

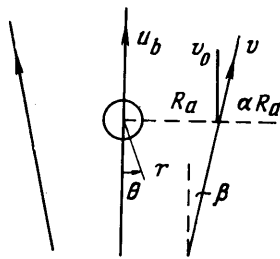
МАССООБМЕН МЕЖДУ ПУЗЫРЬЯМИ И НЕПРЕРЫВНОЙ ФАЗОЙ
В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, Ю. А. СЕРГЕЕВ

(Москва)

Исследуется массообмен в неоднородном псевдоожигенном слое, сечение которого меняется по высоте. Построено поле течения жидкой фазы вокруг пузыря, получены условия существования области замкнутой циркуляции жидкой фазы и определены границы этой области. Дано решение задачи о конвективной диффузии вещества к области замкнутой циркуляции и определен коэффициент массообмена между пузырем и непрерывной фазой в зависимости от параметров течения. Тем самым результаты работы [1] обобщены на псевдоожигенные слои переменного сечения. Показано, что массообмен в этом случае улучшается.

1. Поле течения вокруг пузыря. Рассмотрим сферический пузырь, поднимающийся с постоянной скоростью вдоль оси симметрии конического аппарата с псевдоожигенным слоем. Радиус пузыря a_b будем считать достаточно малым по сравнению с текущим радиусом поперечного сечения аппарата R_a (и с расстоянием r_0 от центра пузыря до вершины конуса), так что можно пренебречь влиянием стенок.



Фиг. 1

Исходя из модели, предложенной в работе [2], будем считать пористость слоя постоянной, движение твердой фазы относительно пузыря потенциальным, а движение жидкой фазы вне пузыря подчиняющимся закону Дарси. На поверхности пузыря давление постоянное. Вдали от пузыря движение жидкой фазы при сделанных предположениях будет представлять собой суперпозицию

поступательного потока и однородного сдвига.

К последнему утверждению можно прийти следующим образом. Введем сферическую систему координат, связанную с центром пузыря (фиг. 1). На больших расстояниях от пузыря ($r \gg a_b$) движение жидкой фазы описывается суперпозицией поля источника в точке $r=r_0, \theta=0$ и поступательного потока с скоростью u_b (u_b — скорость пузыря); потенциал этого течения

$$(1.1) \quad \varphi_{\infty} = u_b r \cos \theta - v_0 r_0^2 / r_{0M}$$

$$v_0 = \frac{Q}{2\pi r_0^2 (1 - \cos \beta) \epsilon}, \quad r_{0M} = (r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \theta)^{1/2}$$

Здесь Q — расход жидкости на псевдоожигение, 2β — угол раствора конуса, ϵ — пористость слоя. Разлагая величину $1/r_{0M}$ в ряд по степеням отношения r/r_0 и ограничиваясь членами второго порядка, получим, опуская несущественную постоянную

$$(1.2) \quad \varphi_{\infty} = (u_b - v_0) r \cos \theta - \alpha r^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}, \quad \alpha = \frac{v_0}{r_0}$$

Таким образом, задача определения поля течения жидкой фазы вне пузыря сводится к следующей (p — давление, v , w — скорости жидкой и твердой фазы):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} v &= w - k \nabla p, \quad \nabla v = 0, \quad k = \text{const}, \quad r \geq a_b \\ w_r &= u_b \left(1 - \frac{a_b^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad w_\theta = -u_b \left(1 - \frac{a_b^3}{r^3} \right) \sin \theta \\ r &= a_b, \quad p = p_0 = \text{const} \\ r \rightarrow \infty, \quad p &\rightarrow \frac{v_0}{k} r \cos \theta + \frac{\alpha}{k} r^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \end{aligned}$$

Последнее условие получено на основании (1.2) и первых четырех соотношений (1.3).

