радиусам и ее производной. Следовательно, распределение пор по производной радиусов играет важную роль при описании равновесия жидкости в пористых средах, как отмечалось ранее [4].

Поступила 30 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М., «Мир», 1972.
2. Изотермическое передвижение влаги в зоне аэрации. Л., Гидрометеоиздат, 1972.
3. *Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. М., «Мир», 1971.
4. *Еремеев Г. Г., Старов В. М.* Капиллярный гистерезис и характеристики структуры изотропных пористых сред. Ж. физ. химии, 1973, т. 47, № 11.

УДК 532.51 : 532.135

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПУАЗЕЙЛЕВА ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

К. Б. ПАВЛОВ, А. С. РОМАНОВ, С. Л. СИМХОВИЧ

(Москва)

Исследуется гидродинамическая устойчивость течения Пуазейля вязкопластической жидкости. Показывается устойчивость этого течения по отношению к возмущениям бесконечно малой амплитуды.

Известно, что механические свойства многих реальных сред успешно описываются моделью неньютоновской вязкопластической жидкости с реологическим уравнением [1]

$$\sigma_{ij}=2\left(\eta+\frac{\tau_0}{\sqrt{2f_{lm}f_{lm}}}\right)f_{ij}\quad(\sqrt{2\sigma_{lm}\sigma_{lm}}\geqslant\tau_0),\qquad f_{ij}=0\quad(\sqrt{2\sigma_{lm}\sigma_{lm}}\leqslant\tau_0)\tag{1}$$

Здесь σ_{ij} – девиатор тензора напряжений, f_{ij} – тензор скоростей деформации, η – коэффициент динамической вязкости, τ_0 – предел текучести, случай $\tau_0=0$ соответствует ньютоновской вязкой жидкости. Из-за наличия в реологическом уравнении (1) предела текучести τ_0 при течениях вязкопластических жидкостей в каналах могут образовываться зоны, в которых среда движется как квазитвердое тело, и зоны вязкого течения. В зонах вязкого течения распределение скорости должно быть определено при решении с соответствующими граничными условиями системы уравнений гидродинамики несжимаемых жидкостей

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j},\qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0\tag{2}$$

с σ_{ij}, определенным в соответствии с реологическим уравнением (1).

В частности, в случае стационарного градиентного течения в плоском канале $-1\leqslant y\leqslant 1$ имеет место следующее симметричное распределение безразмерной скорости:

$$u(y)=\begin{cases}1-2\zeta-2\zeta y-y^2 & (-1\leqslant y\leqslant-\zeta)\\ (1-\zeta)^2 & (-\zeta\leqslant y\leqslant 0)\end{cases}\tag{3}$$

$$\zeta=\varkappa/2\quad(0\leqslant\varkappa\leqslant2),\qquad \varkappa=\frac{\tau_0L}{\eta U},\qquad U=-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{L^2}{2\eta}$$

где L – характерный размер (полуширина канала). Ниже рассматривается гидродинамическая устойчивость течения (3) по отношению к плоским нестационарным возмущениям вида

$$\Psi(x,y,t)=\varphi(y)\exp\left[i\alpha(x-ct)\right]\tag{4}$$

где $\Psi(x, y, t)$ – безразмерная функция тока возмущения, α и αc – волновое число и комплексная частота возмущения.

Наличие возмущений приводит к бесконечно малой деформации границы раздела зон течения. Уравнение границы принимает вид: $y=-\zeta+h$, где $h=h(x)$ – бесконечно малая деформация границы раздела зон течения.

Из уравнений (1)–(4) можно получить следующее уравнение относительно амплитуды возмущения:

$$(5)\qquad (u-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-u''\varphi+\frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}}(\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi)=$$

$$=\frac{4i\alpha^2\varkappa}{\alpha\,\mathrm{Re}}(u')^{-1}(\varphi''-u''(u')^{-1}\varphi'),\qquad \mathrm{Re}=\frac{\rho LU}{\eta}$$

где штрих здесь и в дальнейшем означает дифференцирование по y.

Вследствие «прилипания» жидкости на поверхности канала при $y=-1$ имеют место условия

$$(6)\qquad \varphi(-1)=\varphi'(-1)=0$$

Хотя граница раздела зон течения деформируется, движение квазитвердой зоны при наличии возмущений в зоне вязкого течения остается неизменным. Иными словами, возмущения не проникают в квазитвердую зону, обращаясь в нуль на границе раздела зон. Поэтому в приближении «средней линии» можно получить с точностью до бесконечно малых второго порядка два граничных условия

$$(7)\qquad \varphi(-\zeta)=\varphi'(-\zeta)=0$$

Условие (1) ($f_{ij}=0$), имеющее место в квазитвердой зоне, может быть использовано для определения границы раздела зон течения. С принятой точностью имеем

$$h={}^1/{}_2\varphi''(-\zeta)\exp[i\alpha(x-ct)]$$

При построении решений уравнения (5) необходимо иметь в виду, что точка $y=-\zeta$ является его особой точкой, так как $u'(-\zeta)=0$. Уравнение (5) содержит малый параметр $(\alpha\mathrm{Re})^{-1}$ и его решение можно представить в форме асимптотических разложений, которые имеют вид [2]

$$(8)\qquad \varphi_1=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(y-y_c)^k,\qquad \varphi_2=b_1\varphi_1\ln(y-y_c)+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(y-y_c)^k$$

$$\varphi_{3,4}=\exp\left[\int_{y_c}^{y}g(y)\,dy\right],\qquad g=\sqrt{\alpha\,\mathrm{Re}}\,g_0+g_1+g_2(\alpha\,\mathrm{Re})^{-1/2}+\ldots$$

