5 Примером одной функции φ, отвечающей серии выравнивающихся бугров и впадин вблизи непроницаемой преграды будет

$$\varphi=\pm\frac{M_1}{2\pi}\left[\frac{\cos(2\operatorname{arc\,tg}(\zeta-\zeta_1-\tau)/(\eta-\eta_1))}{(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1-\tau)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos(2\operatorname{arc\,tg}(\zeta-\zeta_1-\tau)/(\eta+\eta_1))}{(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1-\tau)^2}\right]$$

Кривые *1, 2, 3* на фиг. 1 можно рассматривать как начальные границы свободной поверхности этой серии либо как границу растекающегося бугра для $\tau=0$, 1, 3.

Изменение формы первоначально горизонтального уровня грунтовых вод для плоского случая в результате работы скважины описывается уравнением

$$\zeta=\pm\frac{q_0}{2\pi}\ln\frac{\eta^2+1}{\eta^2+(1+\tau)^2}$$

При $\varkappa=\exp 2\mu\eta$ простейшая серия выравнивающихся бугров и впадин описывается [1]

$$\varphi=\frac{K_1[\mu\sqrt{(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0-\varkappa_*\tau)^2}(\zeta-\zeta_0-\varkappa_*\tau\sqrt{\eta_0{}^2+\zeta_0{}^2})]}{\exp\mu\eta\, K_1[\mu\sqrt{\eta_0{}^2+\zeta_0{}^2}]\sqrt{(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0-\varkappa_*\tau)^2}\,\zeta_0}$$

где K_1 – цилиндрическая функция мнимого аргумента второго рода первого порядка.

Кривые *1, 2, 3* на фиг. 2 являются границами начальных свободных поверхностей этой серии либо представляют собой границу растекающегося бугра для $\tau=0$, $^1/_2$, 1.

Поступила 4 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., «Высшая школа», 1972.

УДК 532.546

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Д. ПОЛЯНИН, В. М. САФРАЙ

(Москва)

Указывается способ определения поля давления неньютоновской жидкости, находящейся в состоянии предельного равновесия в пористой среде. Подобного рода вопросы возникают при решении проблем теории и практики разработки нефтяных месторождений, содержащих нефть с начальным градиентом давления.

Пластовые жидкости нефтяных месторождений не всегда следуют закону Дарси при малых скоростях фильтрации. В некоторых случаях жидкость начинает двигаться в пористой среде лишь после того, как градиент давления превысит некоторое критическое значение ϑ, называемое начальным (предельным) градиентом давления [1]. Его величина зависит одновременно от свойств жидкости и пласта; поскольку параметры пласта являются функциями пространственных координат, то и начальный градиент давления будет зависеть от координат даже в случае однородной жидкости.

К настоящему времени подробно изучены лишь задачи о движении пластовых жидкостей с отличным от нуля предельным градиентом давления. Задача об определении поля давления покоящихся жидкостей такого типа лежит в стороне от основного русла исследований (отметим лишь работу [2], в которой затронут вопрос о состоянии предельного равновесия при фильтрации газа с начальным градиентом давления). В этом случае в пласте может иметь место состояние, при котором жидкость неподвижна, а ее давление зависит от пространственных координат (предельное равновесие). Это состояние присуще лишь жидкостям с начальным градиентом, поскольку давление в покоящейся ньютоновской жидкости одинаково во всех точках пласта.

В состоянии предельного равновесия градиент давления в жидкости в каждой точке пласта должен быть равен предельному, так что уравнение предельного равновесия записывается в виде

$$|\operatorname{grad} P| = \vartheta(x, y, z) \tag{1}$$

где $P(x, y, z)$ – давление в жидкости, ϑ – начальный градиент давления, x, y, z – пространственные координаты точек пласта.

В плоском случае уравнение (1) принимает вид

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = \vartheta^2(x, y) \tag{2}$$

К аналогичному уравнению (с постоянной правой частью) приводит, в частности, задача о пластическом кручении стержня [3].

Для решения задачи о распределении давления в жидкости, находящейся в состоянии предельного равновесия, необходимо найти интегральную поверхность уравнения (2), проходящую через заранее заданную кривую Γ

$$x = x_0(s), \qquad y = y_0(s), \qquad P = P(s) \tag{3}$$

(здесь s – параметр кривой).

Графически функция $P(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (2) (при $\vartheta = \mathrm{const}$), представляет собой поверхность постоянного наибольшего уклона, проходящую через Γ. В книге [3] исследована возможность моделирования решения уравнения вида (2) (при постоянной правой части) на основе механической аналогии с задачей об определении вида свободной поверхности сухого песка, насыпанного в соответствующим образом изготовленные формы, и приведены примеры получающихся при этом поверхностей, совпадающих с интегральными поверхностями рассматриваемой задачи (2), (3) при $\vartheta = \mathrm{const}$.

