

## ТЕПЛООБМЕН ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА С ЖИДКОСТЬЮ

Р. И. НИГМАТУЛИН, Н. С. ХАБЕЕВ

(Москва)

Рассматривается нелинейная задача о тепловом и динамическом взаимодействии одиночного газового пузырька с окружающей жидкостью. С этой задачей связаны исследования течений газожидкостных смесей, в частности распространения ударных волн в таких средах.

Приведены результаты численного решения задачи для различных режимов радиального движения поверхности пузырька. Эти режимы соответствуют, в частности, поведению пузырьков непосредственно за фронтом ударной волны, когда последняя входит в пузырьковую завесу, а также поведению пузырьков, находящихся в глубине пузырьковой завесы, где волна становится размытой.

Аналитические решения линеаризованной задачи теплопроводности при свободных и вынужденных малых гармонических колебаниях газового пузырька в жидкости получены в [1, 2]. Охлаждение пузырька горячего газа в жидкости рассматривалось в [3]. В этой работе, однако, имеются неточности. В частности, при решении предполагается, что плотность газа в пузырьке однородна. Неточно записано расчетное уравнение притока тепла в безразмерных переменных. Однако в рассмотренных в [3] примерах указанные неточности не приводят к существенным ошибкам в численных результатах.

**1. Основные уравнения.** При исследовании процесса радиального движения сферической газовой полости в жидкости можно ввести три характерных времени: время пульсации  $t_v = R_0/v_0$ , где  $R_0$  — характерный размер полости,  $v_0$  — характерная скорость стенок; время выравнивания давления  $t_p = R_0/c_g$ , где  $c_g$  — скорость звука в газе, и время выравнивания температуры  $t_T = R_0^2/a_g$ , где  $a_g$  — коэффициент температуропроводности газа. Однородность давления внутри пузырька имеет место при  $t_p \ll t_v$  или при  $v_0 \ll c_g$ . При этом, если  $t_T \gg t_v$  или  $t_T \ll t_v$ , то поведение газа в пузырьке близко соответственно к адиабатическому или изотермическому. В противном случае ( $t_T \sim t_v$ ) на поведение газа в пузырьке оказывает влияние конечная скорость теплопроводности.

В данной работе предполагаются сохранение сферической симметрии процесса и однородность давления  $p_g(t)$  внутри пузырька. Вместе с тем плотность газа в каждой точке соответствует своей температуре при данном давлении согласно уравнению состояния. Для воздушного пузырька оценки показывают, что  $t_p \ll t_T$ , если  $R_0 \gg 10^{-7}$  м. Таким образом, постановка задачи, предполагающая однородность давления и неоднородность температуры и плотности газа в пузырьке, правомерна в широком диапазоне  $R_0$ , если  $v_0 \ll c_g$ . Здесь не рассматриваются процессы массообмена, эффекты вязкости и сжимаемости жидкости. Приведенные ниже примеры выбраны так, что роль этих эффектов незначительна, чтобы влияние тепловой диссипации проявилось в «чистом» виде. В дальнейшем предполагается рассмотреть эффекты фазовых переходов на границе газ — жидкость.

Принимаем следующие общеизвестные уравнения состояния газа (газ калорически совершенный) и окружающей жидкости (жидкость несжимаемая с постоянной теплоемкостью)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_g &= c_{vg} T_g, & p_g(t) &= (\gamma - 1) c_{vg} \rho_g(r, t) T_g(r, t) \\ u_l &= c_l T_l, & \rho_l &= \text{const} \end{aligned}$$

Здесь  $c_{vg}$  и  $c_l$  — удельные теплоемкости газа (при постоянном объеме) и жидкости,  $\gamma$  — показатель адиабаты газа,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $u$  — соответственно плотность, давление, температура, удельная внутренняя энергия среды. Параметры, относящиеся к газу и жидкости, снабжены соответственно нижними индексами  $g$  и  $l$ .

