

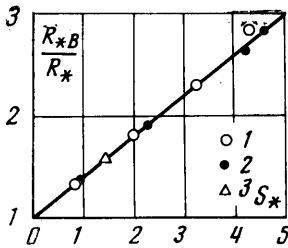
Следует отметить, что в рассматриваемых условиях критическое число Рейнольдса начала перехода в отсутствие магнитного поля  $R_* = 2250$ , т. е. такое же, как в [1, 2] и, по-видимому, соответствует нижнему критическому числу Рейнольдса.

Таким образом, несмотря на существенное отличие входных условий, характер перехода от ламинаризованного режима течения к турбулентному в настоящем исследовании и работах [1, 2] оказался идентичным как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля. При этом данные [2], в которых ламинаризованное течение было нестабилизированным, полностью подтвердились в настоящем исследовании, где течение было стабилизированным на всех режимах.

Приведенная выше зависимость (1) также хорошо описывает экспериментальные данные работы [3] ( $R_* = 3000$  при  $H = 0$  и  $R_{*B} = 4800$  при  $H = 82.5$  (фиг. 2, точка 3)), в которой исследовалось течение ртути в круглой трубе в продольном магнитном поле. Труба имела на входе конический конфузор с полууглом  $5^\circ$ , снабженный специальным турбулизирующим выступом. Указанное входное устройство (находилось в зоне действия однородного магнитного поля) позволило повысить критическое число Рейнольдса до  $R_* = 3000$  [3] по сравнению с  $R_* = 2250$  в [1, 2].

Зависимость (1), по-видимому, имеет универсальный характер с ее помощью можно прогнозировать величину  $R_{*B}$  (если известна величина  $R_*$ ) в функции  $S_*$  для разных условий входа в широкий диапазоне изменения уровня начальных возмущений в потоке.

Полученные результаты показывают, что с помощью продольного магнитного поля можно ламинаризовать турбулентное течение электропроводной жидкости в трубах с различными условиями входа потока в экспериментальный участок при  $R < R_{*B}$ . Кроме того, хорошее совпадение данных настоящего исследования и [2] позволяет сделать вывод о том, что метод исследования течения при помощи такого



Фиг. 2

интегрального фактора, каким является коэффициент сопротивления  $\lambda$ , и метод, основанный на измерении коэффициента перемежаемости с помощью термоанемометра, дают тождественные результаты.

Авторы благодарят Б. П. Борисова за помощь в проведении экспериментов, Е. Ю. Красильникова за обсуждение методики и результатов работы и А. Б. Цинобера за полезную дискуссию.

Поступила 14 I 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников Е. Ю., Луцки В. Г., Николаенко В. С., Паневин И. Г. Экспериментальное исследование течения электропроводной жидкости в круглой трубе в продольном магнитном поле. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 2.
2. Fraim F. W., Heiser W. H. The effect of a strong longitudinal magnetic field on the flow of mercury in circular tube. J. Fluid. Mech., 1968, vol. 33, pt 2.
3. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Маньча С. П. Влияние продольного магнитного поля на устойчивость течения электропроводной жидкости. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, № 2.

УДК 532.522

#### О ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

В. С. ТЕМКИНА

(Харьков)

Рассматривается плоская задача о нахождении формы свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости при установившемся истечении из бесконечного слоя через точечный сток. Учитываются силы тяжести и поверхностного натяжения.

В первом приближении скорость на свободной поверхности находится в явном виде из решения вспомогательной задачи, после чего задача о нахождении формы свободной поверхности жидкости сводится к решению краевой задачи на полуоси для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Изучается качественное поведение решений этого уравнения. Показано, что поверхность жидкости поднимается над сливным отверстием выше уровня на бесконечности. Описывается методика численного решения краевой задачи. Приводятся графики формы свободной поверхности жидкости при различных значениях чисел Бонда и Фруда.

Обсуждаются результаты вычислений. В осесимметричном случае эта задача при малых стоках рассматривалась в [1].

