\frac{\alpha_2}{\alpha_{10}U_{10}}\frac{dP_1}{dx}=f^*$$

$$\frac{\alpha_{10}U_{10}}{\alpha_1 U_1^2}\frac{dU_1}{dx}+\frac{\alpha_{10}U_{10}\alpha_2}{\alpha_1^2 U_1 U_2}\frac{dU_2}{dx}+\frac{1}{A_1^2}\frac{dP_1}{dx}=b_3=\frac{6\alpha_{10}U_{10}\alpha_2 W}{\delta_0\alpha_1^2 DU_1U_2}$$

$$M_{20}C_2\frac{d\theta_2}{dx}=b_4=q^*-\frac{6}{\delta_0\alpha_{10}U_{10}}\frac{\alpha_2 P_2 W}{r_2 D^4},\qquad U_2\frac{dD}{dx}=\frac{2}{\delta_0}W$$

$$DU_2\frac{dW}{dx}=b_5=\frac{1}{\delta_0}\left[\frac{2(P_2-P_1-s/D)}{r_1}-3W^2-\frac{\eta W}{D}\right]$$

$$(1.13)\qquad r_1=1+(P_1-1)A_1^{-2},\qquad r_2=D^{-3},\qquad P_2=P_{20}r_2\theta_2$$

$$U_1\alpha_1 r_1=U_{10}\alpha_{10},\qquad r_2\alpha_2 U_2=\alpha_{20}U_{20}$$

Система (1.12) имеет первый интеграл, следующий из суммы двух первых уравнений

$$(1.14)\qquad U_1+M_{20}U_1+\frac{P_1}{\alpha_{10}U_{10}}=U_{10}+M_{20}U_{20}+\frac{P_{10}}{\alpha_{10}U_{10}}$$

2. Основные соотношения, определяющие ударные волны. Далее будет рассматриваться структура плоской стационарной ударной волны, в которой среда переходит из начального равновесного состояния (o) (соответствующие параметры снабжены индексом O внизу), в другое равновесное состояние (e) (соответствующие параметры снабжены индексом e внизу)

$$(2.1)\qquad U_{10}=U_{20}=U_0,\qquad W_0=0,\qquad P_{20}=1+s,\qquad \theta_{20}=\theta_{10}=P_{10}=1$$

$$(2.2)\qquad U_{1e}=U_{2e}=U_e,\qquad W_e=0,\qquad P_{2e}=P_{1e}+s/D_e,\qquad \theta_{2e}=\theta_{1e}=1$$

Значения этих параметров в состоянии e определяются из конечных соотношений (1.13), (1.14) по заданным параметрам в начальном состоянии M_{20}, α_{20}, U_0 ($P_{10}=r_{10}=r_{20}=D_0=\theta_0=1$). Эти соотношения с учетом (2.1) и (2.2) принимают вид

$$(2.3)\qquad U_e\alpha_{1e}r_{1e}=\alpha_{10}U_0,\qquad U_e\alpha_{2e}r_{2e}=\alpha_{20}U_0,\qquad \alpha_{1e}+\alpha_{2e}=1$$

$$r_{1e}=1+\frac{P_{1e}-1}{A_1^2},\qquad r_{2e}=\frac{P_{2e}}{P_{20}}=D_e^{-3},\qquad P_{2e}=P_{1e}+\frac{s}{D_e}$$

$$(U_0-U_e)\alpha_{10}U_0(1+M_{20})=P_{1e}-1$$

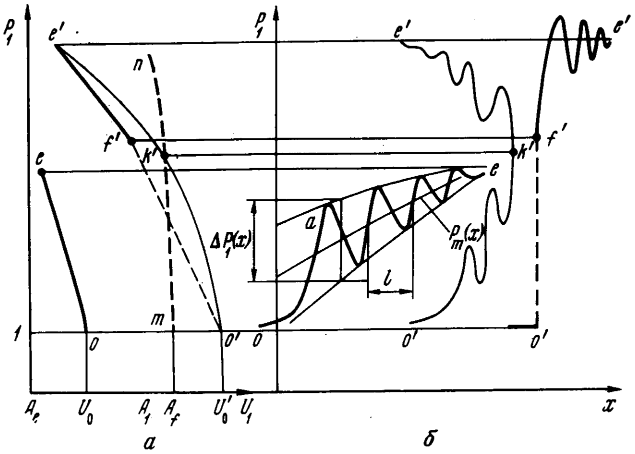
В случае малого влияния капиллярных эффектов ($s\ll 1$), что всегда реализуется при не очень мелких пузырях ($\delta_0\geqslant 0.1$ *мм*) из (2.3) имеем квадратное уравнение относительно $P_e = P_{e1} = P_{e2}$