Из (1.1) и условия гомобаричности внутренняя энергия газа в пузырьке

$$(1.2) \quad E = \int_V c_{vg} T_g \rho_g dV = \frac{p_g V}{\gamma - 1}$$

где  $V$  — объем пузырька. Отсюда с учетом первого начала термодинамики  $dE = dQ - p_g dV$  можно получить уравнение для давления

$$(1.3) \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3(\gamma - 1)}{R} q_R - \frac{3\gamma p_g}{R} \frac{dR}{dt}$$

Динамика радиальных пульсаций задается известным уравнением Рэлея [4]

$$(1.4) \quad R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_g - p_l - 2\sigma/R}{\rho_l}$$

где  $R$  — радиус пузырька,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $p_l$  — давление в жидкости вдали от пузырька,  $q_R$  — поток тепла из пузырька в жидкость.

Задачу удобнее решать в лагранжевых переменных  $(\xi, t)$ , в которых уравнения притока тепла, неразрывности, начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$(1.5) \quad \rho_g c_{pg} \frac{\partial T_g(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\rho_g}{\rho_{g0} \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_g \frac{\rho_g r^4}{\rho_{g0} \xi^2} \frac{\partial T_g(\xi, t)}{\partial \xi} \right) + \frac{dp_g}{dt}$$

$$\partial r / \partial \xi = \rho_{g0} \xi^2 / \rho_g r^2, \quad \xi < R_0$$

$$\rho_l c_l \frac{\partial T_l(\xi, t)}{\partial t} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_l \frac{r^4}{\xi^2} \frac{\partial T_l(\xi, t)}{\partial \xi} \right)$$

$$\partial r / \partial \xi = \xi^2 / r^2, \quad \xi > R_0$$

$$t=0, \quad T=T_0, \quad r=\xi, \quad R=R_0$$

$$\xi=0, \quad r=0, \quad (\partial T / \partial \xi)_{\xi=0}=0$$

$$\xi=R_0, \quad T_g=T_l, \quad \lambda_g \frac{\rho_g R^2}{\rho_{g0} R_0^2} \left( \frac{\partial T_g}{\partial \xi} \right)_{R_0} = \lambda_l \frac{R^2}{R_0^2} \left( \frac{\partial T_l}{\partial \xi} \right)_{R_0} = -q_{R_0}$$

$$\xi=\infty, \quad T_l=T_0$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $c_{pg}$  — теплоемкость газа при постоянном давлении. Нулем внизу отмечены величины, соответствующие начальному состоянию.

**2. Метод расчета.** В случае нелинейных колебаний пузырька решение поставленной задачи можно получить только численно.

В системе координат  $\xi, t$  на оси  $\xi$  возьмем равноотстоящие точки внутри и вне пузырька. Построим систему вложенных сфер с центром в точке  $\xi_1=0$ , что соответствует разбиению систем на  $m+n$  материальных сферических слоев (частиц), причем  $m$  частиц внутри пузырька,  $n$  снаружи.

Предполагая существование достаточно гладкого решения, будем определять значения искомых функций в точках  $\xi=\xi_i$  ( $i=1, 2, \dots, m+n$ ); производные по  $\xi$  заменим разностными отношениями, а в точке  $\xi=R_0$  с учетом граничных условий (1.5) удобно ввести температуру поверхности пузырька  $T_\sigma$ . Тогда граничные условия на поверхности пузырька запишутся следующим образом:

$$(2.1) \quad \xi=R_0, \quad T_g=T_l=T_\sigma$$

$$\lambda_\sigma \frac{\rho_m R^2}{\rho_{g0} R_0^2} \frac{T_\sigma - T_m}{h_g} = \lambda_l \frac{R^2}{R_0^2} \frac{T_{m+1} - T_\sigma}{h_l} = -q_R$$

Здесь  $T_m$  и  $T_{m+1}$  — температуры прилегающих к поверхности пузырька газовой и жидкой частиц,  $\rho_m$  — плотность газовой частицы, прилегающей к поверхности,  $h_g$  и  $h_l$  — параметры, характеризующие разбиение. Так как теплопроводность жидкости значительно меньше теплопроводности газа, шаги по пространственной координате  $\xi$  в газе и жидкости должны удовлетворять условию  $h_l \ll h_g$ . Для дальнейшего удобно ввести индексацию параметров по номеру частицы, опустив индексы  $g$  и  $l$  при параметрах газа и жидкости.

