$$I_3 = \int\limits_0^1 [(-2D^3+Ri((-3\eta/2+2\eta^2)D^2+(\sigma_0+1-\eta)D))u_0 +$$

$$+ Ri(\sigma_0+1-\eta)(2l_1+(6\eta-4)l_2)]w\,d\eta$$

Отметим, что из неравенства нулю определителя системы (2.7) следует сходимость рядов (2.1) для достаточно малых λ [3], Некоторые соответствующие $\sigma_0=-0.5$ результаты решения уравнения (2.6) представлены ниже.

R	0.01	100	125	145	195	700	1300	1400
Γ_1	1.535	1.442	1.422	—2.504	0.818	3.049	2.949	2.939
$i\sigma_1$	0.499	0.376	—0.85	—3.311	—0.582	—0.029	—0.018	—0.017

Автор признателен А. И. Снопову за постановку задачи, В. В. Скрипачеву, В. И. Юдовичу, А. Л. Уринцеву за полезные обсуждения.

Поступила 13 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов А. Л., Шустер В. Г.* Об устойчивости центрального положения шипа в гидродинамическом подшипнике. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 5.
2. *Уринцев А. Л.* Об устойчивости равномерного вращения ненагруженного шипа в гидродинамическом подшипнике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
3. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.

УДК 532.517.4

К РАСЧЕТУ СПЕКТРА ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

К. Е. ДЖАУГАШТИН *(Ленинград)*

На основе полуэмпирической теории турбулентности найдена спектральная функция изотропной турбулентности.

Динамическое стационарное уравнение спектральной функции поля скорости изотропной турбулентности $E(k)$ имеет вид [1]

$$T(k)-2\nu k^2E(k)=0 \tag{1}$$

где k — волновое число, $T(k)$ — функция переноса, ν — кинематическая вязкость. Вследствие незамкнутости уравнения (1) основным способом его решения в настоящее время является полуэмпирический метод. На основе интуитивных физических соображений функция переноса $T(k)$ выражается через спектральную функцию и волновое число. Решения уравнения (1), полученные таким образом для области универсального равновесия, согласуются с «законом $^5/_3$» Колмогорова, но при больших значениях k, как правило, приводят к неверным физическим результатам [1]. В настоящей статье на основе полуэмпирического метода построена спектральная функция, удовлетворяющая закону Колмогорова в инерционной области и физически правильному асимптотическому поведению в области больших волновых чисел.

Для решения спектрального уравнения (1) получим предварительно, как и обычно, выражение для члена $T(k)$. Вычислим для этого изменение плотности кинетической энергии E в точке с волновым числом k. Следует иметь в виду, что изменение плотности кинетической энергии происходит как за счет потока энергии по спектру волновых чисел, так и за счет непосредственного воздействия вязкости, вызывающей диссипацию энергии. Оба фактора приводят к уменьшению энергии. Изменение величины E за счет инерционного переноса энергии по аналогии с релаксационными процессами можно принять пропорциональным величине спектральной функции, функции переноса и интервалу волнового числа ($-TEdk$). Такой же зависимостью выразим уменьшение энергии за счет диссипации ($-Te_\nu dk$), где в качестве энергии примем масштаб энергии, характерный для области наибольшей диссипации $e_\nu=\nu^{5/4}\varepsilon^{1/4}$ (ε – полная диссипация энергии). Таким образом, величину dE запишем в виде:

$$dE=\text{const}\,TA^{-1}(cEdk+e_\nu dk) \tag{2}$$

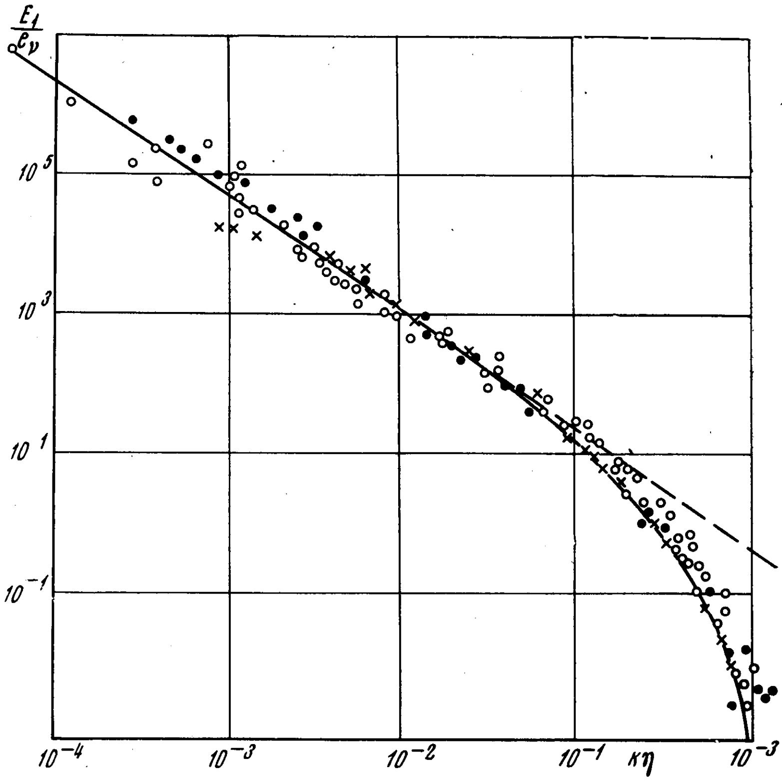
где c — постоянная, определяемая ниже. Величина A в формуле записана из соображений размерностей. Из основных параметров равновесной области спектра ε, ν и волнового числа k можно составить единственную комбинацию для A вида

$$A=\varepsilon^{1-\alpha/3}k^{4/3\alpha}\nu^{\alpha} \tag{3}$$

где α – число, значение которого будет определено ниже. Используя (2) и (3), получим выражение для функции переноса, которое для дальнейшего удобно записать в виде

$$-T(k)=\frac{6}{5}\varkappa^{-(3-4/3)\alpha}\frac{\varepsilon^{(1-\alpha/3)}k^{4/3\alpha}\nu^{\alpha}}{\nu^{5/4}\varepsilon^{1/4}}\left(1+c\frac{E}{e_\nu}\right)^{-1}\frac{dE}{dk}$$

где $\varkappa$ — эмпирическая постоянная.



Фиг. 1

Подставляя выражение для $T(k)$ в (1) и вводя масштаб длины Колмогорова $\eta=\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$, получим следующее уравнение для спектральной функции:

$$-\left[E\left(1+c\frac{E}{e_\nu}\right)\right]^{-1}\frac{dE}{dk}=\frac{5}{3}(\varkappa\eta)^{3-4/3\alpha}k^{2-4/3\alpha} \tag{5}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{E}{e_\nu}=c\left\{\exp\left[\frac{5}{9-4\alpha}(\varkappa\eta k)^{3-4/3\alpha}+c_1\right]-1\right\}^{-1} \tag{6}$$

где c_1 — постоянная интегрирования.

Определим постоянные α, c и c_1. В области относительно малых волновых чисел (инерционная область) распределение энергии из соображения размерности должно удовлетворять закону $^5/_3$. Разлагая экспоненту (6) в ряд и удерживая в нем первые два члена, можно убедиться, что закон Колмогорова выполняется при $\alpha=1$, $c_1=0$. При этом получим следующее выражение для спектральной функции:

$$\frac{E}{e_\nu}=c[\exp(\varkappa\eta k)^{5/3}-1]^{-1} \tag{7}$$

Для определения постоянной c воспользуемся выражением для полной диссипации, т. е. интегральным условием