Взяв дивергенцию от обеих частей первого равенства (1.3) и учитывая, что $\nabla v = \nabla w = 0$, получим для определения давления p уравнение Лапласа, решение которого, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности пузыря и на бесконечности (последние два соотношения в (1.3)), дает p . Затем при помощи первого уравнения (1.3) находим скорость жидкой фазы. Получим

$$(1.4) \quad \begin{aligned} p &= \frac{v_0}{k} \left(r - \frac{a_b^3}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{\alpha}{k} \left(r^2 - \frac{a_b^5}{r^3} \right) \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + p_0 \\ \psi &= (u_b - v_0) \left(1 - \frac{a_c^3}{r^3} \right) \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta - \alpha \left(r^3 + \frac{3a_b^5}{2r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \\ \frac{a_c^3}{a_b^3} &= \frac{u_b + 2v_0}{u_b - v_0}, \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

Наконец, течение внутри пузыря получим как такое потенциальное течение, скорость которого ограничена в центре пузыря, а на его поверхности радиальная составляющая в силу условия неразрывности равна ϵv_r (напомним, что v_r — скорость жидкости в промежутках между частицами). Используя (1.4), для функции тока внутреннего течения имеем

$$(1.5) \quad \Psi = 3\epsilon v_0 \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta - 5\epsilon \alpha \frac{r^3}{2} \sin^2 \theta \cos \theta$$

2. Область замкнутой циркуляции и режимы обтекания. Как известно [2], установившаяся скорость подъема пузыря обычно превышает скорость псевдооживления в данном сечении реактора, т. е. $u_b > v_0$. В этом случае вокруг пузыря, поднимающегося в слое постоянного сечения, существует непроницаемая для жидкости замкнутая поверхность тока, внутри которой происходит интенсивная циркуляция жидкости.

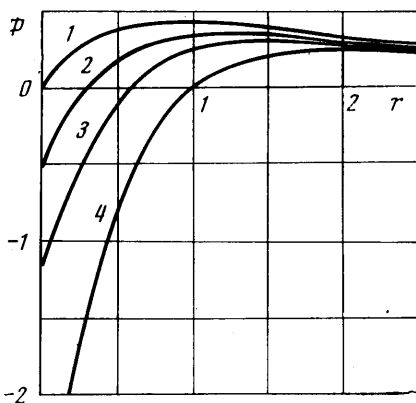
В рассматриваемом поле течения при некоторых значениях параметров также существует область замкнутой циркуляции, граница которой определяется уравнением $\psi(r, \theta) = 0$. Как следует из (1.5), замкнутые линии тока внутри пузыря отсутствуют. Нулевая линия тока для течения оживающего агента вне пузыря (помимо участков $\theta = 0$ и $\theta = \pi$), согласно (1.4), в безразмерных координатах $r' = r/a_b$ описывается уравнением (штрих у r' далее опускаем)

$$(2.1) \quad \lambda \cos \theta = \frac{r(r^3 - A^3)}{r^{5+3/2}} \equiv \Phi(r, \delta), \quad r \geq 1$$

$$\lambda = \frac{2\alpha a_b}{u_b - v_0}, \quad A = \frac{a_c}{a_b}, \quad \delta = \frac{v_0}{u_b}, \quad \frac{a_c^3}{a_b^3} = \frac{1+2\delta}{1-\delta}$$

Здесь a_c — радиус области замкнутой циркуляции в однородном потоке [1].

Зависимость Φ от r при значениях $\delta=0; 0.3; 0.5; 0.7$ (кривые 1—4) показана на фиг. 2. Нулевой линии тока соответствуют участки кривой $\Phi=\Phi(r, \delta)$, для которых $-\lambda \leq \Phi \leq \lambda$. Различные режимы обтекания



Фиг. 2

характеризуются взаимным расположением экстремумов кривой $\Phi = \Phi(r, \delta)$ и прямых $\Phi = \pm\lambda$.

Ниже для определенности рассматривается случай $\alpha \geq 0$. Случай $\alpha < 0$ рассматривается совершенно аналогично. Существует четыре различных взаимных расположения Φ_{\min} , Φ_{\max} и прямых $\Phi = \pm\lambda$, которые и характеризуют различные режимы течения.

Режим I реализуется при

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi_{\min}(\delta) &\leq -\lambda \\ \Phi_{\max}(\delta) &\geq \lambda \end{aligned}$$

В этом случае прямая $\Phi = -\lambda$ пересекает кривую $\Phi = \Phi(r, \delta)$ в точке с абсциссой r_1 , а прямая $\Phi = \lambda$ — в точ-

ках r_2 и r_3 . Нулевая линия тока в этом случае включает в себя границу области замкнутой циркуляции, описываемую участком кривой, соответствующим значениям r в интервале $r_1 \leq r \leq r_2$, ветвь, соответствующую интервалу $(r, +\infty)$, а также ветви, задаваемые уравнениями $\theta=0$, $\theta=\pi$.