В общем случае решение уравнения (2) при условии (3) можно искать методом Коши, согласно которому интегральную поверхность представляют состоящей из точек, лежащих на однопараметрическом семействе характеристик, проходящих через Γ. Система дифференциальных уравнений, определяющих характеристики уравнения (2), записывается следующим образом [4]:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dP}{2\vartheta^2} = \frac{dp}{(\vartheta^2)_x} = \frac{dq}{(\vartheta^2)_y} = d\lambda, \qquad p = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{4}$$

Здесь λ – параметр, индексы x и y указывают на дифференцирование по соответствующей координате.

Решение уравнения (2) непрерывно и почти всюду дифференцируемо (за исключением точек, где пересекаются характеристики или терпит разрыв правая часть уравнения (2)).

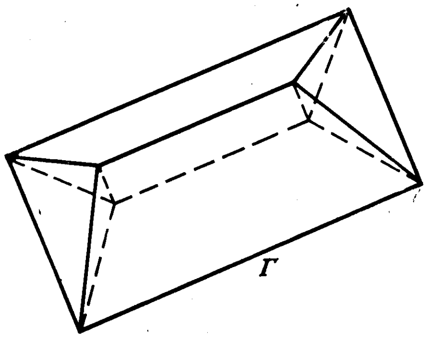
Рассмотрим простейший случай, когда область предельного равновесия разбита несколькими линиями на некоторое число областей, внутри каждой из которых параметры пласта неизменны. Если, кроме того, жидкость однородна, то в каждой из этих областей начальный градиент давления, а с ним и правая часть уравнения (2) постоянны. Из (4) сразу следует, что внутри каждой из указанных областей характеристики прямолинейны, так что интегральная поверхность будет в этом случае состоять из кусков линейчатых поверхностей.

Возможен ряд постановок задач о предельном равновесии.

Пусть, например, в первоначально невозмущенном пласте начинает работать скважина с постоянным давлением на забое. После достаточно долгого времени эксплуатации в окрестности скважины наступит состояние, близкое к предельному равновесию. Для нахождения поля давлений необходимо построить решение уравнения (2) во внешней области кругового контура Γ, на котором поддерживается постоянное давление. Через любую точку области предельного равновесия будет проходить характеристика, начинающаяся на контуре Γ. Если $\vartheta = \mathrm{const}$, то интегральная поверхность будет состоять из образующих прямого кругового конуса (см., например, [2]).

Отметим еще одну задачу, представляющую интерес для теории и практики разработки месторождений нефти с предельным градиентом.

Эксплуатируемая долгое время залежь имеет контур, на котором поддерживается постоянное давление. Все скважины внутри контура, являющиеся эксплуатационными, в некоторый момент выключаются. Теоретически движение жидкости не должно прекратиться. Однако через большой промежуток времени скорости движения жидкости по всей области внутри контура Г станут сколь угодно малыми. Распределение давления в пласте будет при этом стремиться к распределению давления при предельном равновесии. Для его нахождения необходимо решить уравнение (2) во внутренней области, ограниченной контуром Г. Из любой точки, лежащей внутри области, можно, идя по характеристике, достичь контура Г. Заметим, кстати, что в отличие от предыдущего, в этом случае экстремальные значения давления не обязаны достигаться в тех точках области, где расположены скважины. Например, интегральная поверхность $-P(x, y)$ задачи (2), (3), отвечающая прямоугольному контуру Г, будет иметь вид, изображенный на фигуре, независимо от того, где именно внутри контура располагались скважины.



Следует иметь в виду, что задача о предельном равновесии может, вообще говоря, допускать бесчисленное множество решений, однако в рассмотренных примерах форма поверхности $P(x, y)$ определяется однозначно в силу единственности решения соответствующей нестационарной задачи, предельной формой которого (при $t\to\infty$) служит рассматриваемая здесь поверхность $P(x, y)$.

Поступила 29 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Глумов И. Ф., Фоменко И. Е.* Особенности фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1966.
2. *Ахмедов З. М., Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Мирзаджанзаде А. Х.* О нелинейных эффектах при фильтрации газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
3. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.

УДК 532.712

ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСМОТИЧЕСКИХ СИЛ

А. С. ПОПЕЛЬ

(Москва)

Одним из основных механизмов, посредством которых биологические клетки сохраняют постоянство своей структуры, является регуляция обмена веществ между клеткой и окружающей ее средой. Для регуляции служит тонкая полупроницаемая мембрана, окружающая клетку: некоторые вещества она пропускает внутрь беспрепятственно, другие же пропускает слабо или не пропускает вовсе. Максимальной проникающей способностью обладает вода. Если по обе стороны мембраны имеется водный раствор некоторого вещества, не проходящего через мембрану, то под действием осмотического давления вода перетекает в ту область, где концентрация вещества больше, если только этому не препятствует разность гидростатических давлений [1, 2]. Возникающее вязкое течение может приводить к перемещению частицы.

1. Рассмотрим движение сферической частицы, ограниченной жесткой полупроницаемой мембраной, в безграничной вязкой несжимаемой жидкости. В жидкости имеется градиент концентрации некоторого вещества, которое не может проникать через мембрану; концентрация этого вещества внутри частицы предполагается постоянной.