(2.4) $$(P_e - 1)^2 + k_1(P_e - 1) + k_0 = 0$$

$$k_1 = A_1^2 \left[1 - \frac{\alpha_{10} U_0^2}{A_1^2}(1 + M_{20}) + \frac{1}{A_1^2}\right],$$

$$k_0 = A_1^2 \left[1 - \left(\alpha_{20} + \frac{\alpha_{10}}{A_1^2}\right) \alpha_{10} U_0^2 (1 + M_{20})\right]$$

Для не очень сильных ударных волн $k_1 > 0$ и минимальное значение скорости, при которой существует ударная волна уплотнения ($P_e > 1$), на-



Фиг. 1

ходится из условия $k_0 < 0$, которое приводит к условию существования ударной волны уплотнения

(2.5) $$U_0 > A_e = [\alpha_{10}(\alpha_{20} + \alpha_{10}/A_1^2)(1 + M_{20})]^{-1/2}$$

Если $U_0^2 \ll A_1^2$ и $A_1^{-2} \ll \alpha_{20}$, то можно пренебречь сжимаемостью несущей жидкости и из (2.4) следует:

(2.6) $$P_e = \alpha_{20}\alpha_{10}U_0^2, \qquad U_0 > A_e = (\alpha_{10}\alpha_{20})^{-1/2}$$

Соответствующее A_e значение скорости $a_e = A_e a_*$ может рассматриваться как равновесная скорость звука в данной релаксирующей среде.

Для численных расчетов удобней разрешить первые три уравнения системы (1.12) относительно производных в виде

(2.7) $$\frac{dP_1}{dx} = \frac{\Delta_{p1}}{\Delta}, \qquad \frac{dU_1}{dx} = \frac{\Delta_{v1}}{\Delta}, \qquad \frac{dU_2}{dx} = \frac{\Delta_{v2}}{\Delta}$$

На фиг. 1 схематично показаны интегральные кривые системы (1.12) или (2.7) в плоскости U_1P_1 (фиг. 1, *а*) и в плоскости xP_1 (фиг. 1, *б*). Алгебраическое уравнение $\Delta(U_1, U_2, P_1, \alpha_1, r_1) = 0$ определяет точки, в которых градиенты параметров P_1, U_1, U_2 вдоль координаты x становятся равными бесконечности и меняют знак (за исключением особой точки, где, кроме того, $\Delta_{v1} = \Delta_{v2} = \Delta_{p1} = 0$). Указанное уравнение можно привести к виду $\Delta(U_1, P_1) = 0$. Если учесть, что $\rho_{20}^\circ/\rho_{10}^\circ \ll 1$, $\alpha_2^2 \ll 1$, то решение этого уравнения представляется в виде $U_1 \approx \alpha_1^{-2} A_1$ (линия mn на фиг. 1). Пересечение этой линии с линией начальных состояний ($P_1 = 1$) дает безразмерную скорость $A_f = A_1 \alpha_{10}^{-2}$.

Исследование поля интегральных кривых показало, что аналогично релаксирующему газу и смеси газа с частицами [14] при скорости волны $U_0 < A_f$ существует единственная непрерывная интегральная кривая системы (1.12), соединяющая начальное o и конечное e равновесные состояния (кривая oe на фиг. 1). Если $U_0 > A_f$, то непрерывная интегральная кривая, соединяющая точки o и e, должна пересечь линию бесконечных градиентов mn (см. $o'k'e'$ на фиг. 1), что физически невозможно из-за неоднозначности параметров на волне. В данном случае нужно вводить скачок типа $o'f'$, после которого в зоне релаксации процесс описывается непрерывной интегральной кривой $f'e'$. Соответствующая A_f скорость $a_f = A_f a_* \approx \approx a_1 \alpha_{10}^{-2}$ может рассматриваться как замороженная скорость звука, которая близка к скорости звука в чистой жидкости.

Можно показать, что аналогично релаксирующему газу полученная равновесная скорость звука a_e совпадает с фазовой скоростью распространения слабых гармонических возмущений, имеющих частоту $\omega \to 0$, а полученная замороженная скорость звука a_f совпадает с фазовой скоростью гармонических возмущений, но имеющих частоту $\omega \to \infty$.