$$\varepsilon=2\nu\int_0^\infty k^2E(k)\,dk \tag{8}$$

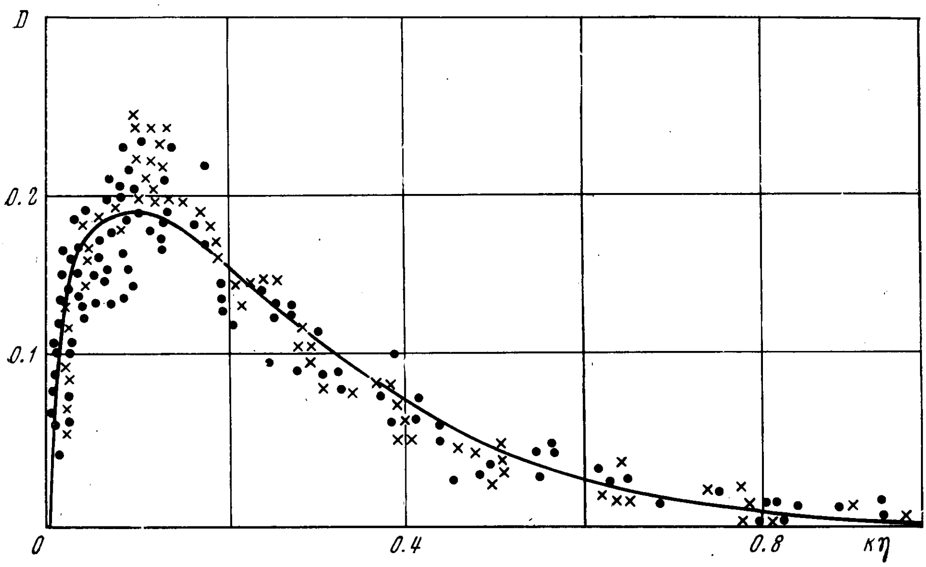
Подставив сюда выражение для E (7) и выполнив некоторые преобразования, значение c выразим через эмпирическую постоянную $\varkappa$ и получим следующее выражение для спектральной функции:

$$\frac{E}{e_\nu} = \frac{\varkappa^3}{2I} \frac{1}{\exp(\varkappa\eta k)^{5/3} - 1}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{\exp x^{5/3} - 1} dx = F(1.8)\,\xi(1.8) = 1.0258$$

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \xi(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z^n}$$

Исследуем асимптотическое поведение спектральной функции. При относительно малых волновых числах, разлагая экспоненту в ряд и удерживая в нем первые два,



Фиг. 2

затем первые три члена, получим соответственно формулу Колмогорова и выражение аналогичное по структуре формуле Гейзенберга [1].

$$E = \frac{\varkappa^{4/5}}{2I} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \qquad E = \frac{\varkappa^{4/5}}{2I} \frac{\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}}{1 + (\varkappa\eta k)^{5/3}}$$

В области больших волновых чисел имеет место асимптотическая формула

$$E = \frac{\varkappa^3}{2I} e_\nu \exp(-\varkappa\eta k)^{5/3}$$

из которой видно, что спектральная функция убывает по экспоненциальному закону.

Для сравнения с опытными данными рассчитывалась одномерная спектральная функция по известной формуле

$$E_1(k) = \int_{k_1}^\infty \frac{E(k)}{k} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) dk$$

Путем сопоставления с экспериментом было выбрано значение $\varkappa$=0.4. На фиг. 1 (фиг. 7, 6 из [1]) приведено сопоставление расчета и опыта по спектру изотропной турбулентности (пунктирная линия — «закон» $^5/_3$). Использование здесь логарифмических масштабов по обеим осям координат в какой-то мере скрадывает разброс экспериментальных данных относительно расчетной кривой. Поэтому на фиг. 2 дано сравнение с нормированным спектром диссипации в натуральном масштабе (фиг. 7 из [1]). Через D обозначена величина $D=(\eta k)^2(\varepsilon\nu^5)^{1/4}E_1(k)$. Из обоих графиков видно, что, несмотря на некоторый разброс индивидуальных эмпирических данных, разнородные экспериментальные данные ряда авторов согласуются с теоретической кривой.