Равенство (2.1) можно использовать для определения температуры поверхности. Из (2.1) видно, что необходимость рассмотрения внешней задачи теплопроводности может возникнуть лишь при сильном пересечении газа в пузырьке, когда  $\rho_m \gg \rho_{g0}$ . В остальных случаях правомерно упрощающее допущение  $T_\sigma = T_0$ , принятое в [1-3], на основании того, что жидкость обладает значительно большей теплопроводностью и значительно меньшей температуропроводностью, чем газ. При учете конечной теплопроводности жидкости граничное условие на бесконечности для уравнения теплопроводности можно сносить на последнюю ячейку жидкости  $T_{m+n} = T_0$ .

Таким образом уравнения (1.5) с частными производными по  $t$  и  $\xi$  перейдут в систему  $(m+n-1)$  обыкновенных дифференциальных уравнений по времени.

Эйлеровы координаты  $r_{i+1/2}$  ( $i=1, 2, \dots, m+n-1$ ), входящие в правые части этих уравнений, можно определять из условия сохранения массы каждой частицы

$$(2.2) \quad \rho_1 r_{1+1/2}^3 = \rho_{g0} \xi_{1+1/2}^3$$

$$\rho_i (r_{i+1/2}^3 - r_{i-1/2}^3) = \rho_{g0} (\xi_{i+1/2}^3 - \xi_{i-1/2}^3), \quad i=2, \dots, m$$

$$r_{i+1/2}^3 - r_{i-1/2}^3 = \xi_{i+1/2}^3 - \xi_{i-1/2}^3, \quad i=m+1, \dots, m+n-1$$

Цепочка равенств (2.2) замыкает систему уравнений. Степень совпадения эйлеровой координаты  $r_{m+1/2}$ , определяемой из цепочки (2.2), с радиусом пузырька, определяемым как решение уравнения Рэлея, характеризует точность выполнения закона сохранения массы газа в пузырьке и может служить для контроля счета.

Для всех функций известны начальные значения. В приведенных ниже примерах предполагается, что до момента возникновения перепада давления система жидкость — газовый пузырек находилась в тепловом и механическом равновесии, хотя это и не принципиально. В результате имеем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Число слоев варьировалось и выбиралось так, чтобы дальнейшее его увеличение практически не влияло на результаты. В практических расчетах учитывалась зависимость коэффициента теплопроводности газа от температуры и давления [3, 5]

$$\lambda_g = \lambda_{g0} + \beta (T_g - T_0) + D \rho_g^\alpha$$

где  $\lambda_{g0}$ ,  $\beta$ ,  $D$ ,  $\alpha$  — постоянные, зависящие от природы газа.

Задача решалась на ЭВМ методом Рунге — Кутты для случая воздушного пузырька в воде при различных размерах и режимах радиального движения пузырька. При этом необходимые параметры воды и теплофизические

физические характеристики воздуха принимались следующими:

$$T_0 = 300^\circ \text{K}, \quad c_l = 4.2 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{сек}^2 \cdot \text{град}, \quad \gamma = 1.4$$

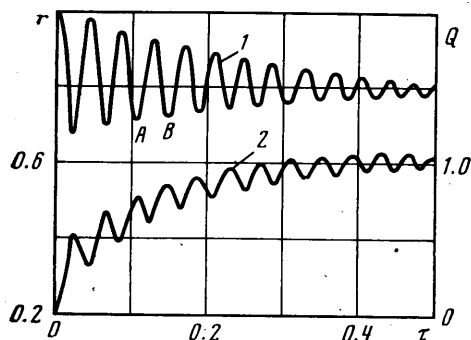
$$\rho_{g0} = 1.29 \text{ кг/м}^3, \quad c_{pg} = 10^3 \text{ м}^2/\text{сек}^2 \cdot \text{град}, \quad \sigma = 0.073 \text{ кг/сек}^2$$

$$\lambda_l = 0.6 \text{ кг} \cdot \text{м/сек}^3 \cdot \text{град}, \quad \lambda_{g0} = 0.0247 \text{ кг} \cdot \text{м/сек}^3 \cdot \text{град}, \quad \alpha = 1.23$$

