$$\beta=v/a, \qquad \alpha=\sqrt{1-\beta^2}\left[1-\left(\frac{v_\mu m^\mu}{a\mu}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{1}{\rho}\sqrt{S_\alpha S^\alpha}$$

Пользуясь методами, развитыми в [5–9], можно показать, что все уравнения в (1), при произвольных Q, Q_α, Q_α^*, T, i^β, удовлетворяющих соотношению (3), являются следствием уравнений (15). Таким образом, соотношения (13) можно рассматривать как замену неизвестных функций, позволяющую свести систему уравнений (1) к системе уравнений (15) на единицу меньшего порядка. Аналогичная замена неизвестных функций для уравнений, описывающих жидкости (газы) с внутренним механическим и магнитным моментами, в рамках специальной теории относительности рассмотрена в [9].

Институт механики
Московского государственного
университета

Поступила 25 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М., «Наука», 1971.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
3. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский В. Г.* Спиновые волны. М., «Наука», 1967.
4. *Картан Э.* Теория спиноров. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
5. *Желнорович В. А.* Спинор как инвариантный объект. ПММ, 1966, т. 30, № 6.
6. *Желнорович В. А.* Модели сред с внутренним электромагнитным и механическим моментами. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». (К 60-летию акад. Л. И. Седова). М., «Наука», 1969.
7. *Желнорович В. А.* Представление спиноров вещественными и комплексными тензорными агрегатами. Теорет. и матем. физика, 1970, т. 2, № 1.
8. *Желнорович В. А.* Спинорное поле как слияние тензорных полей. Вестн. МГУ, Сер. физ.-астрон., 1972, № 6.
9. *Желнорович В. А.* Об уравнениях для жидкостей с внутренним магнитным и механическим моментами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.

УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЦИЛИНДРА В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

В. С. ЧЕЛЫШКОВ

(Киев)

В линейной постановке рассматривается плоская задача об устойчивости центрального положения вращающегося внутреннего цилиндра в течении Куэтта при отсутствии внешних сил и узком зазоре. В [1] нейтральных колебаний не обнаружено, и авторы пришли к выводу, что такое движение всегда неустойчиво. В [2] методом Рунге – Кутта в сочетании с методом секущих получены некоторые нейтральные кривые для предельного случая узкого зазора, а также рассмотрен случай малых чисел Рейнольдса и любых зазоров. В данной работе строится асимптотика узкого зазора для соответствующей задачи на собственные значения. Численное исследование точного решения уравнений первого приближения представлено в виде нейтральных кривых. Для собственного числа σ и параметра Γ, характеризующего неустойчивость, получены методом возмущений вторые члены асимптотики.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство между неподвижным внешним цилиндром и подвижным внутренним, причем внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Тогда при отсутствии внешних сил одно из возможных движений – течение Куэтта между цилиндрами. Уравнения малых возмущений для этого режима в безразмерной форме имеют вид

$$R\left[\frac{\partial}{\partial t}+\omega(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\Delta_1\psi=\Delta_1^2\psi \tag{1.1}$$

$$R\Gamma\frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2}-6b\lambda^3F\mathbf{e}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}\right|_{\eta=0}\tau\,d\theta=0 \tag{1.2}$$

$$\psi|_{\eta=0}=\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt},\ \boldsymbol{\tau}\right)-(\mathbf{e},\mathbf{n}),\qquad \psi|_{\eta=1}=0,\qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}=0 \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=\lambda\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt},\ \boldsymbol{\tau}\right)-\lambda(a-b)(\mathbf{e},\mathbf{n})$$

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\lambda^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\qquad \omega(r)=a+b/r^2$$

$$a=-1/\lambda(2+\lambda),\qquad b=(1+\lambda)^2/\lambda(2+\lambda)$$

$$F=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{n}=\mathbf{i}\cos\theta+\mathbf{j}\sin\theta,\qquad \boldsymbol{\tau}=F\mathbf{n}$$

Здесь (1.1) – уравнение для функции тока ψ в системе координат $(\eta,\ \theta)$, связанной с цилиндрической $(r,\ \theta)$ соотношением $r=1+\lambda\eta$; (1.2), (1.3) – уравнение движения центра цилиндра и граничные условия соответственно; $\mathbf{e}$ – эксцентриситет; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат; λ – относительный зазор; $\Gamma=\lambda(\gamma-1)$, где γ – отношение плотности материала цилиндра к плотности жидкости; $R=\Omega\delta^2/\nu$ – число Рейнольдса, δ – ширина зазора, ν – кинематический коэффициент вязкости.