Исследуемые здесь стационарные решения со скачком или без скачка есть предельные решения, к которым стремятся нестационарные возмущения со скачком, при сохранении стационарных условий перед (o) и за (e) волной. Например, при вдвижении поршня с постоянной скоростью V_0 в покоящуюся среду в начальный момент около поршня возникнет скачок, причем его начальная амплитуда и начальная скорость распространения при малых объемных содержаниях газа ($\alpha_2 \ll 1$) практически не зависят от присутствия пузырьков и определяются только свойствами жидкости. Далее начнет сказываться сжимаемость пузырьков, и скорость скачка (а вместе с ней и его амплитуда), являющегося передним фронтом возмущения, будет уменьшаться. При этом основное возмущение должно отставать от скачка. При сохранении скорости поршня V_0 установится стационарная волновая конфигурация. Если $V_0 = v_0 - v_e > V_f$, то передний скачок имеет предельную ненулевую амплитуду, что соответствует стационарному режиму $v_0 > a_f$; если $V = v_0 - v_c < V_f$, то интенсивность скачка затухает до нуля, что соответствует стационарному режиму $a_e < v_0 < a_f$.

В опытах [3] получены существенно более высокие скорости волн v_0, чем это следует из (2.6), для достаточно сильных волн ($P_e > 3$), когда явно справедливы упрощения, при которых выведено (2.6). Это, по-видимому, объясняется тем, что на использованном экспериментальном участке не успевал установиться стационарный режим и замерялась скорость переднего нестационарного возмущения, которое еще должно было замедляться и затухать.

При наличии скачка необходимо привлечение дополнительных уравнений на скачке. Эти уравнения для жидкости с пузырьками (в отличие от газа с каплями или частицами) могут быть осложнены дополнительными эффектами, и в частности, дроблением пузырей из-за образования кумулятивных струй в пузырьках при прохождении последних через скачок уплотнения. Кроме того, стационарный режим со скачком реализуется в чрезвычайно сильных ударных волнах, когда необходим учет фазовых переходов и других физико-химических процессов. Так, в воде с пузырьками воздуха при $p_0 = 1$ *бар*, $\alpha_{20} = 0.02$ режим $v_0 > a_f$ реализуется при $p_e > 3700$ *бар*.

Далее будет рассматриваться более интересный для практики случай умеренных стационарных ударных волн без скачка, когда скорость волны v_0 больше равновесной a_e, но меньше замороженной скорости звука.

3. Расчет структуры ударной волны ($a_e < v_0 < a_f$). Равновесным состояниям перед и за ударной волной соответствуют точки o и e, являющиеся особыми точками системы дифференциальных уравнений (1.12). Поэтому необходимо исследование асимптотического поведения системы в этих точках. Для этого система (1.12) линеаризуется относительно значений параметров в этих точках. Решения полученных двух систем (для окрестностей точек o и e) ищутся в виде затухающей (соответственно при $x \to -\infty$

или $x\to+\infty$) экспоненты $U_i=U_\varphi+B_{vi}\exp k_\varphi x$ ($\varphi=o$, e; $\operatorname{Re}k_o>0$, $\operatorname{Re}k_e<0$). Условия существования соответствующих нетривиальных решений, когда можно пренебречь сжимаемостью жидкости ($U_0^2\ll A_1^2$, $A_1^{-2}\ll\alpha_{20}$), капиллярными эффектами ($s\ll1$) и массовым содержанием газа, приводятся к виду

(3.1) $$E_\varphi^{(4)}K_\varphi^4+E_\varphi^{(3)}K_\varphi^3+E_\varphi^{(2)}K_\varphi^2+E_\varphi^{(1)}K_\varphi+E_\varphi^{(0)}=0,\quad K_\varphi=U_\varphi\delta_\varphi k_\varphi,\quad \varphi=o,\ e$$

$$E_\varphi^{(4)}=1+2\alpha_{1\varphi}\alpha_{2\varphi},\qquad E_\varphi^{(3)}=E_\varphi^{(4)}Q_\varphi+\eta_\varphi(E_\varphi^{(4)}+\chi^*)$$

$$E_\varphi^{(2)}=12(\gamma E_\varphi^{(4)}P_\varphi-\alpha_{1\varphi}\alpha_{2\varphi}U_\varphi^2)+Q_\varphi\eta_\varphi(E_\varphi^{(4)}+\chi^*)+\chi^*\eta_\varphi^2$$

$$E_\varphi^{(1)}=12Q_4(E_\varphi^{(4)}P_\varphi-\alpha_{1\varphi}\alpha_{2\varphi}U_\varphi^2+\chi^*\eta_\varphi^2/12)+12\chi^*\eta_\varphi(\gamma P_\varphi-\alpha_{1\varphi}\alpha_{2\varphi}U_\varphi^2)$$

$$E_\varphi^{(0)}=12\chi^*Q_\varphi\eta_\varphi(P_\varphi-\alpha_{1\varphi}\alpha_{2\varphi}U_\varphi^2)$$

$$Q_\varphi=\frac{6\beta}{\rho_{20}{}^\circ c_2a_*}=\frac{6ND_\varphi\lambda_2}{\rho_{20}{}^\circ c_2a_*\delta_0},\quad \eta_\varphi=\frac{\eta}{D_\varphi},\quad \chi^*=\frac{3\chi_f}{4\pi},\quad \gamma=\frac{c_2+R_2}{c_2}$$