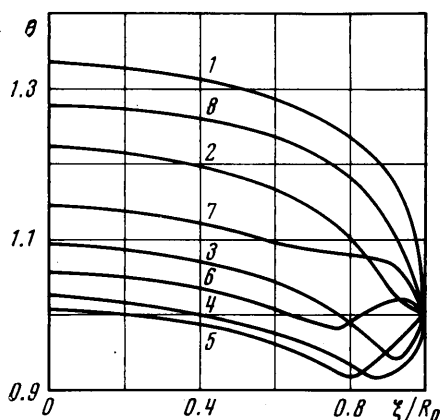
$$\beta = 5.92 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м/сек}^3 \cdot \text{град}^2, \quad D = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4/\text{сек}^3 \cdot \text{град}$$

Предварительно для проверки правильности счета в качестве отладки были проведены расчеты для охлаждения неподвижного твердого шара и для случая малых пульсаций газового пузырька около положения равновесия. Результаты расчетов совпадают с известными аналитическими решениями [2, 6].

Заметим, что условие гомобаричности не только упрощает задачу, но принципиально с точки зрения возможности ее численной реализации на



Фиг. 1



Фиг. 2

современных ЭВМ. Если использовать для расчета уравнение импульса, то шаги по времени и пространственной координате должны быть связаны условием Куранта и для расчета характерных времен тепловых процессов потребовалось бы огромное количество машинного времени.

**3. Результаты расчетов.** Рассматривалась задача о радиальных пульсациях пузырька в жидкости, возникших в результате мгновенного при  $t=0$  повышения давления в жидкости вдали от пузырька с  $p_0$  до  $p_1$ , что, в частности, соответствует поведению газовых пузырьков в начале пузырьковой среды (завесы) при входе в нее ударной волны (скачка). На фиг. 1 для случая  $R_0 = 0.1 \text{ мм}$ ,  $p_0 = 1 \text{ бар}$ ,  $p_1 = 2 \text{ бар}$  приведены полученные зависимости  $r(\tau)$  (кривая 1) и  $Q(\tau)$  (кривая 2)

$$(3.1) \quad Q_1(t) = \int_0^t 4\pi R^2(t') q_R(t') dt', \quad A = c_{pg} \rho_{g0} T_0 R_0^3$$

$$\tau = t/t_r, \quad Q = Q_1/A, \quad r = R/R_0$$

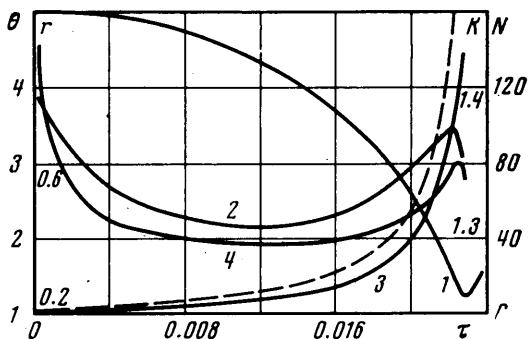
где  $Q_1(\tau)$  — количество тепла, перешедшее из пузырька в жидкость.

