УДК 532.546

К ИССЛЕДОВАНИЮ ФИЛЬТРАЦИИ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

О. В. ГОЛУБЕВА, П. А. ЕРМАКОВ

(Москва)

В статье указывается обратный метод построения фильтрационных течений при наличии свободной поверхности. Приведены конкретные серии изменяющихся свободных поверхностей выравнивающихся бугров или впадин и поверхностей повышения или понижения грунтовых вод в результате работы дренажных и нагнетательных скважин.

1. Неустановившуюся линейную фильтрацию несжимаемой жидкости в неоднородных грунтах можно описать безразмерными уравнениями вида [1]

$$\mathbf{v}(\xi,\eta,\zeta,\tau)=\varkappa\nabla\varphi,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\xi=x/l,\quad \eta=y/l,\quad \zeta=z/l,\quad \tau=k_1\gamma t/\mu\sigma_1 l\\ \mathbf{v}=\mu\mathbf{V}/k_1\gamma,\quad \varkappa=k/k_1,\quad \varphi=-(p/\gamma l+\zeta)\end{gathered} \tag{1.2}$$

где равенства (1.2) определяют связь безразмерных величин $\xi,\ldots,\varphi$ с соответствующими размерными величинами $x,\ldots$ и параметрами l, k_1, σ_1.

Подвижная свободная поверхность жидкости характеризуется постоянным значением p, отсчитывая которое от этой поверхности запишем на ней условие

$$\varphi+\zeta=0 \tag{1.3}$$

откуда уравнение свободной поверхности

$$\zeta=-\varphi(\xi,\eta,\zeta,\tau) \tag{1.4}$$

Дифференцируя равенство (1.3) по τ и полагая, что v^2 пренебрежимо мало, условие на свободной поверхности запишем в виде

$$\partial\varphi/\partial\tau+\varkappa\,\partial\varphi/\partial\zeta\doteq0 \tag{1.5}$$

При малом отклонении свободной поверхности от горизонтальной плоскости равенство (1.5) приближенно выполняется при $\zeta=0$ и уравнение свободной поверхности будет

$$\zeta=-\varphi(\xi,\eta,0,\tau) \tag{1.6}$$

2. Очевидно, что для однородных грунтов ($\varkappa=1$) уравнения движения (1.1) приводятся к уравнению Лапласа и имеет место класс решений, который определяется функцией φ, представимой в виде

$$\varphi=\varphi(\xi,\eta,\zeta-\tau) \tag{2.1}$$

и удовлетворяющей граничному условию (1.5) во всей области течения.

Функцию (2.1) можно использовать для построения серий решений, описывающих растекание бугров и выравнивание впадин. Для этого на нее надо наложить дополнительные условия, которые вытекают из физики явления. Именно, возмущенная свободная поверхность не должна уходить в бесконечность и при выравнивании свободной поверхности φ стремится к нулю, следовательно

$$|\varphi(\xi,\eta,0-\tau)|<\infty \tag{2.2}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\xi,\eta,0-\tau)=0 \tag{2.3}$$

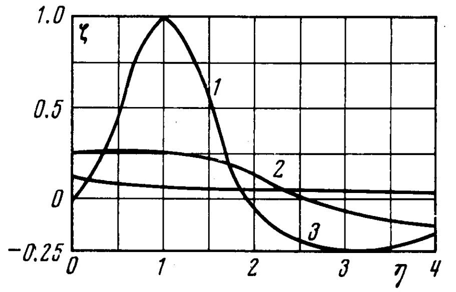
Если за характерную длину l выбрать расстояние точки свободной поверхности с координатами $\xi=\eta=0$ в начальный момент от плоскости $\zeta=0$, тогда

$$\varphi(0,0,0)=1 \tag{2.4}$$

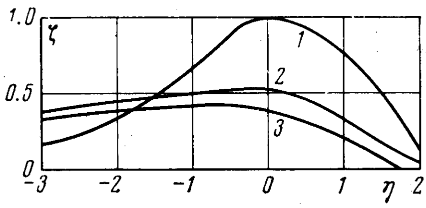
Из (1.6) следует, что если какое-либо φ, удовлетворяющее указанным условиям, описывает растекание бугра, то функция $-\varphi$ будет описывать выравнивание впадин.

Условия (2.1) – (2.4) могут быть удовлетворены подбором гармонической функции φ, отвечающей подвижным особым точкам, расположенным вне области фильтрации, которые удаляются в бесконечность вдоль оси ζ со скоростью, равной единице.

Отсюда следует метод решения обратной задачи, которая заключается в том, что задается характер и расположение особых точек и находится соответствующая



Фиг. 1



Фиг. 2

им граница бугра или впадины. Изменяя тем или иным образом начальные положения особых точек, легко можно построить серии указанных границ, из которых могут быть выбраны модели, представляющие практический интерес.