$$g_0=\pm\sqrt{i(u-c)},\qquad g_1=-{}^5/{}_2g_0'/g_0$$

$$g_2=-{}^{67}/{}_8g_0'^2/g_0^3+{}^{17}/{}_8g_0''/g_0^2+\alpha^2/2g_0-iu''/2g_0^3+2\alpha^2\varkappa/g_0u'$$

$$\varphi\equiv\sum_{i=1}^{4}C_i\varphi_i,\qquad u(y_c)=c$$

При $y\to-\zeta-0$ $g_i\to\infty$ $(i\geqslant2)$, поэтому в окрестности $y=-\zeta+O(\gamma)$, $\gamma=\varkappa(\alpha\mathrm{Re})^{-1/2}$ решения уравнения (5) целесообразно искать в другой форме. Заметим, что пластические свойства оказывают существенное влияние на возмущения лишь в слое $(-\zeta,\ y_s)$, где $y_s=-\zeta+O(\gamma)$, поэтому этот слой можно назвать «пластическим» пограничным слоем.

Введение новой независимой переменной $z=(y+\zeta)\gamma^{-1}$ преобразует уравнение (5) в области пластического пограничного слоя к виду

$$(9)\qquad \varphi^{\mathrm{IV}}+\frac{A_1}{z}\varphi''+\frac{A_2}{z^2}\varphi'+A_3\varphi=0$$

Здесь A_i – регулярные функции z. Для значений $z\in[0,\ z_s]$, $z_s=(y_s+\zeta)\gamma^{-1}\sim O(1)$ $A_3\approx0$ и решения уравнения записываются в виде (см., например [3])

$$(10)\qquad \varphi_1^{(\mathrm{I})}=\mathrm{const},\qquad \varphi_2^{(\mathrm{I})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_kz^{k+3}}{k+3},\qquad \varphi_3^{(\mathrm{I})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_kz^{k+2}}{k+2}$$

$$\varphi_4^{(\mathrm{I})}=\int\varphi_3\ln z\,dz+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_kz^{k+1}}{k+1},\qquad a_0=b_0=1$$

$$c_0=b_0/A_2,\qquad a_1={}^1/{}_3b_1=-{}^1/{}_3\alpha^2\varkappa\gamma,\qquad c_1=c_2=0$$

$$a_k=\frac{A_2a_{k-1}-Ba_{k-2}}{(k+1)(k+2)},\qquad b_k=\frac{A_2b_{k-1}-Bb_{k-2}}{k(k+1)}$$

$$c_k=\frac{-[2+3k(k-2)]b_{k-1}+A_2b_{k-2}-Bb_{k-3}+A_2(k-2)c_{k-1}-B(k-2)c_{k-2}}{k(k-1)(k-2)}$$

$$B=-[(1-\varkappa+\varkappa^2/4-c)i-2\alpha^2\gamma^2]$$

Из условий (7) следует, что для $z\in[0, z_s]$ общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\varphi^{(\mathrm{I})}(z)=C_2^{(\mathrm{I})}\varphi_2^{(\mathrm{I})}+C_3^{(\mathrm{I})}\varphi_3^{(\mathrm{I})}\tag{11}$$

Условие нетривиальности общего решения уравнения (5) в области $[-\zeta, -1]$, записанное с учетом граничных условий (6), (7) и условий сшивки решений φ и $\varphi^{(\mathrm{I})}$ в точке $y=y_s$

$$\frac{d^k\varphi}{dy^k}(y_s)=\frac{d^k\varphi^{(\mathrm{I})}}{dy^k}(y_s),\qquad k=0,1,2,3\tag{12}$$

(с точностью до членов порядка $(\alpha\mathrm{Re})^{-1/2}$) приводит к вековому уравнению

$$[\varphi_1(-\zeta)\varphi_2(-1)-\varphi_2(-\zeta)\varphi_1(-1)][\varphi_1(-\zeta)\varphi_2'(-1)-\varphi_1'(-1)\varphi_2(-\zeta)]^{-1}=\\=\varphi_3(-1)[\varphi_3'(-1)]^{-1}\tag{13}$$

Заметим, что уравнение (13) с принятой точностью по форме совпадает с вековым уравнением, возникающим при исследовании гидродинамической устойчивости течения Куэтта – Пуазейля ньютоновской жидкости [4]. При введении переменной $y_1=y+\zeta$ и изменении масштаба характерных величин $L_1=L(1-\zeta)$, $U_1=U(1-\zeta)^2$ задача на собственные значения (13) совпадает с аналогичной задачей для течения Куэтта – Пуазейля с профилем скорости $u=1-y^2$ и граничными условиями $\varphi(-1)=\varphi'(-1)=\varphi(0)=\varphi'(0)=0$. Известно [4], что подобное течение устойчиво по отношению к возмущениям бесконечно малых амплитуд. Поэтому и пуазейлево течение вязкопластической жидкости также следует считать устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

На первый взгляд может показаться странным, что при сколь угодно малых, но отличных от нуля значениях параметра пластичности τ_0, пуазейлево течение вязкопластической жидкости остается устойчивым, в то время как аналогичное течение вязкой ньютоновской жидкости ($\tau_0=0$) теряет устойчивость при значениях числа Рейнольдса ≈ 5100. В этой связи, однако, следует иметь в виду, то при любом отличном от нуля значении τ_0 в центре канала всегда располагается квазитвердая зона, оказывающая существенное влияние на механизм развития возмущений в потоке.

В заключение авторы благодарят С. А. Регирера за высказанные критические замечания.

Поступила 24 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
2. *Лин Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
4. *Potter M. C.* Stability of plane Couetter – Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt 3, 609–619.