Для маловязких жидкостей ($\eta\ll1$) при малых объемных содержаниях пузырей ($\alpha_2\ll1$), используя неявное дифференцирование корней по Q_φ и η_φ, можно выписать значения подходящих корней (3.1) для $Q_\varphi\ll1$ (сжатие пузырьков, близкое к адиабатическому) и для $Q_\varphi\gg1$ (сжатие пузырьков, близкое к изотермическому). Выражения для подходящих K_0 ($\varphi=o$), имеющих положительную действительную часть и определяющих изменение параметров перед волной, имеют вид

(3.2) $$Q_0\ll1$$

$$K_0=\frac{U_0^2-A_e^2}{\gamma A_e^2-U_0^2}Q_0+\Delta,\qquad A_e<U_0<A_e\sqrt{\gamma},\qquad \Delta=O(\alpha_{20},Q_0^2,\eta^2,Q_0\eta)$$

$$K_0=[12\alpha_{10}\alpha_{20}(U_0^2-\gamma A_e^2)]^{1/2}+\frac{(\gamma-1)A_e^2Q_0}{2(U_0^2-\gamma A_e^2)}-\frac{\eta}{2}+\Delta,\qquad U_0>A_e\sqrt{\gamma}$$

(3.3) $$Q_0\gg1$$

$$K_0=[12\alpha_{10}\alpha_{20}(U_0^2-A_e^2)]^{1/2}-6\alpha_{10}\alpha_{20}(\gamma-1)A_e^2Q_0^{-1}-{}^1/_2\eta+\Delta'$$

$$\Delta'=O(\alpha_{20},Q_0^{-2},\eta^2,Q_0^{-1}\eta)$$

Из (3.2) видно, что в адиабатическом случае ($Q_0=0$) подходящий корень (а следовательно, и решение) существует только при $U_0>A_e\sqrt{\gamma}$, а при наличии теплообмена ($Q_0>0$) — при всех $U_0>A_e$. С увеличением Q_0 и U_0 значение K_0 увеличивается, что увеличивает крутизну переднего фронта волны.

Интегральные кривые системы (1.14) допускают смещение вдоль оси x. Поэтому фиксируем при $x=0$ некоторое значение безразмерного диаметра пузырьков $D<1$ (или $B_D=D-1$), причем D нужно взять достаточно близким к единице, чтобы в области $x\leqslant0$ выполнялось линейное решение. Из (1.12) после линеаризации около начального состояния можно определить значения остальных параметров при $x=0$. Эти величины определяют граничные условия для численного решения нелинейной задачи Коши в области $x>0$.

Выражения для корней K_e ($\varphi=e$), определяющие поведение за волной, имеют вид

(3.4) $$Q_e\ll 1,\qquad \Delta^{(1)},\Delta^{(2)},\Delta^{(3)}=O(\alpha_{20},Q_e^2,\eta_e^2,Q_e\eta_e)$$

$$K_e^{(1)}=-\chi^*\eta_e+\Delta^{(1)},\qquad K_e^{(2)}=-\frac{P_e-1}{\gamma P_e-1}Q_e+\Delta^{(2)}$$

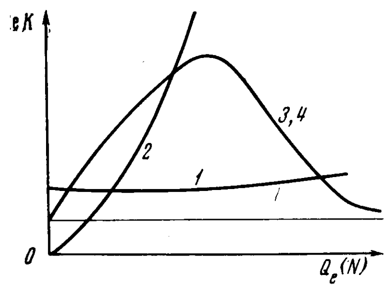
$$K_e^{(3,4)}=\pm[12(\gamma P_e-1)]^{1/2}i-\frac{\gamma-1}{2(\gamma P_e-1)}Q_e-\frac{\eta_e}{2}+\Delta^{(3)},\qquad i=\sqrt{-1}$$

(3.5) $$Q_e\gg 1,\qquad \Delta^{(1)},\Delta^{(3)}=O(\alpha_{20},Q_e^{-2},\eta_e^2,Q_e\eta_e)$$

$$K_e^{(1)}=-\chi^*\eta_e+\Delta^{(1)},\qquad K_e^{(2)}=-Q_e+O(1)$$

$$K_e^{(3,4)}=\pm[12(P_e-1)]^{1/2}i-6(\gamma-1)P_eQ_e^{-1}-{}^1/_2\eta_e+\Delta^{(3)}$$

Все четыре корня K_e имеют отрицательную действительную часть, т. е. дают затухание возмущений при $x\to\infty$. Решение около конечного равновесного состояния за волной (e) есть в общем случае суперпозиция четырех фундаментальных решений, описывающих монотонное экспоненциальное приближение к состоянию e (корни $K_e^{(1)}$ и $K_e^{(2)}$) и затухающие по экспоненте гармонические колебания (сопряженные корни $K_e^{(3)}$ и $K_e^{(4)}$).