**1. Постановка задачи.** В точке  $(0, 0)$  плоскости течения  $(x, y)$  расположен сток мощности  $\alpha$ , высота слоя жидкости на бесконечности равна  $h$ . Потенциал скорости  $\varphi$  удовлетворяет в области  $\Omega$ , занятой жидкостью, уравнению Лапласа ( $\Delta\varphi=0$ ) и граничным условиям на твердой стенке  $\Sigma$  и на заданной в форме  $y=y(x)$  свободной поверхности  $S$ , которые в безразмерной форме имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_S &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_x = 0 \\ \varphi &\sim \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r \rightarrow 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} \rightarrow \mp \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow \pm\infty \\ (1.1) \quad \frac{y''}{(1+y')^{3/2}} &= B(y-1) + \frac{W}{2} \left( \left( \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^2 - \frac{1}{4} \right), \quad y' = \frac{dy}{dx} \\ (1.2) \quad y'(0) &= 0, \quad y(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к области  $\Omega$ ,  $B=\rho gh^2/\sigma$  — число Бонда ( $B>0$ ),  $W=BF$  — число Вебера,  $F=(2V_\infty)^2/gh=\alpha^2/gh^3$  — число Фруда,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $V_\infty$  — модуль скорости жидкости на бесконечности,  $s$  — длина дуги свободной поверхности,  $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ .

**2. Функция Грина задачи Неймана для бесконечной полосы.** Потенциал скорости  $\varphi$  является функцией Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа с особенностью в точке  $(0, 0)$  для области  $\Omega$  с неизвестной границей. Так как область  $\Omega$  по крайней мере при небольших стоках близка к полосе  $0 \leq y \leq 1$ , в первом приближении можно положить

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} \Big|_S &= \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} \Big|_{y=1}, \quad \varphi_0=2G(0, 0; x, y) \\ G(0, 0; x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{x^2 + (2k+y)^2}{4k^2} \frac{x^2 - (2k-y)^2}{4k^2} \right] \end{aligned}$$

Здесь  $G$  — функция Грина задачи Неймана для бесконечной полосы, построенная в [3] в виде ряда методом отражений.

Воспользовавшись представлением гиперболического синуса в виде бесконечного произведения, для функции Грина можно получить

$$\begin{aligned} G(0, 0; x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{4k^2} (x+iy)^2 \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( 1 + \frac{1}{4k^2} (x-iy)^2 \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \ln 4\pi^{-2} (x^2+y^2)^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (x+iy) \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (x-iy) \right], \quad i^2=-1 \\ 4\pi G(0, 0; x, y) &= -\ln 2\pi^{-2} (\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y) \end{aligned}$$

**3. Качественное исследование решения задачи.** Рассмотрим уравнение (1.1) при произвольной функции  $\partial\varphi/\partial s$ , удовлетворяющей условию  $\partial\varphi/\partial s=0$  при  $x=0$ , которое следует из предположения о гладкости свободной поверхности.

Покажем, что, как и в осесимметричном случае [1], свободная поверхность имеет на оси симметрии максимум. Действительно, предположим, что  $y(x)$  имеет в точке  $x=0$  минимум. Тогда  $y''(0)=B(y(0)-1)-W/8 \geq 0$ . Следовательно,  $y(0) \geq 1+F/8$ . Кроме того,  $y'(x) > 0$  в окрестности точки  $x=0$ . Вследствие условия на бесконечности  $y(x)$  должна иметь по крайней мере один максимум. Пусть  $x_0$  — первая точка максимума функции  $y(x)$ , так что  $y'(x) > 0$  при всех  $x < x_0$ . Тогда в точке  $x_0$  имеем

$$\begin{aligned} y''(x_0) &\geq B(y(x_0)-1) - W/8 \geq B(y(x_0)-y(0)) = By'(\xi)x_0 > 0 \\ (0 < \xi < x_0) \end{aligned}$$

что невозможно.

Попутно получена верхняя граница ( $y(0) \leq 1+F/8$ ).

