УДК 532.511

О НЬЮТОНИАНСКИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ С ВНУТРЕННИМ МАГНИТНЫМ И МЕХАНИЧЕСКИМ МОМЕНТАМИ

В. А. ЖЕЛНОРОВИЧ (*Москва*)

Найдена замена неизвестных функций, позволяющая понизить порядок дифференциальных уравнений, описывающих жидкости (газы) с внутренним магнитным и механическим моментами.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую в рамках ньютонианской механики заряженную жидкость (газ) в электромагнитном поле, обладающую внутренним магнитным и механическим моментами [1–3]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha+\tau_\alpha)=\partial_\beta\Pi_\alpha{}^\beta+\rho_e E_\alpha+\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\mu}(\rho_e v^\beta+i^\beta)B^\mu+\rho m^\mu\partial_\alpha B_\mu \tag{1}$$

$$\nu\frac{d}{dt}m^\mu=\varepsilon^{\alpha\beta\mu}m_\alpha B_\beta{}^*,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\rho+\partial_\alpha\rho v^\alpha=0,\qquad T=\frac{\partial U_m}{\partial S}$$

$$\partial_\alpha E^\alpha=4\pi\rho_e,\qquad \varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\beta(B_\mu-4\pi\rho m_\mu)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^\alpha+\frac{4\pi}{c}(\rho_e v^\alpha+i^\alpha)$$

$$\partial_\alpha=\partial^\alpha=\partial/\partial x^\alpha,\qquad d/dt=\partial/\partial t+v^\beta\partial_\beta$$

Здесь ρ – плотность жидкости; $\rho_e=e\rho$ – плотность свободного электрического заряда жидкости; e – постоянная; v^β – компоненты вектора скорости индивидуальных точек жидкости; $E_\alpha=-\partial_\alpha\varphi-c^{-1}\partial A_\alpha/\partial t$ – компоненты вектора электрической напряженности, заданные в декартовой инерциальной системе координат наблюдателя с переменными x^α ($\alpha=1, 2, 3$); c – скорость света в пустоте; φ, A_α – соответственно скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля; $\partial/\partial t$ – символ производной по времени при постоянных координатах x^α; $B^\mu=\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\alpha A_\beta$ – компоненты вектора магнитной индукции, определяемые в системе координат x^α; $\varepsilon^{\alpha\beta\mu}$ – компоненты трехмерного единичного антисимметрического по всем индексам псевдотензора Леви – Чивита; S – энтропия; $U_m=U_m(\rho, S)$ – задаваемая функция; m^μ – компоненты вектора удельной плотности внутреннего магнитного момента жидкости; ν – постоянная (гиромагнитное отношение); i^α – компоненты вектора тока проводимости.

Компоненты τ_α, $\Pi_\alpha{}^\beta$, $B_\alpha{}^*$, входящие в уравнения (1), определяются следующими равенствами:

$$\Pi_\alpha{}^\beta=-\rho v_\alpha v^\beta-\rho^2\frac{\partial U_m}{\partial\rho}\delta_\alpha{}^\beta+\nu v^\beta\varepsilon_{\alpha\lambda\mu}\partial^\mu(\rho m^\lambda)-\nu\varepsilon^{\beta\mu\lambda}\rho m_\mu\partial_\alpha v_\lambda+\tau_\alpha{}^\beta \tag{2}$$

$$\tau_\alpha=-\nu\varepsilon_{\alpha\lambda\beta}\partial^\beta(\rho m^\lambda)+\rho Q_\alpha-N_\alpha,\qquad B_\alpha{}^*=B_\alpha+\frac{1}{\rho}Q_\alpha{}^*+\nu\varepsilon_{\alpha\beta\mu}\partial^\beta v^\mu$$

$$\tau_\alpha{}^\beta=-\rho v^\beta Q_\alpha+(\rho v_\lambda Q^\lambda+\rho Q)\delta_\alpha{}^\beta-N_\alpha{}^\beta$$

Величины Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^α в уравнениях (1), (2) можно задавать как произвольные функции от параметров ρ, v^μ, m^μ, S, φ, A_α и от производных по координатам и времени от этих параметров таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$Q\partial_\alpha\rho+Q_\beta\partial_\alpha\rho v^\beta+Q_\beta{}^*\partial_\alpha m^\beta+\rho T\partial_\alpha S+\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda}i^\beta B^\lambda=\partial_\beta N_\alpha{}^\beta-\frac{\partial}{\partial t}N_\alpha \tag{3}$$