Следовательно, при выполнении условия (2.3) существует область, внутри которой происходит интенсивная циркуляция жидкости. Граница этой области задается уравнением (2.1) для значений r из интервала $r_1 \leq r \leq r_2$. При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\lambda \rightarrow 0$. Кривая $\Phi = \Phi(r, \delta)$ пересекает ось r в точке $r=A$, следовательно, в силу непрерывности кривой, при $\alpha \rightarrow 0$ $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow A$, а значит, поверхность области замкнутой циркуляции переходит, как и следовало ожидать, в сферу радиуса A (случай однородного потока оживающего агента).

Линии тока при режиме I изображены на фиг. 3 для значений $v_0 = 20$ см/сек, $u_b = 40$ см/сек, $a_b = 1.9$ см, $\alpha = 1.25$ сек⁻¹. Линии тока внутри пузыря рассчитаны по уравнению $\Psi = \text{const}$, где Ψ задано (1.5), при указанных значениях параметров.

$$(2.3) \quad \Phi_{\min}(\delta) \leq -\lambda, \quad \Phi_{\max}(\delta) < \lambda$$

Здесь прямая $\Phi = -\lambda$ пересекает кривую $\Phi = \Phi(r, \delta)$ в точке с абсциссой r_1 , а прямая $\Phi = \lambda$ кривую не пересекает. Нулевая линия тока состоит из двух ветвей — участка кривой $\Phi = \Phi(r, \delta)$ для значений $r \geq r_1$ и ветви, описываемой уравнениями $\theta=0$, $\theta=\pi$. Область замкнутой циркуляции в этом случае отсутствует. Линии тока изображены на фиг. 4 при $v_0 = 40$ см/сек, $u_b = 61$ см/сек, $a_b = 3.5$ см, $\alpha = 1$ сек⁻¹.

Возможны еще два случая взаимного расположения кривой $\Phi = \Phi(r, \delta)$ и прямых $\Phi = \pm\lambda$, при которых прямая $\Phi = -\lambda$ проходит ниже кривой, т. е.

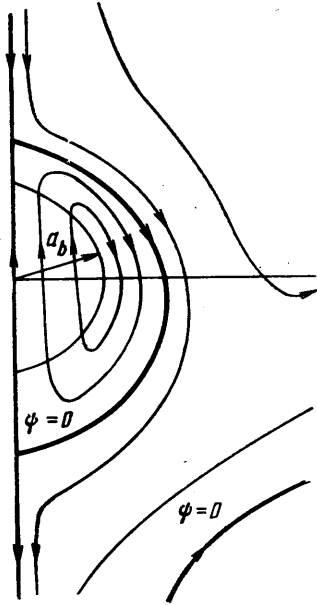
$$(2.4) \quad \Phi_{\min}(\delta) > -\lambda$$

Такие режимы течения в указанных предположениях реализоваться не могут. Действительно, последнее условие может быть записано в виде

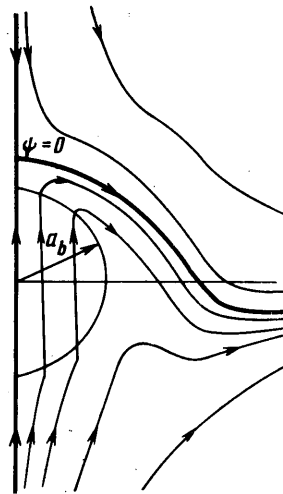
$$-\Phi_{\min} = \frac{6}{5} \frac{\delta}{1-\delta} < \frac{2\alpha a_b \delta}{v_0(1-\delta)}$$

откуда $v_0/\alpha < 5/3$, что противоречит требованию $r_0 = v_0/\alpha \gg a_b$, сформулированному в п.1.

Совершенно аналогично рассматриваются режимы течения при $\alpha < 0$. Для построения картины линий тока в случае $\alpha < 0$ необходимо повернуть на 180° нулевую линию тока при $\alpha > 0$ и тех же значениях v_0 , u_b , a_b , $|\alpha|$ и



Фиг. 3



Фиг. 4

изменить направление стрелок, указывающих направление течения жидкости, на обратное.

Не представляет труда также построить линии тока и произвести исследование режимов течения для $u_b < v_0$, так как u_b и v_0 в уравнение поверхности $\psi=0$ входят в виде $2\alpha a_b / (u_b - v_0)$.