Аналогичные уравнения с точностью до выбора безразмерных параметров получены в [1].

Будем искать решение (1.1) – (1.3) в виде

$$\psi=\varphi(\eta)e^{i(\sigma t+\theta)}+\overline{\varphi}(\eta)e^{-i(\overline{\sigma}t+\theta)},\qquad \mathbf{e}=\beta[e^{i\sigma t}(\mathbf{i}+i\mathbf{j})+e^{-i\sigma t}(\mathbf{i}-i\mathbf{j})] \tag{1.4}$$

Отметим, что, вообще говоря, необходимо рассматривать также решения вида $\exp(in\theta)$ с целым n. В этом случае граничные условия (1.3) для ψ будут однородны, и получается плоская задача на собственные значения для течения Куэтта между цилиндрами, для которой нейтральных колебаний пока не обнаружено.

Подставляя (1.4) в (1.1) – (1.3) и исключая β с помощью второго из граничных условий (1.3), приходим для φ, σ к задаче на собственные значения

$$L^2\varphi-Ri(\sigma+\omega(r))L\varphi=0,\qquad \lambda(\sigma+a-b)\varphi(0)-(\sigma+1)\varphi'(0)=0 \tag{1.5}$$

$$i\lambda(\sigma+a-b)\varphi'''(0)-(R\Gamma\sigma^2-6b\lambda^3i)\varphi'(0)=0$$

$$\varphi(1)=\varphi'(1)=0,\qquad L=D^2+(\lambda/r)D-(\lambda/r)^2,\qquad D=d/d\eta$$

2. Положим

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\lambda^k,\qquad \sigma=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k\lambda^k,\qquad \Gamma=\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma_k\lambda^k \tag{2.1}$$

$$\omega(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\omega_k,\qquad a\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^k,\qquad b\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\lambda^k$$

$$(\lambda/r)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_{mk}\lambda^k,\qquad \varphi_k=\varphi_k(\eta),\qquad \omega_k=\omega_k(\eta),\qquad \rho_{mn}=\rho_{mk}(\eta)$$

Подставляя (2.1) в (1.5), получим для определения функции φ_k и чисел σ_k бесконечную последовательность уравнений и граничных условий

$$D^4\varphi_k-Ri(\sigma_0+1-\eta)D^2\varphi_k=f_k',\qquad \varphi_k(0)-(\sigma_0+1)\varphi_k'(0)=\alpha_k \tag{2.2}$$

$$i\varphi_k'''(0)-R\Gamma_0\sigma_0^2\varphi_k'(0)=\beta_k,\qquad \varphi_k(1)=\varphi_k'(1)=0 \tag{2.3}$$

Будем искать решение (2.2), (2.3) в виде

$$\varphi_k=u_k+v_k,\qquad v_k=(1-\eta)^2[C_{1k}+\eta C_{2k}]$$

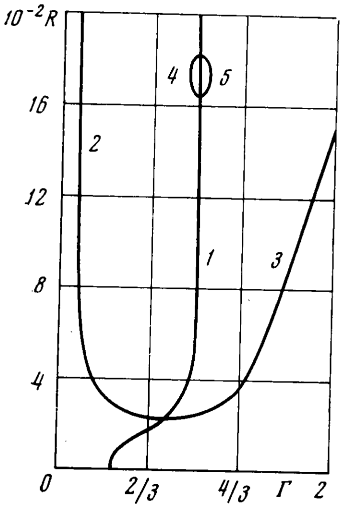
причем v_k должны удовлетворять условиям (2.3). Таким образом C_{1k} и C_{2k} выражаются через α_k и β_k, а для u_k приходим к уравнениям и однородным граничным условиям

$$D^4u_k-Ri(\sigma_0+1-\eta)D^2u_k=f_k,\qquad u_k(0)-(\sigma_0+1)u_k'(0)=0 \tag{2.4}$$

$$iu_k'''(0)-R\Gamma_0\sigma_0^2u_k'(0)=0,\qquad u_k(1)=u_k'(1)=0$$

Штрих означает производную по η.