Фиг. 2

На фиг. 2 проиллюстрирована зависимость, подтвержденная численными расчетами, действительных частей корней (3.4), определяющих интенсивность затухания возмущения и стремления к конечному состоянию e, от величины Q_e, характеризующей теплообмен пульсирующего пузыря. Цифры на кривых фиг. 2 соответствуют номеру корня. Следует обратить внимание на немонотонность зависимости от Q_e действительной части комплексных корней $K_e^{(3)}$ и $K_e^{(4)}$, определяющих декремент затухания пульсаций.

4. Теплообмен пузырька с жидкостью. Характерная радиальная толщина зоны, где реализуется перепад температур, определяется выражением

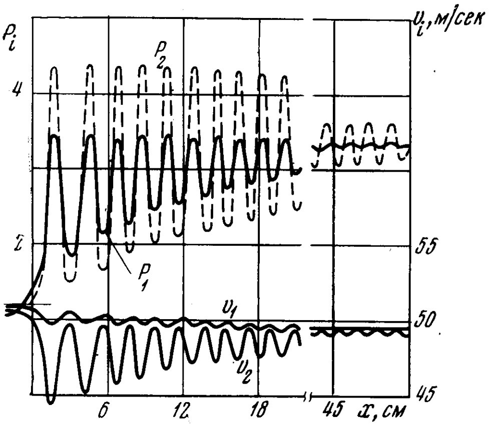
(4.1) $$\Delta r=(\lambda_2 t_*/c_2\rho_2^\circ)^{1/2}=(h_2t_*)^{1/2},\qquad h=\lambda/c\rho$$

где t_* — характерное время изменения размера пузырька (например, период пульсаций). Если $\Delta r\ll\delta$, то как некоторое приближение можно полагать, что температура от центра пузырька до радиуса $r={}^1/_2\delta-\Delta r$ постоянна и равна T_2, а от $r={}^1/_2\delta-\Delta r$ до стенок $r={}^1/_2\delta$ меняется линейно от T_2 до T_σ, причем $T_\sigma\approx T_1$, так как $\lambda_1\gg\lambda_2$, $h_1\ll h_2$. Тогда коэффициент теплообмена между газом и жидкостью равен

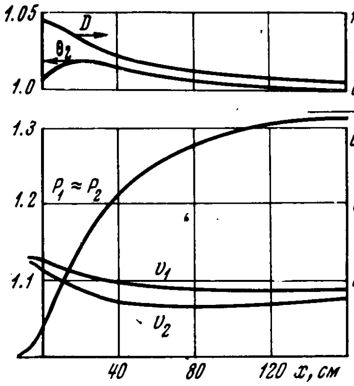
(4.2) $$\beta=\lambda_2/\Delta r,\qquad N=\delta/\Delta r=\delta(c_2\rho_2^\circ/\lambda_2 t_*)^{1/2}$$

При монотонном экспоненциальном сжатии пузырька в начале волны и при пульсациях за волной характерное время определяется значениями k_φ (см. (3.2), (3.3), (3.5), (3.6))

(4.3) $$t_*=(v_0k)^{-1}=\delta_0/(a_*K_\varphi),\qquad \varphi=o,e$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где при синусоидальных пульсациях (K_e — комплексный корень) вместо K_φ нужно подставить его мнимую часть. Формулы (4.2), (4.3) определяют Q_0 и Q_e.

Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности с последовательным определением возникающих полей температур, плотностей и смещений при радиальных движениях в жидкости одиночного пузыря подтвердило формулы (4.2), (4.3) [15].

Продольное движение пузырька относительно жидкости, приводящее к циркуляционному движению внутри пузырька, интенсифицирует теплообмен. Этот эффект зависит от числа Пекле $\Pi=\rho_2^\circ c_2\delta(v_1-v_2)\lambda_2^{-1}$, которое в рассматриваемых ниже случаях не превышает 10^2. Оценки, основанные на расчетах [13] массообмена пузырька с жидкостью с учетом и без учета циркуляции внутри пузырька, показывают, что указанная интенсификация не превышает 30% при $\Pi<10^2$. Кроме этого, смещения за один период пульсаций частиц газа внутри пузырька из-за продольного обтекания жидкостью существенно меньше радиуса пузырька. Поэтому относительное движение фаз в рассмотренных случаях не может существенно повлиять на теплообмен. В более сильных волнах из-за увеличения Π и дробления это влияние может быть заметнее.