Отметим также, что при увеличении α от значения $\alpha=0$ область замкнутой циркуляции, сферическая при $\alpha=0$, изменяет свою форму согласно уравнению (2.1). Если

$$(2.5) \quad |\Phi_{\min}| > |\Phi_{\max}|$$

то при некотором значении $\alpha = \alpha_*$ режим течения I сменяется режимом II. При невыполнении этого условия увеличение α ведет к тому, что начинает выполняться (2.4), что невозможно по указанным выше причинам. Условие (2.5) выполняется при $\delta > 0.24$, и, следовательно, только в этом случае возможна смена режима I режимом II. Очевидно, что уравнение для определения α_* имеет вид $\Phi_{\max} = \lambda$.

3. Анализ конкретных систем. Применим полученные результаты к конкретным системам и определим значения параметров, при которых реализуются различные режимы течения.

Установившаяся скорость подъема пузыря вычисляется по формуле Дэвиса — Тейлора [2] $u_b = 1.01\sqrt{ga_b}$.

Следует отметить, что в приводимых ниже примерах отношение a_b/R_a не всегда оказывается малым в тех случаях, когда имеющиеся экспериментальные данные относятся к лабораторным аппаратам малого диаметра, но во всяком случае пригодным для качественного сопоставления. Для промышленных аппаратов большого диаметра отношение a_b/R_a обычно мало.

В качестве первого примера рассмотрим систему кварцевые частицы (катализатор крекинга) размером $2a = 0.91$ мм — воздух. Сечение аппарата в месте нахождения пузыря примем равным $R_a = 7.5$ см. В такой системе образуются пузыри размером $a_b \approx 2 \div 4$ см [2]. Скорость псевдооживления $v_0 \approx 40$ см/сек. Рассмотрим подъем пузырей размером $a_b = 2.5$ и 3.5 см.

Для пузыря радиусом $a_b = 2.5$ см $u_b \approx 51$ см/сек, $\Phi_{\max} = 0.21$, $\Phi_{\min} = -4.26$. Значение α_* , соответствующее переходу к режиму II, получим из условия $\Phi_{\max} = \lambda$ равным $\alpha_* \approx 0.47$, откуда, используя (1.1) и (1.2), получим $\beta_* \approx 1^\circ$.

Для пузыря размером $a_b = 3.5$ см $u_b = 61$ см/сек, аналогично получаем $\alpha_* = 0.7$, $\beta_* = 7^\circ$. Таким образом, для данной системы уже при небольших углах раствора конуса пузырь становится проточным (исчезает область замкнутой циркуляции) и условия массообмена улучшаются.

Аналогичные выводы можно сделать и для часто применяемой системы катализатор крекинга углеводородов — воздух, обогащенный кислородом, для которой $v_0 = 30$ см/сек [2]. В этой системе при R_a того же порядка, что и в первом примере, наиболее часто появляются пузыри размером $a_b = 2.5 \div 3.5$ см. Для пузырей размером $a_b = 2.5$ см получаем $\alpha_* = 1.1$, $\beta_* = 16^\circ$, для $a_b = 3.5$ см $\alpha_* = 2.5$, $\beta_* = 18^\circ$ ($R_a = 7.5$ см).

Приведенные примеры относились к системам крупных частиц, скорость псевдооживления которых v_0 велика. Для таких систем переход к режиму II, улучшающий массообмен, может оказаться существенным.

Рассмотрим ряд часто применяемых на практике систем мелких частиц, для которых v_0 оказывается малой.

1) Магнетит — воздух [3]. Здесь $2a \approx 70 \mu$, плотность материала частиц $d_2 = 4.86$ г/см³, $v_0 = 0.58$ см/сек. Экспериментально измеренные размеры пузырей при $R_a = 7.5$ см $a_b = 0.5 \div 1$ см ($\delta = 0.018 \div 0.026$).

2) Активная окись алюминия — воздух, обогащенный кислородом [4]; $2a \approx 79 \mu$, $v_0 = 0.92$ см/сек. При $R_a = 12.5$ см эксперименты показывают, что $a_b = 2.5 \div 4.5$ см ($\delta = 0.014 \div 0.018$).

3) Активная окись алюминия — 80% кислорода, 10% аммиака, воздух [5]; $2a \approx 105 \mu$. При $R_a \approx 5.7$ см наблюдались пузыри размером $a_b = 2.5 \div 4$ см. Здесь $v_0 = 1.4$ см/сек.