Рассмотрим (2.4) при $k=0$. Имеем $f_0=0$, в этом случае точное решение (2.4) выражается через функции Эйри ($\mathrm{Ai}(x)$, $\mathrm{Bi}(x)$, $x=-R^{1/3}i(\sigma_0+1-\eta)$). Поэтому получение ненулевых решений в предельном случае малого относительного зазора сводится к изучению функции



$$
\begin{aligned}
F(\sigma_0,\Gamma_0,R)\equiv R\Gamma_0\sigma_0^2+\frac{i}{\Delta}\Bigg(\Bigg(\Bigg(\int_1^0 d\eta\int_1^\eta \mathrm{Ai}(x)\,d\eta\, + \\
+(\sigma_0+1)\int_2^1 \mathrm{Ai}(x)\,d\eta\Bigg)\frac{d\,\mathrm{Bi}(x)}{d\eta}\Bigg|_{\eta=0} - \\
-\Bigg((\sigma_0+1)\int_1^0 \mathrm{Bi}(x)\,d\eta\, + \\
+\int_1^0 d\eta\int_1^\eta \mathrm{Bi}(x)\,d\eta\Bigg)\frac{d\,\mathrm{Ai}(x)}{d\eta}\Bigg|_{\eta=0}\Bigg)=0
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta=\int_1^0 d\eta\int_1^\eta \mathrm{Ai}(x)\,d\eta\int_1^0 \mathrm{Bi}(x)\,d\eta\, - \\
-\int_1^0 d\eta\int_1^\eta \mathrm{Bi}(x)\,d\eta\int_1^0 \mathrm{Ai}(x)\,d\eta
\end{aligned}
$$

Исследование (2.5) проводилось численно, нейтральные кривые представлены на фигуре. Здесь на кривой *1* $\sigma_0=-0.5$, для линий *2*, *3* и *4*, *5* собственные числа расположены симметрично относительно прямой $\sigma_0(R)=-0.5$ и меняются от -0.82 до -0.18 и от -0.519 до -0.481 соответственно. Положим $\sigma_0=\sigma_r+i\sigma_i$, тогда в области, прилежащей к оси ординат, невозмущенное движение устойчиво ($\sigma_i>0$), и при переходе через любую ветвь нейтральной кривой знак σ_i меняется на противоположный. Кривые *1*, *2*, *3* получены в [2] непосредственным интегрированием на ЭВМ уравнений для узкого зазора.

При $k=1$ имеем $f_1\neq 0$ и σ_1, Γ_1 нужно искать из условия разрешимости краевой задачи (2.4)

$$
\int_0^1 f_1 w\,d\eta=0 \tag{2.6}
$$

Здесь w – решение сопряженной к (2.4) при $k=0$ задачи

$$
D^2(D^2w-Ri(\sigma_0+1-\eta)w)=0,\qquad (\sigma_0+1)w'''(0)+w''(0)+iR\Gamma_0\sigma_0^2w(0)=0
$$
$$
w'(0)=w(1)=w'(1)=0
$$

Запишем (2.6) в виде

$$
\sigma_1I_1+\Gamma_1I_2+I_3=0 \tag{2.7}
$$

Если положить $C_{11}=l_1+m_1\sigma_1+n_1\Gamma_1$, $C_{21}=l_2+m_2\sigma_1+n_2\Gamma_1$, то

$$
I_1=Ri\int_0^1[D^2u_0+(\sigma_0+1-\eta)(2m_1+(6\eta-4)m_2)]w\,d\eta
$$

$$
I_2=Ri\int_0^1(\sigma_0+1-\eta)(2n_1+(6\eta-4)n_2)w\,d\eta
$$

$$I_3=\int_0^1 [(-2D^3+Ri((-3\eta/2+2\eta^2)D^2+(\sigma_0+1-\eta)D))u_0+$$
$$+Ri(\sigma_0+1-\eta)(2l_1+(6\eta-4)l_2)]w\,d\eta$$