Далее будем рассматривать частично линеаризованную задачу (в предположении (2.1)). Подставляя в (1.1) выражение (2.1) с учетом (2.2), получим для  $y(x)$  уравнение

$$(3.1) \quad \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = B(y-1) + Wf(x), \quad f(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \pi x}$$

$$y'(0) = 0, \quad y(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty$$

Таким образом, задача о нахождении свободной поверхности жидкости свелась к решению краевой задачи на полуоси для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Отметим, что, воспользовавшись функцией Грина краевой задачи

$$y'' - By = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(+\infty) = 0,$$

решение линеаризованного уравнения, соответствующего (3.1) при малых  $y'(x)$ , можно получить в виде

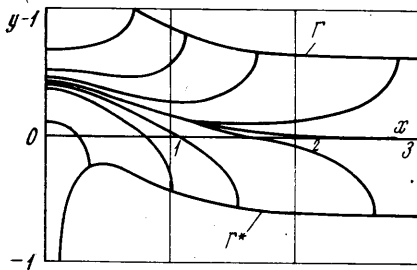
$$y(x) = 1 - F\sqrt{B} \left[ \exp(-\sqrt{B}x) \int_0^x \operatorname{ch}(\sqrt{B}\xi) f(\xi) d\xi - \operatorname{ch}(\sqrt{B}x) \int_x^\infty \exp(-\sqrt{B}\xi) f(\xi) d\xi \right]$$

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение (3.1). Можно показать, что  $y(x) \geq 1$  при всех  $x$ . Действительно, если в какой-то точке  $y(x) < 1$ , то по условию на бесконечности функция  $y(x) - 1$  должна иметь в некоторой точке  $x_0$  отрицательный минимум. Тогда в точке  $x_0$

$$y''(x_0) = B(y(x_0) - 1) + Wf(x_0) < 0$$

что невозможно.

Таким образом, в рассматриваемом здесь приближении свободная поверхность жидкости везде расположена выше уровня на бесконечности. По-видимому, это объясняется тем, что в плоском случае скорость на бесконечности имеет конечное значение, в то время как на оси симметрии она равна нулю. Тогда из энергетических соображений ясно, что линии тока должны подниматься



Фиг. 1

ниматься при приближении к оси  $y$ . Отметим, что в осесимметричном случае [1] скорость на бесконечности равна нулю и свободная поверхность лежит ниже плоскости  $y=1$ .

4. Численное решение краевой задачи (3.1), (1.2). Рассмотрим однопараметрическое семейство решений уравнения (3.1) с начальным условием  $y'(0) = 0$ , зависящее от параметра  $y_0 = y(0)$ . На фиг. 1 показано качественное поведение этого семейства решений при  $B=5$ ,  $F=5$ .

Метод численного решения задачи основан на следующих свойствах семейства интегральных кривых, имеющих место при произвольной гладкой функции  $f(x)$ ,  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , а также в осесимметричном случае.

1. Можно доказать, что существует единственное решение  $Y(x)$  задачи Коши для уравнения (3.1) с условием  $y'(0) = 0$ , продолжимое на всю ось, причем это решение совпадает с решением краевой задачи (3.1). Все другие решения определены только на конечном интервале, причем при  $y_0 > Y(0)$  производная таких решений обращается в некоторой точке  $x + \infty$ , при  $y_0 < Y(0)$  — в  $-\infty$ .

2. Из результатов<sup>1</sup> следует, что все решения описываемого семейства монотонно зависят от  $y_0$ .

3. На фиг. 1 показана кривая  $\Gamma + \Gamma^*$ , представляющая собой геометрическое место точек  $y(x; y_0)$  таких, что  $y'(x; y_0) = \infty$ . Из монотонности решений следует, что все решения уравнения (3.1) с начальным условием  $y'(0) = 0$  находятся в области, ограниченной кривой  $\Gamma + \Gamma^*$ .

