

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ПОТОКЕ
НЕРАВНОВЕСНО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

С. Б. КОЛЕШКО, Ю. П. ЛУНЬКИН, И. З. ФАЙНБЕРГ

(Ленинград)

Движение тел с гиперзвуковыми скоростями сопровождается повышением температуры газа в пограничном слое до десятков тысяч градусов, вызывающим его ионизацию. В этом случае возникают проблемы, связанные с вычислением коэффициентов вязкости, диффузии и теплопроводности. Исследования показали, что экстраполяция широко используемых приближенных выражений для коэффициентов переноса в область высоких температур является неоправданной [1-3].

В работе рассмотрен ламинарный пограничный слой в окрестности передней критической точки затупленного тела в одноатомном неравновесно ионизованном газе. Основное внимание уделено более точному расчету коэффициентов переноса и исследованию их влияния на профили газодинамических параметров. В качестве примера проведен конкретный расчет для случая аргона.

1. Уравнения пограничного слоя. Для общего случая многокомпонентной смеси реагирующих газов уравнения пограничного слоя имеют вид [4]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(r^j \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r^j \rho v) = 0$$

$$(1.2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$(1.3) \quad \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} q_y + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$(1.4) \quad \rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} (\rho c_i V_{iy}) + \dot{\omega}_i \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$(1.5) \quad p/\rho = RT/\langle M \rangle \quad h = \sum_{(i)} c_i h_i$$

В системе (1.1)–(1.5) помимо общепринятых в теории пограничного слоя введены следующие обозначения: $j=0$ для плоского и $j=1$ для осесимметричного течений; h – удельная энтальпия смеси; $c_i = \rho_i/\rho$, h_i – относительная массовая концентрация и энтальпия i -й компоненты; q_y и V_{iy} – проекция на нормаль к поверхности тела векторов плотности потока тепла q и диффузионной скорости i -й компоненты V_i ; $\dot{\omega}_i$ – массовая скорость образования i -й компоненты за счет реакций между компонентами; N – число компонент в смеси; тепловые эффекты реакций включены в энтальпию.

В выражении для q элементы d_i [5], содержащие градиенты концентраций, давления и объемные силы, исключены при помощи системы уравнений для скоростей диффузии [4, 5]

$$V_i = -\frac{n^2}{n_i \rho} \sum_{(j)} m_j D_{ij} d_j - \frac{D_i^T}{n_i m_i} \nabla \ln T$$

откуда

$$(1.6) \quad \mathbf{d}_j = \frac{\rho}{n^2} \sum_{(i)} E_{ji} n_i \mathbf{V}_i + \frac{\rho}{n^2 T} \sum_{(i)} \frac{E_{ji} D_i^T}{m_i} \nabla T$$

Здесь D_{ij} , D_i^T — обобщенные коэффициенты диффузии и термодиффузии, а величины E_{ji} найдены в результате обращения матрицы с элементами $m_i D_{ij}$.

Тогда

$$(1.7) \quad \mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \sum_{(i)} h_i \rho_i \mathbf{V}_i - \frac{\rho k T}{n} \sum_{(i)} \sum_{(j)} \frac{D_i^T E_{ij}}{n_i m_i m_j} \rho_j \mathbf{V}_j$$

$$(1.8) \quad \lambda = \lambda' + \frac{\rho k}{n} \sum_{(i)} \sum_{(j)} \frac{D_i^T D_j^T E_{ij}}{n_i m_i m_j} \equiv \lambda' + \lambda''$$

Первый член в (1.7) соответствует теплопроводности, второй — переносу энthalпии под действием всех видов диффузии (в том числе термодиффузии), третий — диффузионному термоэффекту. Исключение \mathbf{d}_i приводит также к добавке λ'' к обычно определяемому выражению λ' в формуле (1.8) для коэффициента теплопроводности.

Последний член в (1.7) обычно гораздо меньше члена, учитывающего диффузионный перенос энергии [1], и им можно пренебречь. В неионизованном газе λ'' , включающий в себя малые коэффициенты термодиффузии, дает незначительный вклад в теплопроводность. Однако для случая ионизованного газа предположение о малости λ'' по сравнению с λ' оказывается несправедливым, так как для электронной компоненты знаменатель λ'' сам становится очень малым [1].