4) Частицы $2a \approx 125 \mu$, $d_2 = 2$ г/см³ — воздух в больших аппаратах $R_a \approx 75$ см [6]. Здесь $v_0 = 1.5$ см/сек, $a_b = 30 \div 40$ см ($\delta = 0.0067 \div 0.0088$).

Таким образом, во всех случаях $\delta < 0.24$ и переход к режиму II невозможен. Этот вывод носит общий характер для систем мелких частиц, скорость псевдооживления которых невысока и скорость подъема пузырей значительно превышает скорость жидкости в промежутках между частицами.

4. Массообмен между пузырями и непрерывной фазой. При переходе к режиму II массообмен пузыря с непрерывной фазой существенно улучшается, так как отсутствует область замкнутой циркуляции, создающая диффузионное сопротивление переносу вещества к ней, и пузырь становится проточным. Однако, как будет показано ниже, в условиях режима I интенсивность массообмена также повышается при $\alpha \neq 0$.

Так как в области замкнутой циркуляции происходит интенсивная циркуляция жидкости, будем считать эту область зоной идеального смешения.

ния. Массообмен ее с окружающим псевдооживленным слоем определяется процессом конвективной диффузии.

Ниже предполагается, что числа Пекле $P = (u_b - v_0) a_c / D$ велики, так что имеет место диффузионный пограничный слой вблизи поверхности области замкнутой циркуляции. Здесь D — эффективный коэффициент диффузии в псевдооживленном слое.

Ниже приведены условия, при которых процесс диффузии в пограничном слое можно считать квазистационарным.

Оценим время Δt_α , за которое существенно меняется гидродинамика обтекания в связи с изменением α . Применяя соотношения (1.1), (1.2) и учитывая, что расстояние, пройденное пузырем, равно $u_b t$, получим

$$\alpha = \frac{Q}{2\pi u_b^3 t^3 (1 - \cos \beta) \varepsilon}$$

откуда время Δt_α , через которое произойдет существенное изменение α по сравнению с его значением в момент времени t

$$\Delta t_\alpha \sim \frac{Q^{1/3}}{(2\pi)^{1/3} u_b (1 - \cos \beta)^{1/3} \varepsilon^{1/3} \alpha^{1/3}(t)}$$

Время установления диффузионного пограничного слоя $\Delta t_D \sim \delta_D^2 / D$. Здесь δ_D — толщина стационарного пограничного слоя, оценка которой, пригодная всюду, за исключением малосущественной кормовой области

$$\delta_D \sim \sqrt{\frac{a_c D}{u_b - v_0}}$$

Процесс диффузии можно считать квазистационарным при $\Delta t_\alpha \gg \Delta t_D$, что приводит к искомому условию

$$\alpha^{1/3} \ll \frac{u_b - v_0}{u_b} \frac{Q^{1/3}}{(2\pi)^{1/3} a_c (1 - \cos \beta)^{1/3} \varepsilon^{1/3}}$$

которое удобнее записать в виде (используя (1.1) и (1.2))

$$(4.1) \quad \alpha \ll \frac{v_0 (u_b - v_0)}{a_c u_b}$$

Ниже получено аналитическое решение задачи о диффузионном потоке на область замкнутой циркуляции в предположении, что процесс диффузии квазистационарный.

Уравнение конвективной диффузии в сферических координатах имеет вид

$$(4.2) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = a_b^{-1} D \left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right\}$$

Здесь c — концентрация реагента, v_r и v_θ определяются соотношениями (1.4).

Задавая на поверхности области замкнутой циркуляции $r = r_s(\theta)$ условия полного поглощения вещества (постоянство концентрации в объеме области) и отсчитывая концентрацию от ее значения в области замкнутой циркуляции, запишем граничные условия в виде

$$(4.3) \quad r \rightarrow \infty, \quad c = c_1; \quad r = r_s(\theta), \quad c = 0$$

Запишем функцию тока для течения оживляющего агента вне пузыря в безразмерных переменных в виде

$$(4.4) \quad \psi = a_b^2 (u_b - v_0) \left(r^5 + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\Phi(r, \delta) - \frac{\eta}{A} \cos \theta \right), \quad \eta = A \lambda$$

Поверхность области замкнутой циркуляции $r=r_s(\theta)$ определяется уравнением $\psi=0$, т. е.

$$(4.5) \quad \eta \cos \theta = A \Phi(r_s, \delta)$$

или

$$r_s(r_s^3 - A^3) = \frac{\eta}{A} \left(r_s^5 + \frac{3}{2} \right) \cos \theta$$