4. Из монотонности решения и теоремы о непрерывной зависимости решения от начальной точки следует, что интервал  $[0, X)$ , на котором существует решение урав-

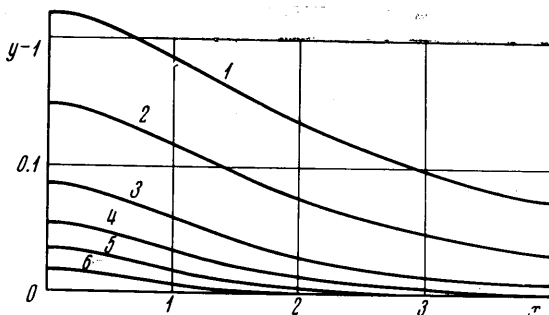
<sup>1</sup> Щербина Г. В. Сингулярная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка на полуоси и оси. Канд. дисс., Воронеж, 1963.

нения (3.1), монотонно увеличивается при приближении  $y_0$  к искомому значению, т. е.  $X \rightarrow \infty$  при  $y_0 \rightarrow Y_0$ , где  $Y_0$  соответствует решению краевой задачи.

Учитывая свойства 1-4, искался корень функции  $[X(y_0)]^{-1} \text{sign } y'(X)$ , причем для нахождения  $X(y_0)$  для каждого  $y_0$  решалась задача Коши для (3.1) с автоматическим выбором шага.

Для нахождения решения при заданных параметрах  $B$  и  $F$  в качестве начального значения  $y_0$  выбиралось близкое значение, соответствующее предыдущему числу Фруда, начиная с  $y_0=1$  для малых  $F$ . Задача решалась численно на ЭВМ М-222. Точка  $y_0$  находилась с точностью  $10^{-7}$ .

5. **Обсуждение результатов.** На фиг. 2 приведены полученные решения, представляющие собой отклонение свободной поверхности от плоскости  $y=1$  при  $W=1$  и



Фиг. 2

$B=0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5$  (кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно). Отметим, что при небольших числах Фруда функция  $y(x)$  практически линейно зависит от  $F$ . При фиксированном числе Вебера решения монотонно зависят от  $B$ . (Для краткости не приводим здесь доказательство этого свойства.) При  $B \rightarrow 0$  ( $g \rightarrow 0$ ) решение неограниченно растет. Можно доказать, что при  $B=0$  не существует решения краевой задачи (3.1). В предельном случае больших чисел Бонда ( $g \rightarrow \infty$ ) свободная поверхность плоская.

Как видно из (3.1), при фиксированном числе Фруда в предельном случае  $B=0$  при  $\sigma \rightarrow \infty$  свободная поверхность плоская. При  $B \rightarrow \infty$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ) решения задачи стремятся к предельному

$$y(x) = 1 + F/4(1 + \text{ch } \pi x)$$

Отметим, что в данной работе рассматривается один из возможных режимов течения, который, по-видимому, имеет место только при небольших числах Фруда. При больших же числах Фруда можно ожидать, что картина течения будет иметь качественно другой характер [4, 5]. Свободная поверхность, найденная в [5] в предельном случае больших стокров без учета поверхностных сил и сил тяжести, имеет на оси симметрии бесконечную производную ( $y'(0) = \infty$ ) и лежит ниже плоскости  $y=1$ .

При учете поверхностных сил в случае гладкого решения задачи, как показано в п. 3, при произвольных конечных значениях чисел Бонда и Фруда свободная поверхность жидкости имеет локальный максимум над сливным отверстием. Таким образом, учет сил поверхностного натяжения оказывает влияние на качественный характер формы свободной поверхности жидкости при истечении.

Автор признателен Г. В. Щербине за постановку задачи и ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

Поступила 19 IX 1973

1. Щербина Г. В. О форме свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости. В сб. «Математическая физика и функциональный анализ», вып. 1. Харьков, 1969.
2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
3. Темкин Л. А., Темкина В. С., Щербина Г. В. Решение задачи о течении жидкости в бесконечной Т-образной области с помощью уравнения Фредгольма 1-го рода. В сб. «Вычислительная математика и вычислительная техника», вып. 2. Харьков, 1971.
4. Пойцкий А. С., Любин Л. Я. Основы динамики и тепломассообмена жидкостей и газов при невесомости. М., «Машиностроение», 1972.
5. Сизонов В. С. О динамическом провале уровня свободной поверхности жидкости конечной глубины над сливным отверстием. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.