где компоненты $N_\alpha{}^\beta$, N_α определяются заданием Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i_α. Вид зависимости величин Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^α от определяющих параметров связи с конкретизацией механической и термодинамической постановок задачи. В частности, для консервативных голономных систем для величин Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^α можно принять

$$Q=\frac{\delta\Lambda}{\delta\rho},\qquad Q_\alpha=\frac{\delta\Lambda}{\delta\rho v^\alpha},\qquad Q_\alpha{}^*=\frac{\delta\Lambda}{\delta m^\alpha},\qquad \rho T=\frac{\delta\Lambda}{\delta S},\qquad i^\alpha=0 \tag{4}$$

где $\delta/\delta S$ – символ производной Лангранжа, Λ может определяться как функция величин ρ, v^μ, m^μ, S, а также от производных по координатам и времени от этих величин. В частности, если Λ определена как функция параметров ρ, v^μ, m^μ, S и от первых производных по координатам и времени от ρ, v^μ, m^μ, то $N_\alpha{}^\beta$, N_α определяются следующим образом:

(5) $$N_\alpha = \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial\rho/\partial t}\partial_\alpha\rho + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial m^\lambda/\partial t}\partial_\alpha m^\lambda + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial\rho v^\lambda/\partial t}\partial_\alpha\rho v^\lambda$$

$$N_\alpha{}^\beta = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_\beta\rho}\partial_\alpha\rho - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_\beta m^\lambda}\partial_\alpha m^\lambda - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_\beta\rho v^\lambda}\partial_\alpha\rho v^\lambda + \Lambda\delta_\alpha{}^\beta$$

Если Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^β, $N_\alpha{}^\beta$, N_α определены равенствами (4), (5), то соотношения (3) выполняются тождественно.

В системе уравнений (1) содержатся уравнения импульсов, уравнения моментов количества движения, уравнение неразрывности, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде. Из уравнений (1) следует также уравнение энергии:

(6) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho v^2+\rho U_m+\frac{1}{8\pi}(E_\alpha E^\alpha+H_\alpha B^\alpha)-\frac{1}{2}\rho m_\alpha B^\alpha+(\rho Q_\alpha-N_\alpha)v^\alpha\right]+$$
$$+\partial_\beta\left\{\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho U_m+\rho^2\frac{\partial U_m}{\partial\rho}-\rho m_\alpha B^\alpha\right)v^\beta+\frac{c}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\mu}H_\mu E_\alpha-\tau_\alpha{}^\beta v^\alpha-\right.$$
$$\left.-\nu\left[\varepsilon^{\beta\alpha\lambda}v_\alpha\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_\lambda)+v^\beta\varepsilon^{\alpha\lambda\mu}\partial_\mu(\rho m_\lambda v_\alpha)\right]\right\}=N$$

где $H^\lambda = B^\lambda - 4\pi\rho m^\lambda$, N определяется соотношением

(7) $$T\frac{d}{dt}S+Q_\alpha{}^*\frac{d}{dt}m^\alpha-\tau_\alpha{}^\beta\partial_\beta v^\alpha+(\rho Q_\alpha-N_\alpha)\frac{\partial}{\partial t}v^\alpha-i^\beta\left(E_\beta+\frac{1}{c}\varepsilon_{\beta\lambda\mu}v^\lambda B^\mu\right)=N$$

Чтобы уравнение энергии (6) определяло закон сохранения энергии, необходимо положить

(8) $$N=\partial_\alpha J^\alpha+\frac{\partial}{\partial t}J$$

Условие (8) накладывает ограничение на величины Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^β

(9) $$Q\frac{\partial}{\partial t}\rho+Q_\alpha\frac{\partial}{\partial t}\rho v^\alpha+Q_\alpha{}^*\frac{\partial}{\partial t}m^\alpha+\rho T\frac{\partial}{\partial t}S-i^\beta E_\beta=\partial_\beta(J^\beta-v^\alpha N_\alpha{}^\beta)+\frac{\partial}{\partial t}(J+v^\beta N_\beta)$$

Если Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^β заданы, то J, J^α определяются величинами Q, $Q_\alpha{}'$ $Q_\alpha{}^*$, T, i^β. В частности, если Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^β определяются уравнениями (4), то для J, J^α имеем

(10) $$J^\beta=v^\alpha N_\alpha{}^\beta-\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_\beta\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_\beta\rho v^\mu}\frac{\partial}{\partial t}\rho v^\mu-\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_\beta m^\mu}\frac{\partial}{\partial t}m^\mu$$

$$J=-v^\beta N_\beta-\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial\rho/\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial\rho v^\mu/\partial t}\frac{\partial\rho v^\mu}{\partial t}-\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial m^\mu/\partial t}\frac{\partial m^\mu}{\partial t}+\Lambda$$

Уравнение (7) при заданном N можно рассматривать как уравнение баланса энтропии.