Перейдем в уравнении (4.2) к переменным Мизеса $\psi\theta$ и учтем, что при малых расстояниях y от поверхности по нормали к ней $\psi \sim y$. Предполагая толщину пограничного слоя малой и оценивая обычным образом [7] порядки членов в уравнении конвективной диффузии в переменных Мизеса по толщине пограничного слоя, приходим к уравнению

$$(4.6) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial \theta} \right)_\psi = a_b^3 D r_s^2(\theta) \sin^2 \theta v_\tau(\theta) \sqrt{r_s^2(\theta) + r_s'^2(\theta)} \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}$$

Здесь $v_\tau(\theta)$ — компонента скорости, касательная к поверхности области замкнутой циркуляции, при $r=r_s(\theta)$

$$(4.7) \quad v_\tau(\theta) = (\mathbf{v}(r_s(\theta), \theta) \cdot \boldsymbol{\tau})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{r_s'}{\sqrt{r_s^2 + r_s'^2}}, \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + r_s'^2}} \right)$$

($\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к поверхности $r=r_s(\theta)$, направленный противоположно направлению отсчета θ).

Вводя переменную t

$$(4.8) \quad t = \int_{\pi}^{\theta} a_b^3 D r_s^2(\theta) \sin^2 \theta v_\tau(\theta) \sqrt{r_s^2(\theta) + r_s'^2(\theta)} d\theta$$

получим

$$(4.9) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}$$

$$\psi \rightarrow \infty, \quad c = c_1; \quad \psi = 0, \quad c = 0; \quad t = 0, \quad \psi = 0, \quad c = c_1$$

(последнее условие выражает необходимость концентрации в точке набегающего потока). Решение задачи (4.9) имеет вид [7]

$$(4.10) \quad c = \frac{2c_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz, \quad z = \frac{\psi(r, \theta)}{2\sqrt{t(\theta)}}$$

Плотность диффузионного потока на поверхность $r=r_s(\theta)$ определяется по формуле (\mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности)

$$j = - \frac{D}{a_b} (\nabla c \cdot \mathbf{n})|_{r=r_s(\theta)}$$

$$\nabla c = \left(\frac{\partial c}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right), \quad \mathbf{n} = \left(\frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + r_s'^2}}, - \frac{r_s'}{\sqrt{r_s^2 + r_s'^2}} \right)$$

Отсюда

$$(4.11) \quad j(\theta) = - \frac{a_b D c_1 r_s(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\pi}} v_\tau(\theta)$$

Полный поток на поверхность области замкнутой циркуляции

$$I = \frac{1}{a_b^2} \int_0^\pi j(\theta) \cdot 2\pi r_s(\theta) \sin \theta \sqrt{r_s^2(\theta) + r_s'^2(\theta)} d\theta$$

Отсюда (используя (4.8))

$$(4.12) \quad I = -2\sqrt{\pi} D c_1 a_b^3 \int_0^\pi \frac{r_s^2(\theta) \sin^2 \theta v_r(\theta) \sqrt{r_s^2 + r_s'^2}}{\sqrt{t(\theta)}} d\theta = \\ = 2\sqrt{\pi} c_1 \int_0^\pi \frac{dt(\theta)}{\sqrt{t(\theta)}} = 4\sqrt{\pi} c_1 \sqrt{t(0)}$$

и задача сводится к определению $t(0)$. Принимая во внимание (4.7), получим

$$(4.13) \quad t(0) = a_b^3 D \int_\pi^0 r_s^2(\theta) \sin^2 \theta (v_\theta|_{r=r_s}(\theta) r_s(\theta) + v_r|_{r=r_s}(\theta) r_s'(\theta)) d\theta.$$

Этому выражению придадим несколько иную форму, удобную для численного расчета $t(0)$. Перейдем в интеграле (4.13) к переменной r_s согласно соотношению (4.5).