Диссипация из-за теплопроводности приводит к затуханию колебаний, и пузырек из начального состояния, характеризуемого параметрами  $R_0$ ,

$p_{10}$ ,  $T_0$  перейдет в состояние с параметрами  $R_1$ ,  $p_1$ ,  $T_0$ , где

$$(3.2) \quad p_{10} = p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}, \quad \frac{R_1}{R_0} = \left( \frac{p_{10}}{p_1} \right)^{1/3}, \quad p_1 = p_i + \frac{2\sigma}{R_1}$$

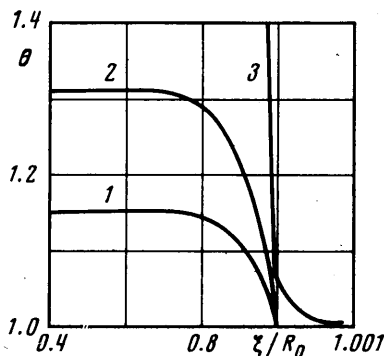
На фиг. 2 представлено характерное распределение температуры ( $\theta = T/T_0$ ) внутри пульсирующего пузырька, где кривые 1 и 8 соответ-



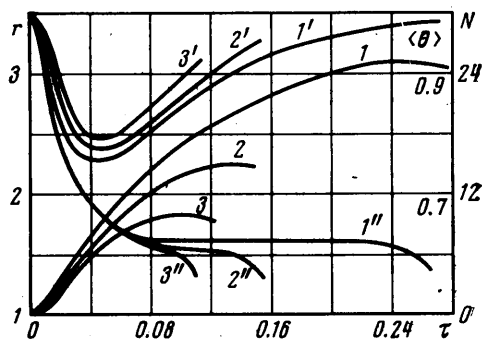
Фиг. 3

вуют двум последовательным моментам максимального сжатия пузырька  $\omega t = 0$  и  $2\pi$ , обозначенным на фиг. 1 точками А и В. Кривые 2–7 соответствуют моментам  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ ,  $3\pi/4$ ,  $\pi$ ,  $5\pi/4$ ,  $3\pi/2$ . Немонотонность кривых, характеризующих локальное распределение температуры газа в пузырьке во времени, объясняется сдвигом фаз между колебаниями радиуса пузырька и тепловым потоком.

Интересно отметить, что в некоторые моменты времени (например, при  $\omega t = \pi/2$ ) тепловой поток направлен внутрь пузырька, хотя средняя температура газа в пузырьке  $\langle T \rangle$  при этом выше температуры жидкости. Это происходит потому, что при сжатии пузырек интенсивно отдает теп-



Фиг. 4



Фиг. 5

ло в жидкость вследствие резкого градиента температуры газа в тонком пристенном слое и хорошего отвода этого тепла жидкостью, а при расширении пузырька теплопроводность «не успевает» компенсировать охлаждение пристенных слоев газа, вызванное расширением.

Результатом проявления тепловых потерь при пульсациях является то, что в момент  $\omega t = 2\pi$  температура газа в пузырьке становится ниже, чем в момент предыдущего максимального сжатия ( $\omega t = 0$ ).

На фиг. 3 приведены кривые зависимостей радиуса пузырька, мгновенного показателя политропы  $k$ , среднemasовой температуры газа и без-

размерного теплового потока  $N$  (числа Нуссельта) (соответственно кривые 1—4)

$$(3.3) \quad k = -\frac{1}{3} \frac{d \ln(p_g/p_0)}{d \ln(R/R_0)}, \quad N = \frac{2Rq_R}{\lambda_g(T_0 - \langle T \rangle)}$$

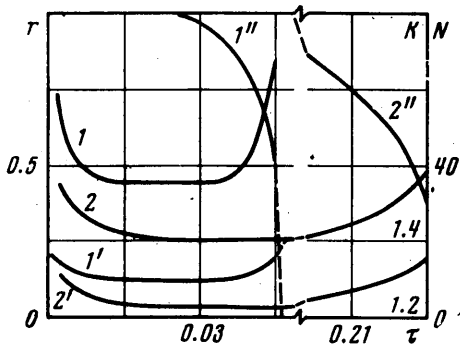
от времени на стадии сжатия пузырька при следующих начальных данных:  $R_0=0,03$  мм,  $p_0=1$  бар,  $p_i=10$  бар. Для сравнения приведена также пунктирная кривая, характеризующая рост температуры газа в пузырьке при адиабатическом сжатии.