Если в уравнениях (1) T рассматривать как добавочную неизвестную функцию, то N можно произвольно задавать как функцию от определяющих параметров (удовлетворяя лишь условию совместности уравнений (1), (6)). В этом случае уравнение энергии (6) не является следствием уравнений (1) и служит для определения функции $T(x^\alpha, t)$, а уравнение баланса энтропии (7) является следствием уравнений (1) и уравнения энергии (6). Для определения функции $T(x^\alpha, t)$ вместо уравнения энергии можно взять также уравнение баланса энтропии.

Уравнения (1), (6), (7) можно получить при помощи вариационного принципа или из уравнения энергии, причем если величины Q, Q_α, $Q_\alpha{}^*$, T, i^β определены равенствами (4), то удельная плотность внутренней энергии жидкости U определяется следующим образом (без членов с электромагнитным полем):

(11) $$U=U_m(\rho,S)-2\nu m_\alpha\omega^\alpha-\frac{1}{\rho}\Lambda,\qquad \omega^\alpha=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\beta v_\mu$$

где ω^α — компоненты вектора вихря скорости.

Уравнения (1), (2), (6), (7) могут описывать, например, ферромагнитные, парамагнитные или диамагнитные жидкости (газы) в электромагнитном поле [1–3].

Далее будем считать, что модуль вектора удельной плотности магнитного момента в уравнениях (1) – (7) постоянен

$$m_\alpha m^\alpha=\mu^2=\mathrm{const}\neq 0. \tag{12}$$

Положим теперь в уравнениях (1) по определению

$$\begin{gathered} m^\alpha=\mu S^\alpha/\sqrt{S_\mu S^\mu}, \qquad \rho=\psi^+\psi+\chi^+\chi, \qquad \rho v^\mu=a(\psi^+\sigma^\mu\psi-\chi^+\sigma^\mu\chi) \\ \Omega=\sqrt{\Omega^2+N^2}\cos S, \qquad N=\sqrt{\Omega^2+N^2}\sin S \\ \Omega=\psi^+\chi+\chi^+\psi, \qquad N=i(\psi^+\chi-\chi^+\psi), \qquad S^\mu=-\psi^+\sigma^\mu\psi-\chi^+\sigma^\mu\chi \end{gathered} \tag{13}$$

где a – постоянная с размерностью скорости (в электродинамических задачах в качестве a можно взять скорость света c); $\psi(x^\alpha, t)$, $\chi(x^\alpha, t)$ – два двухкомпонентных поля спиноров, заданные в декартовой системе координат x^α; $\psi^+(x^\alpha, t)$, $\chi^+(x^\alpha, t)$ – поля сопряженных спиноров [4–8]; σ^μ – двумерные матрицы Паули

$$\sigma^1=\begin{Vmatrix}0&1\\1&0\end{Vmatrix}, \qquad \sigma^2=\begin{Vmatrix}0&-i\\i&0\end{Vmatrix}, \qquad \sigma^3=\begin{Vmatrix}1&0\\0&-1\end{Vmatrix} \tag{14}$$

В силу определений (13) равенство (12) выполняется тождественно. Рассмотрим следующие уравнения:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\psi+\sigma^\alpha\partial_\alpha\psi+i\lambda\chi+i(\varkappa I+\varkappa_\alpha\sigma^\alpha)\psi=0 \\ &\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\chi-\sigma^\alpha\partial_\alpha\chi+i\dot{\lambda}\psi+i(\eta I+\tau_\alpha\sigma^\alpha)\chi=0 \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\partial_\alpha E^\alpha=4\pi\rho_e, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial_\beta H_\mu=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^\alpha+\frac{4\pi}{c}(\rho_e v^\alpha+i^\alpha)$$

где I – единичная двумерная матрица, точка над буквой означает комплексное сопряжение. Коэффициенты λ, $\varkappa$, η определяются равенствами

$$\varkappa=\frac{1}{2\mu v a}\left(-\frac{1}{2}v^2-\frac{\partial\rho U_m}{\partial\rho}+B_\alpha m^\alpha-e\varphi+Q-\mu v\frac{\partial}{\partial t}S+\frac{\delta\Lambda_0}{\delta\rho}\right) \tag{16}$$

$$\eta=\frac{1}{2\mu v a}\left(-\frac{1}{2}v^2-\frac{\partial\rho U_m}{\partial\rho}+B_\alpha m^\alpha-e\varphi+Q+\mu v\frac{\partial}{\partial t}S+\frac{\delta\Lambda_0}{\delta\rho}\right)$$

$$\varkappa_\alpha=-\frac{1}{2\mu v a}\left[\frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\delta_\alpha{}^\beta-\frac{1}{\mu^2}m_\alpha m^\beta\right)\left(\rho B_\beta+Q_\beta{}^*+\frac{\delta\Lambda_0}{\delta m^\beta}\right)-\right.$$
$$\left.-a\left(v_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha+Q_\alpha+\frac{\delta\Lambda_0}{\delta\rho v^\alpha}\right)+\mu v a\partial_\alpha S\right]$$