Ограничимся в дальнейшем случае одноатомного неравновесного ионизованного газа. Воспользуемся простейшей кинетической моделью, в которой принимаются во внимание реакции ионизации электронным ударом и рекомбинации при столкновении иона с двумя электронами. При наличии амбиполярной диффузии

$$(1.9) \quad n_e \mathbf{V}_e = n_i \mathbf{V}_i = -n_a \mathbf{V}_a$$

где индексы e , i , a соответствуют электронам, ионам и нейтральным атомам. С учетом выражений для (1.9), полученных в работе [1], уравнения для энергии, степени ионизации $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$ и уравнение состояния примут вид

$$(1.10) \quad \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_A \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D_A^T}{T} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$(1.11) \quad \rho u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_A \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D_A^T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\rho \alpha}{\tau} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha_E} \alpha_E^2 - \alpha^2 \right)$$

$$(1.12) \quad p = \rho (1 + \alpha) k T / m_a$$

где D_A и D_A^T — амбиполярный и термоамбиполярный коэффициенты диффузии, α_E — равновесное значение α , τ — характерное время неравновесных процессов столкновительной ионизации и рекомбинации.

После перехода в уравнениях (1.1), (1.2), (1.40) и (1.11) к переменным типа Дородницына — Лиза [4]

$$(1.13) \quad \xi = \frac{1}{L} \int_0^x \frac{U}{U_\infty} \frac{p}{p_0} \left(\frac{r}{L} \right)^{2j} dx, \quad \eta = \frac{Ur^j}{2\sqrt{\xi} v_{e0} U_\infty L^{2j+1}} \int_0^\eta \frac{\rho}{\rho_{e0}} dy$$

(L — характерный размер тела) и ряда преобразований коэффициенты переноса останутся лишь в следующих безразмерных комплексах:

$$l = \frac{p_0}{p} \frac{\mu p}{(\mu p)_{e0}}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial h}{\partial T}, \quad \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_A}, \quad \text{Le} = \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}}$$

Здесь l — параметр Чепмена — Рубезина, Pr — число Прандтля, Sc — число Шмидта, Le — число Льюиса; индекс $e0$ относится к параметрам на внешней границе в критической точке, p_0 — давление в критической точке.

Распределение параметров на внешней границе пограничного слоя должно быть взято из решения задачи обтекания тела невязким газом, в котором происходят те же физические процессы. В качестве граничных условий на теле обычно задают условия на некаталитической или абсолютно каталитической в отношении ионизации поверхности; для скорости используется обычное условие.

2. Определение коэффициентов переноса. Для решения системы уравнений пограничного слоя необходимо знать l , Pr и Sc как функции термодинамических параметров газа. Вычисления коэффициентов переноса, входящих в выражения l , Pr и Sc , обычно производят путем разложения функции распределения в ряд по полиномам Сонина. При умеренных температурах оказываются вполне приемлемыми первое приближение для μ и D и второе — для λ . Однако для высокотемпературных ионизованных газов указанные приближения коэффициентов переноса недостаточны [1–3]. Расчеты для аргона показали, что для μ удовлетворительную точность дает второе приближение, а для обобщенных коэффициентов диффузии и коэффициента теплопроводности — четвертое. Окончательные результаты получены для случая равновесной ионизации.

Воспользуемся схемой, предложенной в работе [1], для расчета коэффициентов переноса в неравновесно ионизованном аргоне.

В четвертом приближении коэффициент теплопроводности $\lambda = \lambda' + \lambda''$ выражается через элементы Q_{hk}^{mp} ($m, p = 0, 1, 2, 3$), определяемые в конечном итоге газокинетическими и средними сечениями взаимодействия всех видов частиц, и элементами E_{ji} , полученными в результате обращения матрицы [1].