В результате получим

$$(4.14) \quad t(0) = a_b^3 D \frac{A}{\eta} \int_{r_1}^{r_2} r_s^3 \sin \theta(r_s) v_\theta(\theta(r_s)) \frac{\partial \Phi}{\partial r_s} dr_s - \\ - a_b^3 D \int_{r_1}^{r_2} r_s^2 \sin^2 \theta(r_s) v_r(\theta(r_s)) dr_s.$$

Здесь зависимость $\theta(r_s)$ определяется уравнением (4.5), r_1 и r_2 — определенные выше абсциссы точек пересечения прямых $\Phi = -\lambda$ и $\Phi = \lambda$ с кривой $\Phi = \Phi(r, \delta)$, равные длине радиус-вектора в точке $(\theta = \pi, r = r_s)$ и $(\theta = 0, r = r_s)$ соответственно. Величины r_1 и r_2 являются корнями уравнений

$$\Phi(r_1, \delta) = -\eta / A, \quad \Phi(r_2, \delta) = \eta / A$$

Определяя v_r и v_θ при $r = r_s$ из (4.4) и воспользовавшись (2.1), получим после подстановки в (4.14)

$$(4.15) \quad t(0) = D a_b^3 \frac{u_b - v_0}{2} \left[-\frac{\eta}{A} H + \frac{A}{\eta} (I_1 - I_2) + \frac{A^3}{\eta^3} (J_1 - J_2) \right],$$

$$H = \int_{r_1}^{r_2} \left(r^5 + \frac{3}{2} \right) \frac{dr}{r^2}, \quad I_1 = 2 \int_{r_1}^{r_2} (r^3 - A^3) \frac{dr}{r^5 + 3/2}$$

$$I_2 = \int_{r_1}^{r_2} \left(r^8 - 4A^2 r^5 - 6r^3 + \frac{3}{2} A^3 \right)^2 \frac{dr}{(r^5 + 3/2)^3}$$

$$J_1 = \int_{r_1}^{r_2} r^2 (r^3 - A^3)^2 \left(r^8 - 4A^2 r^5 - 6r^3 + \frac{3}{2} A^3 \right)^2 \frac{dr}{(r^5 + 3/2)^5}$$

$$J_2 = \int_{r_1}^{r_2} r^2 (r^3 - A^3)^4 \frac{dr}{(r^{5+3/2})^3}$$

что решает поставленную задачу. Заметим, что функция $t(0)$ является четной по η . Действительно, в качестве сомножителей перед интегралами в (4.15) появляются только нечетные степени η и $r_1(\eta) = r_2(-\eta)$, $r_2(\eta) = r_1(-\eta)$, так как прямые $\Phi = -\lambda$ и $\Phi = \lambda$ при замене η на $-\eta$ меняются местами ($\eta = A\lambda$).

Непосредственное вычисление интегралов в (4.15) громоздко. Однако, как показывают оценки, сделанные по данным п. 3 о конкретных системах, в большинстве случаев параметр η мал. Решение задачи можно получить в виде асимптотического разложения $t(0)$ по параметру η , пользуясь выражением (4.13). Для этого необходимо получить разложения $r_s(\theta)$, $v_\theta|_{r=r_s}$ и $v_r|_{r=r_s}$ по η .

Эти разложения имеют вид

$$r_s(\theta) = r_{(0)}(\theta) + \eta r_{(1)}(\theta) + \eta^2 r_{(2)}(\theta) + O(\eta^3)$$

$$r_{(0)} = A, \quad r_{(1)} = \frac{A^{5+3/2}}{3A^4} \cos \theta$$

$$r_{(2)} = \frac{(A^{5+3/2})(A^5 - 1)}{3A^9} \cos^2 \theta$$

$$v_\theta|_{r=r_s} = -\frac{3}{2}(u_b - v_0) \sin \theta - \eta \frac{u_b - v_0}{2} \times$$

$$\times \frac{4A^{5-3/2}}{A^5} \sin \theta \cos \theta - \eta^2 \frac{u_b - v_0}{2} \frac{13}{3} \frac{(A^{5+3/2})^2}{A^{10}} \sin \theta \cos^2 \theta + O(\eta^3)$$

$$v_r|_{r=r_s} = \eta \frac{u_b - v_0}{2} \frac{A^{5+3/2}}{A^5} \sin^2 \theta + O(\eta^2)$$

$$r_s'(\theta) = -\eta \frac{A^{5+3/2}}{3A^4} \sin \theta + O(\eta^2)$$

Окончательно для $t(0)$ получим

$$(4.16) \quad t(0) = 2a_b^3 D (u_b - v_0) A^3 [t_{(0)}(0) + \eta^2 t_{(2)}(0) + O(\eta^4)]$$

$$t_{(0)}(0) = 1, \quad t_{(2)}(0) = \frac{4}{3} \frac{A^{5+3/2}}{A^5}$$

(В разложении участвуют только четные степени η в силу четности по η функции $t(0)$.)