$$\eta_\alpha=-\frac{1}{2\mu v a}\left[\frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\delta_\alpha{}^\beta-\frac{1}{\mu^2}m_\alpha m^\beta\right)\left(\rho B_\beta+Q_\beta{}^*+\frac{\delta\Lambda_0}{\delta m^\beta}\right)+\right.$$
$$\left.+a\left(v_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha+Q_\alpha+\frac{\delta\Lambda_0}{\delta\rho v^\alpha}\right)+\mu v a\partial_\alpha S\right]$$

$$\lambda=\frac{1}{a\mu v 2(N+i\Omega)}\left[\rho\frac{\partial U_m}{\partial S}-\rho T+\mu v a\partial_\alpha S^\alpha+\frac{\mu v}{a}\frac{\partial}{\partial t}(v_\beta S^\beta)\right]$$

$$\Lambda_0=2\mu v\left(\frac{1}{1-\beta^2}+\frac{1}{\alpha}\right)S_\alpha\omega^\alpha+\frac{2\mu v}{a^2(1-\beta^2)}\left[-S_\mu v^\mu v_\beta\omega^\beta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\theta}S_\alpha v_\beta\frac{\partial}{\partial t}v_\theta-\frac{1}{2\rho(1+\alpha)}\left(\rho v^\alpha+\frac{1}{\alpha\rho}v^\beta S_\beta S^\alpha\right)\frac{d}{dt}(\varepsilon_{\alpha\mu v}v^\mu S^v)\right]$$

$$\beta = v/a, \qquad \alpha = \sqrt{1-\beta^2}\left[1-\left(\frac{v_\mu m^\mu}{a\mu}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{\rho}\sqrt{S_\alpha S^\alpha}$$

Пользуясь методами, развитыми в [5–9], можно показать, что все уравнения в (1), при произвольных Q, Q_α, Q_α^*, T, i^β, удовлетворяющих соотношению (3), являются следствием уравнений (15). Таким образом, соотношения (13) можно рассматривать как замену неизвестных функций, позволяющую свести систему уравнений (1) к системе уравнений (15) на единицу меньшего порядка. Аналогичная замена неизвестных функций для уравнений, описывающих жидкости (газы) с внутренним механическим и магнитным моментами, в рамках специальной теории относительности рассмотрена в [9].

Институт механики
Московского государственного
университета

Поступила 25 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М., «Наука», 1971.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
3. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский В. Г.* Спиновые волны. М., «Наука», 1967.
4. *Картан Э.* Теория спиноров. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
5. *Желнорович В. А.* Спинор как инвариантный объект. ПММ, 1966, т. 30, № 6.
6. *Желнорович В. А.* Модели сред с внутренним электромагнитным и механическим моментами. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». (К 60-летию акад. Л. И. Седова). М., «Наука», 1969.
7. *Желнорович В. А.* Представление спиноров вещественными и комплексными тензорными агрегатами. Теорет. и матем. физика, 1970, т. 2, № 1.
8. *Желнорович В. А.* Спинорное поле как слияние тензорных полей. Вестн. МГУ, Сер. физ.-астрон., 1972, № 6.
9. *Желнорович В. А.* Об уравнениях для жидкостей с внутренним магнитным и механическим моментами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.

УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЦИЛИНДРА В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

В. С. ЧЕЛЫШКОВ

(Киев)

В линейной постановке рассматривается плоская задача об устойчивости центрального положения вращающегося внутреннего цилиндра в течении Куэтта при отсутствии внешних сил и узком зазоре. В [1] нейтральных колебаний не обнаружено, и авторы пришли к выводу, что такое движение всегда неустойчиво. В [2] методом Рунге – Кутта в сочетании с методом секущих получены некоторые нейтральные кривые для предельного случая узкого зазора, а также рассмотрен случай малых чисел Рейнольдса и любых зазоров. В данной работе строится асимптотика узкого зазора для соответствующей задачи на собственные значения. Численное исследование точного решения уравнений первого приближения представлено в виде нейтральных кривых. Для собственного числа σ и параметра Γ, характеризующего неустойчивость, получены методом возмущений вторые члены асимптотики.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство между неподвижным внешним цилиндром и подвижным внутренним, причем внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Тогда при отсутствии внешних сил одно из возможных движений – течение Куэтта между цилиндрами. Уравнения малых возмущений для этого режима в безразмерной форме имеют вид

$$R\left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\Delta_1\psi = \Delta_1^2\psi \tag{1.1}$$

$$R\Gamma\frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} - 6b\lambda^3F\mathbf{e} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}\bigg|_{\eta=0}\tau\, d\theta = 0 \tag{1.2}$$