Отметим, что из неравенства нулю определителя системы (2.7) следует сходимость рядов (2.1) для достаточно малых λ [3], Некоторые соответствующие $\sigma_0=-0.5$ результаты решения уравнения (2.6) представлены ниже.

R	0.01	100	125	145	195	700	1300	1400
Γ_1	1.535	1.442	1.422	—2.504	0.818	3.049	2.949	2.939
$i\sigma_1$	0.499	0.376	—0.85	—3.311	—0.582	—0.029	—0.018	—0.017

Автор признателен А. И. Снопову за постановку задачи, В. В. Скрипачеву, В. И. Юдовичу, А. Л. Уринцеву за полезные обсуждения.

Поступила 13 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов А. Л., Шустер В. Г.* Об устойчивости центрального положения шипа в гидродинамическом подшипнике. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 5.
2. *Уринцев А. Л.* Об устойчивости равномерного вращения ненагруженного шипа в гидродинамическом подшипнике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
3. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.

УДК 532.517.4

К РАСЧЕТУ СПЕКТРА ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

К. Е. ДЖАУГАШТИН *(Ленинград)*

На основе полуэмпирической теории турбулентности найдена спектральная функция изотропной турбулентности.

Динамическое стационарное уравнение спектральной функции поля скорости изотропной турбулентности $E(k)$ имеет вид [1]

$$T(k)-2\nu k^2E(k)=0 \tag{1}$$

где k — волновое число, $T(k)$ — функция переноса, ν — кинематическая вязкость. Вследствие незамкнутости уравнения (1) основным способом его решения в настоящее время является полуэмпирический метод. На основе интуитивных физических соображений функция переноса $T(k)$ выражается через спектральную функцию и волновое число. Решения уравнения (1), полученные таким образом для области универсального равновесия, согласуются с «законом $^5/_3$» Колмогорова, но при больших значениях k, как правило, приводят к неверным физическим результатам [1]. В настоящей статье на основе полуэмпирического метода построена спектральная функция, удовлетворяющая закону Колмогорова в инерционной области и физически правильному асимптотическому поведению в области больших волновых чисел.

Для решения спектрального уравнения (1) получим предварительно, как и обычно, выражение для члена $T(k)$. Вычислим для этого изменение плотности кинетической энергии E в точке с волновым числом k. Следует иметь в виду, что изменение плотности кинетической энергии происходит как за счет потока энергии по спектру волновых чисел, так и за счет непосредственного воздействия вязкости, вызывающей диссипацию энергии. Оба фактора приводят к уменьшению энергии. Изменение величины E за счет инерционного переноса энергии по аналогии с релаксационными процессами можно принять пропорциональным величине спектральной функции, функции переноса и интервалу волнового числа ($-TEdk$). Такой же зависимостью выразим уменьшение энергии за счет диссипации ($-Te_\nu dk$), где в качестве энергии примем масштаб энергии, характерный для области наибольшей диссипации $e_\nu=\nu^{5/4}\varepsilon^{1/4}$ (ε – полная диссипация энергии). Таким образом, величину dE запишем в виде:

$$dE=\text{const}\,TA^{-1}(cEdk+e_\nu dk) \tag{2}$$

где c — постоянная, определяемая ниже. Величина A в формуле записана из соображений размерностей. Из основных параметров равновесной области спектра ε, ν и волнового числа k можно составить единственную комбинацию для A вида

$$A=\varepsilon^{1-\alpha/3}k^{4/3\alpha}\nu^{\alpha} \tag{3}$$

где α – число, значение которого будет определено ниже. Используя (2) и (3), получим выражение для функции переноса, которое для дальнейшего удобно записать