5. Результаты расчетов и выводы. Рассчитывались различные варианты структуры ударных волн в растворе 1 : 1 глицерина с водой, содержащем пузырьки воздуха, применительно к результатам соответствующих экспериментов [3, 4]. Использовались следующие значения термодинамических параметров фаз:

$$\rho_{10}^\circ=1126\ \textit{кг/м}^3,\ \nu_1=0.75\cdot10^{-5}\ \textit{м}^2\textit{/сек},\ a_1=1500\ \textit{м/сек},\ T_0=300^\circ\ \mathrm{K} \tag{5.1}$$

$$c_2=0.716\cdot10^3\ \textit{м}^2\textit{/сек}^2\cdot\textit{град},\ \gamma=1.4,\ \lambda_2=2.47\cdot10^{-2}\ \textit{кг}\cdot\textit{м/сек}^3\cdot\textit{град}$$

На фиг. 3 и 4 в качестве примера приведены рассчитанные структуры волн со следующими значениями параметров, определяющих исходное состояние смеси, интенсивность волны P_e, ее скорость v_0 относительно среды перед фронтом соответственно

$$\delta_0=3.1\ \textit{мм},\ \alpha_{20}=0.0423,\ p_0=0.358\ \textit{бар} \tag{5.2}$$
$$a_*=5.64\ \textit{м/сек},\ a_e=28.0\ \textit{м/сек}$$
$$P_e=3.32,\ v_0=50.9\ \textit{м/сек},\ U_0=9.03$$

$$\delta_0=2.8\ \textit{мм},\ \alpha_{20}=0.0246,\ p_0=0.902\ \textit{бар} \tag{5.3}$$
$$a_*=8.95\ \textit{м/сек},\ a_e=57.9\ \textit{м/сек}$$
$$P_e=1.32,\ v_0=66.2\ \textit{м/сек},\ U_0=7.4$$

Фиг. 3 и 4 соответствуют случаю, когда трение между фазами определяется коэффициентом $\chi_f(R_{12})$ согласно (1.6, а теплообмен на всех участках волны определяется коэффициентом $N=30$, по порядку совпадающим со значением по формуле (4.4) для пульсирующего пузырька.

Фиг. 3 дает пример ударной волны с пульсационной, а фиг. 4 — с монотонной структурой. Уменьшение интенсивности волны P_e, размера пузырьков δ_0, объемного содержания газа α_{20} при фиксированной скорости волны v_0, увеличение вязкости ν_1, уменьшение параметра теплообмена N или Q_0 на начальном участке волны усиливают тенденцию к монотонной структуре.

Результаты настоящих расчетов сравнивались с опытными данными [3, 4], которые получены на вертикальной ударной трубе. Так как в экспериментах определяется кривая $p_1(t)$, которая в случае стационарных волн может быть пересчитана в $p_1(x)=$ $=p_1(t)$, $x=v_0t$, то имеет смысл подробнее рассматривать расчетные кривые $P_1(x)$. Характер этих кривых показан на фиг. 1, *б* (линия *оае*), откуда видно, что для сравнения различных вариантов удобней характеризовать осциллирующую зависимость $P_1(x)$ тремя функциями: $P_m(x)$ — осредненное давление в жидкости, $\Delta P_1(x)$ — амплитуда пульсаций, $l(x)$ — период или длина пульсационной волны. При этом затухание осцилляций носит экспоненциальный характер $\Delta P_1 \sim \exp(-x/d)$, где d — характерная длина затухания пульсаций. В случае монотонной структуры ($\Delta P_1=0$) l и d не имеют смысла и $P_1(x)=P_m(x)$. Из (3.5) и (3.4) следуют выражения для предельных значений l и d за волной (при $x\to\infty$)

$$l=\frac{\pi U_e\delta_e}{\sqrt{3}(\gamma P_e-1)^{1/2}},\quad d=U_e\delta_e\left[\frac{(\gamma-1)Q_e}{2(\gamma P_e-1)}+\frac{\eta_e}{2}\right]^{-1},\quad Q_e\ll 1$$

$$(5.4)\qquad l=\frac{\pi U_e\delta_e}{\sqrt{3}(P_e-1)^{1/2}},\quad d=U_e\delta_e\left[\frac{6(\gamma-1)P_e}{Q_e}+\frac{\eta_e}{2}\right]^{-1},\quad Q_e\gg 1$$

