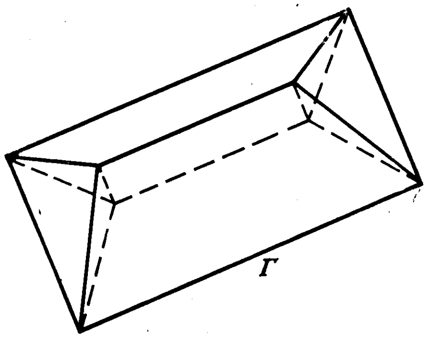
Эксплуатируемая долгое время залежь имеет контур, на котором поддерживается постоянное давление. Все скважины внутри контура, являющиеся эксплуатационными, в некоторый момент выключаются. Теоретически движение жидкости не должно прекратиться. Однако через большой промежуток времени скорости движения жидкости по всей области внутри контура Г станут сколь угодно малыми. Распределение давления в пласте будет при этом стремиться к распределению давления при предельном равновесии. Для его нахождения необходимо решить уравнение (2) во внутренней области, ограниченной контуром Г. Из любой точки, лежащей внутри области, можно, идя по характеристике, достичь контура Г. Заметим, кстати, что в отличие от предыдущего, в этом случае экстремальные значения давления не обязаны достигаться в тех точках области, где расположены скважины. Например, интегральная поверхность $-P(x, y)$ задачи (2), (3), отвечающая прямоугольному контуру Г, будет иметь вид, изображенный на фигуре, независимо от того, где именно внутри контура располагались скважины.




Следует иметь в виду, что задача о предельном равновесии может, вообще говоря, допускать бесчисленное множество решений, однако в рассмотренных примерах форма поверхности $P(x, y)$ определяется однозначно в силу единственности решения соответствующей нестационарной задачи, предельной формой которого (при $t \to \infty$) служит рассматриваемая здесь поверхность $P(x, y)$.

Поступила 29 XII 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Глумов И. Ф., Фоменко И. Е.* Особенности фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1966.
2. *Ахмедов З. М., Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Мирзаджанзаде А. Х.* О нелинейных эффектах при фильтрации газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
3. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.

---

УДК 532.712

# ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСМОТИЧЕСКИХ СИЛ

**А. С. ПОПЕЛЬ**

*(Москва)*

Одним из основных механизмов, посредством которых биологические клетки сохраняют постоянство своей структуры, является регуляция обмена веществ между клеткой и окружающей ее средой. Для регуляции служит тонкая полупроницаемая мембрана, окружающая клетку: некоторые вещества она пропускает внутрь беспрепятственно, другие же пропускает слабо или не пропускает вовсе. Максимальной проникающей способностью обладает вода. Если по обе стороны мембраны имеется водный раствор некоторого вещества, не проходящего через мембрану, то под действием осмотического давления вода перетекает в ту область, где концентрация вещества больше, если только этому не препятствует разность гидростатических давлений [1, 2]. Возникающее вязкое течение может приводить к перемещению частицы.

1. Рассмотрим движение сферической частицы, ограниченной жесткой полупроницаемой мембраной, в безграничной вязкой несжимаемой жидкости. В жидкости имеется градиент концентрации некоторого вещества, которое не может проникать через мембрану; концентрация этого вещества внутри частицы предполагается постоянной.

Выпишем уравнения движения жидкости, окружающей частицу, и уравнение диффузии для растворенного вещества

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dc}{dt} = D\Delta c \tag{1.2}$$

Здесь $\rho$ – плотность жидкости, $\mathbf{v}$ – скорость, $p$ – давление, $\eta$ – вязкость, $c$ – весовая концентрация, $D$ – коэффициент диффузии (предполагается, что $c \ll \rho$, поэтому плотность раствора считается равной плотности растворителя).

Уравнения движения жидкости, находящейся внутри частицы, имеют вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\nabla p' + \eta\Delta\mathbf{v}', \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0 \tag{1.3}$$

Будем считать, что толщина мембраны мала по сравнению с радиусом частицы. Если частица движется поступательно со скоростью $\mathbf{U}$, то, пренебрегая толщиной мембраны, поставим следующие условия на поверхности частицы

$$v_n = v_n', \qquad v_\tau = v_\tau' = U_\tau \tag{1.4}$$

где $v_n$, $v_n'$ – нормальные, а $v_\tau$, $v_\tau'$, $U_\tau$ – касательные составляющие соответствующих скоростей на поверхности.

Скорость фильтрации жидкости через мембрану будем находить из соотношения [3]

$$v_n - U_n = K[p' - p - \pi(c') + \pi(c)] \tag{1.5}$$

(это соотношение в применении к фильтрации воды через стенки капилляров известно в биологической литературе как формула Старлинга [4]). В (1.5) $K$ – проницаемость мембраны для воды, $\pi - \pi'$ – разность осмотических давлений, $c'$ – концентрация вещества внутри частицы.

Так как мембрана непроницаема для растворенного вещества, то на ее внешней поверхности

$$(v_n - U_n)c = D\frac{\partial c}{\partial n} \tag{1.6}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по нормали к поверхности.

Вдали от частицы будем полагать

$$\mathbf{v} \to 0, \qquad c \to c_0 - \alpha x \qquad (r \to \infty) \tag{1.7}$$

(в неподвижной декартовой системе координат).