На фиг. 4 представлены соответствующие этому варианту кривые, характеризующие локальное распределение температуры газа в пузырьке и окружающей жидкости. Для наглядности пространственный масштаб для жидких частиц сильно увеличен. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $\tau=0,0114$ , 0,0142, 0,0228.

Расчеты показывают, что учет теплопроводности не исключает появления высоких температур в газе при достаточно сильном и быстром сжатии пузырька, что иногда приводит к его свечению [7]. Во время сжатия жидкость совершает работу над содержимым полости. Часть этой энергии в виде тепла переходит обратно в жидкость за счет теплопроводности. При последующем сжатии этот механизм переноса энергии из полости становится менее эффективным из-за возрастания скорости сжатия и сокращения теплообменной поверхности. Этим объясняется рост показателя политропы на заключительной стадии сжатия пузырька.

Рассматривалась также задача о радиальном движении пузырька, возникшем в результате мгновенного в момент  $t=0$  понижения давления в жидкости вдали от пузырька с  $p_0$  до  $p_i$ , что соответствует поведению пузырьков в волне разрежения. На фиг. 5 для случая  $R_0=0,1$  мм,  $p_0=1$  бар и трех интенсивностей разрежения ( $p_i=0,1, 0,2, 0,3$  бар) (кривые 1, 2, 3 соответственно) приведены полученные зависимости радиуса (кривые 1, 2, 3), средней массовой температуры газа (кривые 1', 2', 3') и параметра  $N$  (кривые 1'', 2'', 3'') от времени на стадии расширения. Интересно отметить, что при расширении пузырька средняя температура газа сначала понижается, а затем начинает расти, т. е. непрерывно улучшающийся теплообмен с избытком компенсирует понижение температуры газа, вызванное его расширением. Влияние теплообмена усиливается из-за непрерывного увеличения поверхности пузырька и убывания скорости расширения.

При исследовании структуры ударной волны в жидкости, содержащей пузырьки газа, интерес представляет также изучение поведения содержимого пузырька при заданном законе движения его границы. В случае размытой волны (отсутствия скачка) параметры в начале волны меняются монотонно по экспоненте (как решения уравнений, линеаризованных около равновесного состояния). На фиг. 6 приведены кривые зависимостей безразмерного теплового потока  $N$  (кривые 1, 2) и показателя политропы  $k$  (кривые 1', 2') от времени, когда закон изменения радиуса



Фиг. 6

пузырька описывается формулой

$$(3.4) \quad R = R_0(1 - \delta \exp \omega t), \quad R_0 = 0.1 \text{ мм}, \quad \delta = 10^{-5}$$

Кривые 1 и 2 соответствуют двум значениям показателя экспоненты ( $\omega = 5500$  и  $1100 \text{ сек}^{-1}$ ). Для наглядности приведены также кривые  $r(\tau)$  (кривые 1'', 2''). Из-за резкого возрастания скорости сжатия пузырька и сокращения его поверхности теплообмен затрудняется и на заключительной стадии сжатия значение показателя политропы приближается к  $\gamma$ .

Приведенные примеры показывают значительное влияние межфазного теплообмена в гидромеханике двухфазных сред с пузырьковой структурой.

Поступила 24 V 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman R. B., Plesset M. S.* Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles. Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engr, 1971, vol. 93, No. 3. (Рус. перев.: Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков. Теорет. основы инж. расчетов, 1971, т. 93, № 3.)
2. *Macedo I. C., Yang Wen-Jei.* Acoustically forced oscillations of gas bubbles in liquids, Japan. J. Appl. Phys., 1972, vol. 11, No. 8.
3. *Ивченко В. М., Приходько Н. А., Сирый В. С.* Численное решение задачи охлаждения пузырька горячего газа в жидкости. Гидромеханика, Респ. межвед. сб., 1971, вып. 19.
4. *Rayleigh.* On the pressure developped in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Philos. Mag., Ser. b, 1917, vol. 34, No. 200.
5. *Цедерберг Н. В.* Теплопроводность сжатых газов. Теплоэнергетика, 1957, № 1.
6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
7. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966.