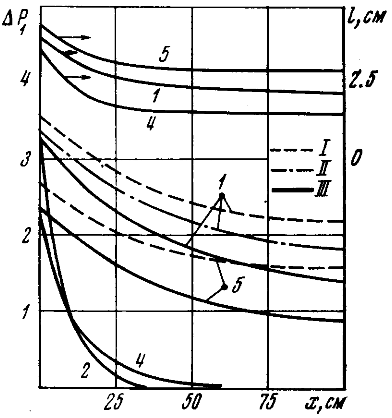
Значения входящих сюда параметров определяются формулами (2.3), (2.6), (3.4), причем $U_e\approx U_0$, $\delta_e\sim\delta_0$.

На фиг. 5 и 6 для волн с параметрами (5.2) и (5.3) соответственно представлены графики изменения величин $l(x)$ и $\Delta P_1(x)$ при различных значениях χ_f и N. Пунктирные линии здесь соответствуют $\chi_f=\infty$, штрихпунктирные — $\chi_f=6\pi$ (формула В. Г. Левича), сплошные линии — $\chi_f=\chi_f(R_{12})$ согласно замечанию после (1.6). Цифры на кривых соответствуют $N=\infty$ (*1*), $N=3000$ (*2*), $N=300$ (*3*), $N=30$ (4), $N=0$ или $N\to 0$ (кривые *5*). Пунктирные и штрихпунктирные кривые *2*, *3*, *4* практически совпадают со сплошными. Заметим, что $\chi_f=\infty$ относится к режиму $v_1=v_2$ и описывается односкоростной моделью, а случай $N=\infty$ — к изотермическому режиму $T_2=T_1=T_0$ и описывается однотемпературной моделью.

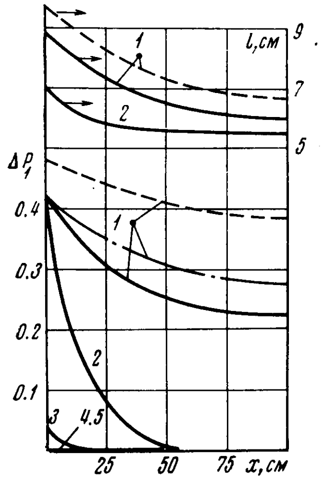
Экспериментальные значения [3] длин пульсационных волн l с параметрами (5.2) и (5.3) равны 2.6 и 6.4 *см* соответственно, что неплохо согласуется с результатами расчетов (фиг. 5 и 6).

Результаты расчетов показали существенное влияние межфазного теплообмена и соответствующего параметра N (или Q) на структуру ударной волны. Это видно из сравнения между собой кривых *1*—*5* на фиг. 5 и 6. Для слабых ($P_e\leqslant\gamma$) волн (см. фиг. 4 и кривые *4*, *5* на фиг. 6) при достаточно больших значениях $N>10^3$ (кривые *1*, *2* на фиг 6) получается осциллирующая структура, а при меньших значениях $N<10^2$ реализуется беспульсационная ударная волна (с монотонной структурой), когда давления, скорости и температуры фаз почти совпадают между собой. Это объясняется тем, что при указанных малых $P_e\leqslant\gamma$ (или $U_0\leqslant A_e\sqrt{\gamma}$) и N (или Q_0) получаются малые значения k_0, дающие медленное изменение параметров на начальном участке волны (около состояния o, $x=-\infty$), и давления фаз p_1 и p_2 успевают между собой выравниваться. Достаточно при расчетах увеличить N до 10^3 и более только на начальном участке волны, где δ успевает уменьшиться всего на 3—5%, как расчетная структура получается пульсационной.

Решение задачи теплопроводности пульсирующего пузырька в жидкости (с учетом замечания о влиянии циркуляционного движения внутри пузырька) показало, что именно значения $N\sim10^1-10^2$ $(Q\sim10^{-1}-1)$ характерны при $p\sim1$ *бар* для пузырька с $\delta\sim1$ *мм*, как в процессе его постепенного сжатия на начальном участке (*oa* на фиг. 1, *б*), так и при затухающих пульсациях (теплообмен на этом участке качественно описывается формулой (4.2). При этом поведение газа в пузырьке достаточно близко к адиабатическому. Таким образом, достаточно слабая ударная волна ($P_e \leqslant \gamma$) с параметрами (5.3) в стационарном режиме не должна иметь пульсаций. В нестационарном же режиме для волны такой интенсивности



Фиг. 5



Фиг. 6

могут реализовываться пульсации пузырей, постепенно затухающие при выходе волны на стационарный режим.