Для второго приближения λ можно избежать обращения матрицы, если выразить λ только через второй полином Сонина; при этом коэффициенты термодиффузии равны нулю и, следовательно, $\lambda'' = 0$, а определители в выражении для λ' содержат только Q_{hk}^{11} . Для четвертого приближения λ в частично ионизованном аргоне установлено [2], что если в разложении оставить только второй, третий и четвертый полиномы Сонина и тем самым исключить из определителей Q_{hk}^{mp} с m или p , равными нулю, то результат расчета λ по формуле

$$(2.1) \quad \lambda = - \frac{75 k (2\pi k T)^{1/2}}{8 |Q|} \begin{vmatrix} Q_{hk}^{11} & \dots & Q_{hk}^{13} & n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{hk}^{31} & \dots & Q_{hk}^{33} & 0 \\ \frac{n_j}{m^{1/2}} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

с точностью вычислений совпадает с полным выражением для коэффициента теплопроводности.

Коэффициент вязкости μ во втором приближении выражается через определители с элементами, аналогичными Q_{hk}^{mp} [1], с m и p , равными 0 и 1.

Для амбиполярного коэффициента диффузии D_A имеем выражение

$$(2.2) \quad D_A = 2D_{ia} \left[1 - \frac{m_e}{m_a} \left(1 - \frac{D_{ea}}{D_{ei}} \right) \frac{D_{ie}}{D_{ia}} \right]$$

в котором D_{ia} , D_{ie} , D_{ei} , D_{ea} — обобщенные коэффициенты диффузии соответствующих компонент.

В работе [2], табл. IV, показано, что D_A , вычисленный для аргона в четвертом приближении по формуле (2.2), хорошо совпадает с величиной $2[D_{ia}^*]_1$, где $[D_{ia}^*]_1$ — первое приближение бинарного ион-атомного коэффициента. При серийных расчетах использовалось выражение $D_A = 2[D_{ia}^*]_1$ и отбрасывались члены порядка, $(m_e/m_a)^{1/2}$ и меньше в элементах определителей.

В конечном итоге, определение коэффициентов переноса сводится к вопросу о выборе потенциалов взаимодействия различных пар частиц, на основе которых рассчитываются газокинетические $S_{ij}^{(l)}$ и средние $\langle S_{ij}^{(ls)} \rangle$ поперечные сечения.

В рассматриваемом случае частично ионизованного аргона имеют место три типа взаимодействия: а) заряженных частиц с заряженными: ee , ei , ii , б) заряженных частиц с нейтральными: ea , ia , в) нейтральных частиц aa . Рассмотрим далее отдельные типы взаимодействия.

а) При вычислении $S_{ij}^{(l)}$ для заряженных частиц предполагалось, что для больших углов отклонения потенциал взаимодействия равен обычному кулоновскому, а для малых — экранированному кулоновскому

$$(2.3) \quad \Phi = \frac{z_i z_j e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{d}\right), \quad d = \sqrt{kT/8\pi n_e e^2}$$

где $z = -1$ для электрона и $z = 1$ для иона, а d — дебаевский радиус, полученный при учете экранизации как от электронов, так и от ионов.

б) При расчете газокинетических сечений для электрон-атомных столкновений данные для $S^{(1)}$ брались из работы [2] и предполагалось, что $S^{(2)} = S^{(3)} = S^{(4)} = S^{(1)}$. При вычислении ион-атомных поперечных сечений для четных l использовалось соотношение $S_{ia}^{(l)} = S_{aa}^{(l)}$, а для нечетных применялась аппроксимация

$$(2.4) \quad S^{(l)} = (25.61 - 1.196 \ln g)^2$$

в которой относительная скорость g в $см/сек$, а $S^{(l)}$ в Å .

в) Для атом-атомных столкновений использовалось эмпирическое выражение потенциала [6]

$$(2.5) \quad \Phi = \Phi_0 \exp(-r/R), \quad (\Phi_0 = 32\,300 \text{ эв}, R = 0.224 \text{ Å})$$

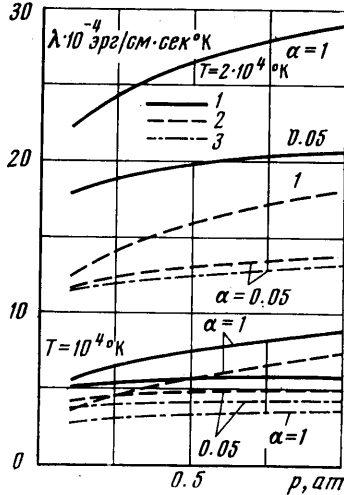
На основе приведенных соотношений были вычислены в широком диапазоне термодинамических параметров коэффициенты переноса в неравновесно ионизованном аргоне.