Обозначим

$$\beta = c_0\left(\frac{\partial\pi}{\partial c}\right)_{c=c_0}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha R}{c_0} \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho RK\beta}{\eta} \quad \mathrm{Pe} = \frac{RK\beta}{D}, \quad q = \frac{K\eta}{R}$$

где $R$ – радиус частицы, Re – число Рейнольдса, Pe – число Пекле. Пусть число Рейнольдса мало, так что инерционными членами в уравнениях (1.1), (1.3) можно пренебречь. Перейдем к сферической системе координат ($r$, $\theta$, $\varphi$), начало которой помещено в центр сферы и движется вместе с ним. Полагая, что концентрация слабо меняется на длине, равной радиусу частицы ($\varepsilon \ll 1$), будем искать решение задачи, ограничиваясь членами, линейными по $\varepsilon$; оказывается, что в этом приближении существует стационарное решение.

2. С учетом сделанных предположений решение уравнений (1.1) – (1.3) с граничными условиями (1.4) – (1.7) имеет вид

$$p = p_0 + \varepsilon a \cos\theta / r^2$$

$$v_r = \varepsilon\left(\frac{a}{r} - \frac{2b}{r^3} - u\right)\cos\theta, \qquad v_\theta = \varepsilon\left(u - \frac{a}{2r} - \frac{b}{r^3}\right)\sin\theta$$

$$p' = p_0' + \varepsilon a' r\cos\theta$$

$$v_r' = \varepsilon\left(\frac{a'}{10}r^2 + b'\right)\cos\theta, \qquad v_\theta' = -\varepsilon\left(\frac{a'}{5}r^2 + b'\right)\sin\theta$$

$$c=\varepsilon\left(\frac{d}{r^2}-r\right)\cos\theta$$

$$a=\frac{3}{2}\frac{(2+20q+\mathrm{Pe})u-1}{2+21q+\mathrm{Pe}},\qquad b=\frac{(2+24q+\mathrm{Pe})u+3}{4(2+21q+\mathrm{Pe})}$$

$$a'=\frac{30(1+qu)}{2+21q+\mathrm{Pe}},\qquad b'=-\frac{6(1+qu)}{2+21q+\mathrm{Pe}}$$

$$d=\frac{1}{2}\left[\frac{3\mathrm{Pe}(1+qu)}{2+21q+\mathrm{Pe}}-1\right],\qquad U=\varepsilon u$$

Учитывая, что сила, действующая на частицу со стороны жидкости, равна нулю, получаем

$$U=\varepsilon K\beta[2+20q+\mathrm{Pe}]^{-1} \tag{2.1}$$

Таким образом, частица движется под действием сил осмотического давления в сторону уменьшения концентрации растворенного вещества.

Заметим, что аналогичные вычисления могут быть проведены в случае, когда течение жидкости внутри частицы следует закону Дарси; движение частицы также происходит от источника вещества.

3. Оценим реальные скорости движения частиц, пользуясь полученной формулой (2.1).

Осмотическое давление разбавленных растворов низкомолекулярных веществ подчиняется уравнению Вант – Гоффа [5]

$$\pi=(c/M)R^{*}T \tag{3.1}$$

Здесь $M$ – молекулярный вес, $R^{*}$ – газовая постоянная, $T$ – абсолютная температура. Для высокомолекулярных веществ зависимость осмотического давления от концентрации, как правило, нелинейная, однако порядок величины давления можно оценить по формуле (3.1).

Дальнейшие оценки проведем для эритроцита, взвешенного в плазме крови при нормальных условиях, пренебрегая несферичностью эритроцита [6] $R\approx 3\cdot 10^{-4}$ *см*, $K\approx 1.5\cdot 10^{-11}$ *см*$^2$·*сек*/*г*, $c/M\approx 3\cdot 10^{-4}$ *осмоль*/*см*$^3$, $\rho\approx 1$ *г*/*см*$^3$, $\eta\approx 2\cdot 10^{-2}$ *г*/*см*·*сек*.

Так как коэффициент диффузии имеет порядок $D\sim 10^{-6}$ *см*$^2$/*сек* для высокомолекулярных веществ и $D\sim 10^{-5}$ *см*$^2$/*сек* для низкомолекулярных, то нетрудно оценить $\mathrm{Re}\sim 10^{-6}$, $\mathrm{Pe}\sim 10^{-2}\div 10^{-3}$, $q\sim 10^{-9}$. Следовательно, $U\approx 30\varepsilon$ *мк*/*мин*.

Если формально, пользуясь методами термодинамики необратимых процессов, выписать линейные соотношения между потоками частиц и градиентами концентраций для трехкомпонентной системы: растворитель, растворенное осмотически активное вещество, взвешенные частицы, ограниченные полупроницаемой мембраной, то в выражении для диффузионного потока взвешенных частиц появится член, пропорциональный градиенту концентрации растворенного вещества. Соответствующий коэффициент диффузии для малых концентраций взвешенных частиц можно вычислить с помощью формулы (2.1).

Поступила 24 VII 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Поликар А.* Молекулярная цитология мембранных систем животной клетки. М., «Мир», 1972.
2. *Леви А., Сикевиц Ф.* Структура и функции клетки. М., «Мир», 1971.
3. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов. М., «Мир», 1967.
4. *Zwaifach B. W., Intaglietta M.* Mechanics of fluid movement across single capillaries in the rabbit. Microvasc. Res., 1968, vol. 1, No. 1.
5. *Воюцкий С. С.* Курс коллоидной химии. М., «Химия», 1964.
6. *Rich G. T., Sha'Afi R. I., Romualdez A., Solomon A. K.* Effect of osmolarity on the hydraulic permeability coefficient of red cells. J. Gen. Physiol., 1968, vol. 52, No. 6.