Полученные результаты можно представить в виде отношения Sh/Sh_0 . Здесь Sh — среднее число Шервуда $Sh = I/(4\pi a_b A D c_1)$, а Sh_0 — среднее число Шервуда для пузыря в однородном потоке оживающего агента [1]. В частности, для малых η

$$(4.17) \quad \frac{Sh}{Sh_0} = 1 + \frac{2}{3} \eta^2 \frac{A^{5+3/2}}{A^5} + O(\eta^4)$$

$$Sh_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_b^{1/2} u_b^{1/2}}{D^{1/2}} (1-\delta)^{1/2} (1+2\delta)^{1/2}$$

Заметим, что при режиме I значения η удовлетворяют неравенству, следующему из (2.2)

$$\eta \leq \left(\frac{1+2\delta}{1-\delta} \right)^{1/3} \Phi_{\max}(\delta)$$

Для $\Phi_{\max}(\delta)$ справедлива приближенная формула $\Phi_{\max}(\delta) \approx 0.43 - 0.28\delta$. Для значений η , удовлетворяющих этому неравенству, в случае $\delta < 0.85$ результаты численного расчета при помощи (4.15) дают поправку к члену $O(\eta^2)$ разложения (4.17), не превышающую 25%.

Эта поправка быстро уменьшается при уменьшении η . Случай больших δ практически мало интересен, хотя и в этом случае при $\eta \leq 0.5$ поправка будет такого же порядка. Например, для $\delta = 0.5$, $\eta = 0.45$ численный расчет при помощи (4.15) дает $Sh/Sh_0 = 1.16$. Полученные результаты представлены на фиг. 5, где крестиком отмечен результат численного расчета (кривым 1—4 соответствуют значения $\delta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$).

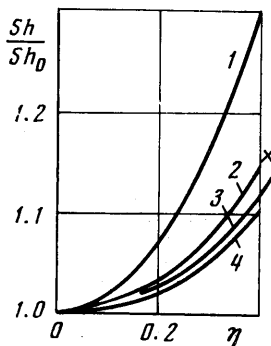
Заметим, что разложение (4.16), (4.17) можно получить непосредственно из формулы (4.15). Для этого необходимо разложить в ряд по параметру η пределы интегрирования r_1 и r_2 в (4.15) и сделать замену переменной r , приводящую область интегрирования к интервалу $(0,1)$, разлагая затем подынтегральное выражение по параметру η .

Полученные результаты показывают, что при $\alpha \leq \alpha_*$, когда существует область замкнутой циркуляции, массообмен не зависит от знака α и увеличивается при увеличении $|\alpha|$. Переход к режиму течения, в котором область замкнутой циркуляции отсутствует ($\alpha > \alpha_*$) и массообмен с пузырем существенно улучшается из-за отсутствия диффузионного сопротивления, создаваемого этой областью, происходит при одних и тех же значениях $|\alpha|$, u_b , v_0 , a_b как в случае положительных, так и отрицательных значений α . Следовательно, массообмен пузыря с обтекающим его потоком оживающего агента в случае $\alpha \neq 0$ будет выше, чем массообмен пузыря в однородном потоке, и увеличивается при увеличении $|\alpha|$. В частности, улучшение условий перемешивания реагента может быть достигнуто, если аппарат с псевдооживленным слоем катализатора состоит из чередующихся расширяющихся и суживающихся участков.

Поступила 10 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О массообмене между пузырями и непрерывной фазой в псевдооживленном слое. Изв. АН СССР, МЖТ, 1973, № 4.
2. Davidson I. F., Harrison D. Fluidised particles. Cambridge, CUP, 1963.
3. Yasui G., Johanson L. N. Characteristics of gas pockets in fluidized beds. A. I. Ch. E. Journal, 1958, vol. 4, No. 4.
4. Pansing W. F. Regeneration of fluidized cracking catalysts. A. I. Ch. E. Journal, 1956, vol. 2, No. 1.
5. Massimilla L., Johnstone H. F. Reaction kinetics in fluidized beds. Chem. Engng Sci., 1961, vol. 16, No. 1, 2.
6. May W. G. Fluidized-bed reactor studies. Chem. Engng Progr., 1959, vol. 55, No. 12.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.



Фиг. 5