Основные результаты представлены на фиг. 1–3. На фиг. 1 и 2 кривые 1 соответствуют четвертому приближению коэффициента теплопроводности λ , 2 — второму приближению, 3 — простейшей классической модели.

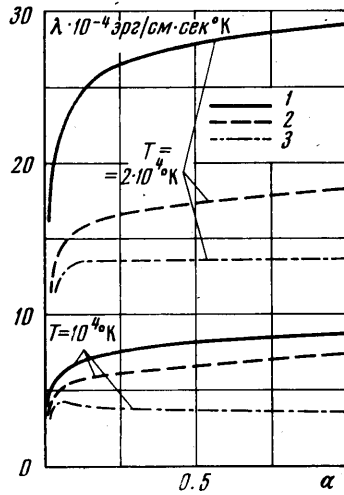
На фиг. 1 приведена зависимость λ от давления при двух значениях температуры ($T = 10^4$ и $2 \cdot 10^4$ °К) и двух степенях ионизации ($\alpha = 0.05$ и 1). При $T = 2 \cdot 10^4$ °К зависимости, рассчитанные по классической модели, для $\alpha = 0.05$ и 1 практически совпадают. Видно, что в отличие от нейтральных газов в данном случае λ зависит от давления как от третьей независимой переменной через поперечные сечения заряженных частиц, а именно через дебаевский радиус. Как показали расчеты, эта зависимость

при высоких температурах оказывается весьма существенной (фиг. 1). Характер изменения λ по мере роста степени ионизации α (при фиксированном давлении $p=1 \text{ ат}$) иллюстрируется фиг. 2. Увеличение концентрации электронов в смеси приводит к резкому возрастанию коэффициента теплопроводности, особенно при высоких температурах.

Коэффициент вязкости, рассчитанный в первом и во втором приближениях, обнаруживает слабую зависимость от давления, что позволяет считать его функцией



Фиг. 1



Фиг. 2

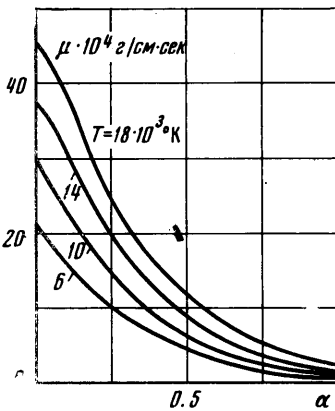
только T и α . При всех температурах μ падает по мере роста степени ионизации (фиг. 3).

Отметим, что область изменения параметров, при которых рассчитаны коэффициенты переноса, ограничена условиями, допускающими введение экранированного кулоновского потенциала для заряженных частиц.

3. Расчет параметров газа в пограничном слое. Уравнения пограничного слоя (1.1), (1.2), (1.10), (1.11) были решены для течения в окрестности передней критической точки сферы радиуса L . Поверхность тела считалась абсолютно каталитической в отношении процесса ионизации, т. е. ставилось условие $\alpha_w = \alpha_E(T_w, p)$.

При расчете пограничного слоя ввиду большой громоздкости вычислений опускались члены, соответствующие амбиполярной термодиффузии. Это допущение впоследствии оценивалось на основе полученных профилей T и α . В наиболее важной пристеночной области из-за низких температур и степеней ионизации эффект термодиффузии на несколько порядков меньше диффузии под действием градиента концентрации (см. табл. IV в работе [2]).

Расчеты показали, что вклад термодиффузии резко возрастает, начиная с $T \sim 10\,000^\circ\text{К}$, однако для приведенного ниже варианта даже в этой области она приблизительно на порядок меньше обычной диффузии. Следует отметить, что при более низких плотностях в пограничном слое указанные эффекты могут оказаться соизмеримыми.