В опытах [3] для таких волн, и в частности для волны с параметрами (5.3), получался пульсационный режим, что, по-видимому, говорит об их нестационарности из-за недостаточной длины экспериментального участка. Действительно в этих опытах датчики давления были установлены на расстоянии 1÷1.5 *м* от поверхности жидкости, на которой возникала ударная волна. В то же время толщины осциллирующих зон релаксации рассматриваемых ударных волн также примерно равны 1—1.5 *м*. Поэтому на этих расстояниях волны не подчиняются стационарному анализу, так как они не успевают выходить на стационарный режим, когда волна движется как целое со скоростью v_0 по покоящейся среде. Это же замечание относится и к опытам [4], когда размер пузырьков был равен $\delta_0 \sim 2$ *мм*.

Следует отметить немонотонную зависимость структуры, в частности таких ее параметров, как длина волны l и характерная длина затухания пульсаций d, от параметра N, определяющего теплообмен вне начального участка волны (вне *oa*; см. фиг. 1, *б*). Это видно из фиг. 5 и 6 и, кроме того, следует из немонотонной зависимости декремента затухания пульсаций в линейном решении (см. фиг. 3). В двух предельных случаях адиабатического ($N=0$) и изотермического ($N=\infty$) поведения газа в пузырьке, а также для любого политропического поведения газа с фиксированным показателем политропы диссипация кинетической энергии происходит только из-за вязкости жидкости. При конечных же N диссипация происходит и за счет необратимого межфазного теплообмена, когда количество тепла, отданное пузырьками в жидкость в стадии сжатия, превышает количество тепла, полученное пузырьком от жидкости в стадии расширения. При некотором N эта диссипация имеет максимум. В результате структура ударной волны и ее характеристики (такие, как l и d) не лежат между соответствующими значениями для адиабатического и изотермического режимов.

Относительное продольное движение (скольжение) фаз или двухскоростные эффекты имеют значение только в тех случаях, когда не учитывается тепловая диссипация, т. е. предполагается политропичность газа, например изотермичность или адиабатичность (ср. пунктирную ($\chi_f=\infty$), штрихпунктирную ($\chi_f=6\pi$) и сплошную ($\chi_f=\chi_f(R_{12})$) кривые на фиг. 5 и 6, рассчитанные для случая $T_2=\text{const}$. При учете реальной тепловой неравновесности ($10<N<10^3$) роль двухскоростных эффектов становится незаметной на фоне гораздо более сильной тепловой диссипации. В волне с осциллирующей структурой это относительное движение в основном определяется инерционными эффектами, так как $f_m\gg f_f$. Действие силы трения f_f, приводящее к выравниванию скоростей фаз и некоторой дополнительной диссипации, малозаметной на фоне тепловой диссипации, сказывается постепенно (после многих пульсаций). Поэтому вариации в соотношениях для f_f практически не влияют на поведение волны.

Сжимаемость жидкости при пульсациях пузырей приводит к дополнительной диссипации энергии из-за акустического излучения и соответственно к ускорению затухания осцилляций. Расчеты с учетом этого эффекта в уравнении Рэлея (1.4) в рамках акустического приближения показали заметное влияние указанного эффекта в более сильной волне (5.2). В волне (5.3) этот процесс не заметен.

Следует учитывать, что при увеличении интенсивности волн P_e длина пульсационных волн l уменьшается (см., например, (5.5)) и может стать по порядку равной или меньшей расстояний между пузырьками. Это может привести к нарушению допущения 1 п. 1, т. е. для анализа более сильных волн может потребоваться совершенствование модели.

Авторы благодарят Л. И. Седова и Н. С. Хабеева за полезное обсуждение.

Поступила 24 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
2. *Когарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
3. *Noordzij L.* Shock waves in bubble-liquid mixtures. Physical communications. Twente Univ. Technology, 1971, vol. 3, No. 1.
4. *Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2.
5. *Crespo A.* Sound and shock waves in liquids containing bubbles. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 11.
6. *Wijngaarden L. van.* On the structure of shock waves in liquid-bubble mixtures. Appl. Sci. Res., 1970, vol. 22, No. 5, pp. 366–381.
7. *Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. С.* Длинноволновые возмущения в газожидкостной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
8. *Wijngaarden L. van.* One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 4, Palo Alto, Calif., 1972.
9. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
10. *Иорданский С. С.* Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1960, № 3.
11. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение малой сферы в неоднородном потоке несжимаемой жидкости. ПМТФ, 1973, № 5.
12. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
13. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
14. *Нигматулин Р. И.* К вопросу о волнах уплотнения в двухфазных средах. Вестн. МГУ, Матем. и механ., 1969, № 4.
15. *Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.* Теплообмен газового пузырька с жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.