3. Простейшей моделью дренажной и нагнетательной скважин является сток и источник, которые поместим в точке $\xi=\eta=0$, $\zeta=1$. Работа таких скважин будет соответственно понижать и повышать свободный уровень грунтовых вод.

Пространственным течениям в однородных грунтах в этом случае соответствует

$$\varphi=\mp\frac{q_0}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi^2-\eta^2+(\zeta-1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-(\zeta+1)^2}}-\frac{2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-1-\tau)^2}}\right]+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\xi,\eta,\zeta-\zeta_k-\tau) \tag{3.1}$$

(аналогичная формула имеет место и для плоского случая), где q_0 мощность источника или стока, моделирующих дренажные или нагнетательные скважины и φ_k гармонические функции, отвечающие подвижным особым точкам, которые лежат вне области фильтрации.

Так как граничное условие (1.5) выполняется при $\zeta=0$, найденное решение теряет смысл, когда свободная поверхность касается дренажной скважины ($\xi=\eta=0$, $\zeta=1$).

При $\varphi_k=0$ ($k=1,\ldots,n$) начальный уровень грунтовых вод будет горизонтален.

4. В случае неоднородных грунтов, ограничимся рассмотрением приближенного выполнения условия (1.5). Пусть при $\zeta=0$ в (1.5) переменная $\varkappa$ равна ее среднему значению $\varkappa_*$. Тогда класс решений, отвечающий выравниванию бугров и впадин, определяется функцией и удовлетворяет уравнению

$$\varphi=\varphi(\xi,\eta,\zeta-\varkappa_*\tau) \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div}\varkappa\nabla\varphi=0 \tag{4.2}$$

В плоском случае функцию (4.1) можно построить, используя особые точки P-аналитических функций ($P=\varkappa$).

5 Примером одной функции φ, отвечающей серии выравнивающихся бугров и впадин вблизи непроницаемой преграды будет

$$\varphi=\pm\frac{M_1}{2\pi}\left[\frac{\cos(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\zeta-\zeta_1-\tau)/(\eta-\eta_1))}{(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1-\tau)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\zeta-\zeta_1-\tau)/(\eta+\eta_1))}{(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1-\tau)^2}\right]$$

Кривые *1*, *2*, *3* на фиг. 1 можно рассматривать как начальные границы свободной поверхности этой серии либо как границу растекающегося бугра для $\tau=0$, 1, 3.

Изменение формы первоначально горизонтального уровня грунтовых вод для плоского случая в результате работы скважины описывается уравнением

$$\zeta=\pm\frac{q_0}{2\pi}\ln\frac{\eta^2+1}{\eta^2+(1+\tau)^2}$$

При $\varkappa=\exp 2\mu\eta$ простейшая серия выравнивающихся бугров и впадин описывается [1]

$$\varphi=\frac{K_1[\mu\sqrt{(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0-\varkappa_*\tau)^2}(\zeta-\zeta_0-\varkappa_*\tau\sqrt{\eta_0^2+\zeta_0^2})]}{\exp\mu\eta\, K_1[\mu\sqrt{\eta_0^2+\zeta_0^2}]\sqrt{(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0-\varkappa_*\tau)^2}\,\zeta_0}$$

где K_1 – цилиндрическая функция мнимого аргумента второго рода первого порядка.

Кривые *1*, *2*, *3* на фиг. 2 являются границами начальных свободных поверхностей этой серии либо представляют собой границу растекающегося бугра для $\tau=0$, $^1/_2$, 1.

Поступила 4 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., «Высшая школа», 1972.

УДК 532.546

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Д. ПОЛЯНИН, В. М. САФРАЙ

(Москва)

Указывается способ определения поля давления неньютоновской жидкости, находящейся в состоянии предельного равновесия в пористой среде. Подобного рода вопросы возникают при решении проблем теории и практики разработки нефтяных месторождений, содержащих нефть с начальным градиентом давления.

Пластовые жидкости нефтяных месторождений не всегда следуют закону Дарси при малых скоростях фильтрации. В некоторых случаях жидкость начинает двигаться в пористой среде лишь после того, как градиент давления превысит некоторое критическое значение ϑ, называемое начальным (предельным) градиентом давления [1]. Его величина зависит одновременно от свойств жидкости и пласта; поскольку параметры пласта являются функциями пространственных координат, то и начальный градиент давления будет зависеть от координат даже в случае однородной жидкости.

К настоящему времени подробно изучены лишь задачи о движении пластовых жидкостей с отличным от нуля предельным градиентом давления. Задача об определении поля давления покоящихся жидкостей такого типа лежит в стороне от основного русла исследований (отметим лишь работу [2], в которой затронут вопрос о состоянии предельного равновесия при фильтрации газа с начальным градиентом давления). В этом случае в пласте может иметь место состояние, при котором жидкость неподвижна, а ее давление зависит от пространственных координат (предельное равновесие). Это состояние присуще лишь жидкостям с начальным градиентом, поскольку давление в покоящейся ньютоновской жидкости одинаково во всех точках пласта.