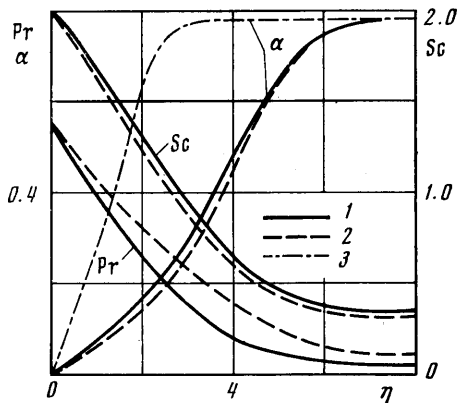


Фиг. 3

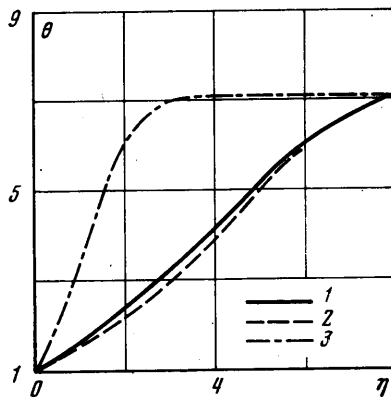
зительно на порядок меньше обычной диффузии. Следует отметить, что при более низких плотностях в пограничном слое указанные эффекты могут оказаться соизмеримыми.

Решение уравнений пограничного слоя производилось методом прогонки с применением итераций. Для сокращения времени вычислений в память машины вводились таблицы коэффициентов переноса, заранее рассчитанных как функции термодинамических параметров, что позволило ограничиться интерполяцией вместо обращения в каждой расчетной точке к громоздким формулам п. 2.

В качестве примера на фиг. 4, 5 приведены профили газодинамических параметров для такого варианта задачи, когда, с одной стороны, уже существенно сказываются неравновесные процессы, а с другой стороны, еще справедлива концепция пограничного слоя ($L=40$ см, $M_\infty=28.9$, $p_\infty=10^{-4}$ ат, $T_\infty=300^\circ$ К, $T_w=2000^\circ$ К). Кривые 1



Фиг. 4



Фиг. 5

соответствуют расчету λ в четвертом приближении $\lambda=[\lambda]_4$ и μ — во втором $\mu=[\mu]_2$, кривые 2 — λ во втором приближении $\lambda=[\lambda]_2$ и μ — в первом $\mu=[\mu]_1$, кривые 3 соответствуют приближению $Pr=Sc=1$.

На фиг. 4 представлены значения чисел Pr и Sc и степени ионизации α в зависимости от переменной η . Значительное уменьшение величин Pr и Sc на внешней границе пограничного слоя по сравнению со значениями в пристеночной области объясняется отмеченным выше характером изменения коэффициентов переноса. Видно, что зависимость числа Pr от номера приближения более существенна, чем зависимость числа Sc .

На фиг. 5 показано распределение безразмерной температуры $\theta=T/T_w$ поперек пограничного слоя. Обращает на себя внимание резкое увеличение толщины пограничного слоя и снижение T и α по сравнению с приближением $Pr=Sc=1$.

В заключение отметим, что, несмотря на сравнительно слабое влияние номера приближения на профили T и α , влияние их на тепловой поток q_w оказывается более существенным. Для рассмотренного случая величины q_w , рассчитанные для значений $[\lambda]_4$ и $[\mu]_2$, $[\lambda]_2$ и $[\mu]_1$, $Pr=Sc=1$, соответственно равно $22.9 \cdot 10^8$, $20.0 \cdot 10^8$ и $9.3 \cdot 10^8$ эрг/см²·сек, т. е. учет коэффициентов переноса в более высоких приближениях приводит к увеличению теплового потока на 13%.

Поступила 18 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Devoto R. S. Transport properties of ionized monatomic gases. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 6.
2. Devoto R. S. Transport coefficients of partially ionized argon. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2.
3. Devoto R. S. Simplified expressions for the transport properties of ionized monatomic gases. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 10.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
5. Гиршфельдер Дж., Кергисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Monchick L. Collision integrals for the exponential repulsive potential. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 6.