Поступила 20 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М., «Наука», 1965.

УДК 532.517.4:538.4

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ С ВНЕЗАПНЫМ СУЖЕНИЕМ НА ВХОДЕ

Б. Н. БАУШЕВ, В. С. НИКОЛАЕНКО, И. Г. ПАНЕВИН

(Москва)

На основе методики, разработанной в [1], изучается влияние условий входа в экспериментальный участок на характер течения электропроводной жидкости в круглой трубе в продольном магнитном поле.

Эксперимент проводился на установке, описанной в работе [1]. Вход в экспериментальный участок (гладкая труба из немагнитной нержавеющей стали длиной 2120 *мм* с внутренним диаметром 6±0.005 *мм*) из подводящей трубы диаметром 20 *мм* находился в зоне действия однородного магнитного поля и был выполнен в виде внезапного сужения с полууглом 90°. Выбранное соотношение диаметров экспериментального и подводящего каналов (0.33) позволяло сохранять ламинарный режим течения в подводящей трубе при наличии турбулентного течения в экспериментальном участке вплоть до чисел Рейнольдса $R=\langle u\rangle d/\nu\leqslant 7500$ ($\langle u\rangle$ — средняя скорость, d — диаметр трубы, ν — коэффициент кинематической вязкости).

В отличие от работы [1] в настоящем исследовании использовался дисковый охлаждаемый водой соленоид, который обеспечивал получение однородного магнитного поля до 0.8 *тл* (с точностью ±2.5%) на протяжении 2120 *мм*.

В процессе эксперимента измерялись: распределение статического давления по длине экспериментального участка при помощи 32 стеклянных двухжидкостных пьезометров, объемный расход жидкости (расходомером Вентури), температура жидкого металла на входе в экспериментальный участок и на выходе из него при помощи хромель-копелевых термопар, ток в соленоиде. Распределение статического давления по длине экспериментального участка измерялось как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля, причем магнитное поле накладывалось на исходное турбулентное течение.

Коэффициент сопротивления рассчитывался на формуле $\lambda=-(2d/\rho)\langle u\rangle^{-2}dp/dx$, где dp/dx — градиент статического давления на участке стабилизированного течения.

Результаты измерений представлены на фиг. 1 в виде зависимостей λ от чисел Рейнольдса R и Гартмана $H=Bd\sqrt{\sigma/\rho\nu}$ (где B – индукция магнитного поля, ρ – плотность, а σ – электропроводность жидкости). Точки *1* и *2* на фиг. 1, *а*, *б*, *в*, *г*, *д* соответствуют значениям H, указанным в круглых скобках, (0,50), (0,89), (0,128), (0,146), (0,166). В качестве примера на фиг. 1, *а*, *в*, *г* приведены экспериментальные точки *3*, полученные в работе [2], видимо, при аналогичных условиях входа соответственно для значений $H=47$, 110 и 144. Кривая *А* на фиг. 1 соответствует закону Пуазейля, а кривая *Б* – закону Блазиуса.

Видно, что значения λ для стабилизированного течения совпадают с кривой Пуазейля при $R<R_{*B}$, где R_{*B} — значение критического числа Рейнольдса, соответствующее началу перехода от ламинаризованного режима течения к турбулентному при определенной величине индукции магнитного поля.

Для $H=50$, 89, 128, 146 и 166 получены соответственно $R_{*B}=3010$, 4080, 5150, 5650 и 6400. Эти результаты приведены на фиг. 2 (точки *1*) в виде зависимости R_{*B}/R_* от числа Стюарта $S_*=H^2/R_{*B}$, также соответствующего началу перехода от ламинаризованного режима течения к турбулентному. Там же показаны результаты работы [1] (точки *2*) и нанесена прямая, аппроксимирующая экспериментальные данные работы [2]

$$R_{*B}/R_*=1+0.4S_* \qquad (1)$$

Видно, что данные настоящего исследования согласуются с результатами работ [1, 2].