МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1974

УДК 533.924

ВЫВОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ КОНЦЕНТРАЦИЙ, СКОРОСТЕЙ И ТЕМПЕРАТУР КОМПОНЕНТ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ С УЧЕТОМ ПРИСТЕНОЧНЫХ ПАДЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛА

В. В. ГОГОСОВ, И. Н. ЩЕЛЧКОВА

(Москва)

Выписываются граничные условия для концентраций, скоростей и температур компонент частично ионизованной плазмы на электродах и непроводящих стенках, ограничивающих плазму. Учитывается приэлектродное падение электрического потенциала вблизи стенок. Уравнение для определения величины приэлектродного падения потенциала входит в полную систему граничных условий. Проводится упрощение системы граничных условий при различных предположениях относительно параметров плазмы. Рассмотрены примеры граничных условий в некоторых частных случаях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим смесь, состоящую из N сортов заряженных и нейтральных частиц с зарядом e_α и массой m_α. Индексом e обозначаются величины, относящиеся к электронам; индексом i — к ионам; индексом a — к нейтралам; $\alpha=e,\ i,\ a$. Буквой w обозначаются значения величин на стенке; $k,\ l=1,\ 2,\ 3$; $\tau=2,\ 3$.

Обозначим посредством f_α функцию распределения α-й компоненты: $f_\alpha(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\xi})$ — число частиц α-го сорта в единице объема фазового пространства $\mathbf{x},\ \boldsymbol{\xi}$. Пусть n_α — концентрация частиц α-го сорта, $\mathbf{v}_\alpha$ — средняя скорость α-й компоненты, $\mathbf{u}$ — средняя скорость смеси, $\mathbf{V}_\alpha$ — диффузионная скорость, $P_{kl}{}^\alpha$ — тензор напряжений, p_α — давление, T_α — температура и $\mathbf{S}_\alpha$ — поток тепла α-й компоненты. Индекс α будем в дальнейшем опускать, полагая при этом, что написанное может относиться к любой α-й компоненте. Перечисленные параметры выражаются через функцию распределения f_α следующим образом (всюду, где пределы интегрирования не указаны, интегрирование ведется от $-\infty$ до ∞, по одинаковым индексам предполагается суммирование)

(1.1)
$$n=\int f\,d\boldsymbol{\xi},\quad n\mathbf{v}=\int \boldsymbol{\xi} f\,d\boldsymbol{\xi},\quad \mathbf{u}=\frac{\sum\limits_\alpha \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum\limits_\alpha \rho_\alpha},\quad \mathbf{V}=\mathbf{v}-\mathbf{u},\quad \mathbf{c}=\boldsymbol{\xi}-\mathbf{v}$$

$$P_{kl}=m\int c_k c_l f\,d\xi,\quad P_{kk}=3p,\quad p_{kl}=P_{kl}-p\delta_{kl},\quad p=nT,\quad p\pi_{kl}=p_{kl}$$

$$S_k=S_{kll}=m/2\int c_k c^2 f\,d\xi,\quad s=m/2\int \boldsymbol{\xi}\xi^2 f\,d\xi$$

$$s_k=S_k+{}^5/_2 p v_k+p v^2 v_k/\zeta^2+p\,(v_1\pi_{k1}+v_2\pi_{k2}+v_3\pi_{k3}),\quad \zeta^2=2T/m.$$

Иногда вместо скорости $\mathbf{c}$ вводят скорость $\mathbf{c}'=\boldsymbol{\xi}-\mathbf{u}$.

Можно ввести тензор напряжений P_{kl}' и вектор потока тепла $\mathbf{S}'$, давление p', температуру T' и т. д., беря моменты не от $\mathbf{c}$, а от $\mathbf{c}'$. Нетрудно установить связь нештрихованных и штрихованных величин

(1.2)
$$T'=T+1/3mV^2,\quad P_{kl}'=P_{kl}+mnV_kV_l,\quad S_k'=S_k+3/2pV_k+P_{kl}V_l+$$
$$+1/2mnV_kV^2,\quad S_k=S_k'-3/2p'V_k'-P_{kl}'V_l+mnV_kV^2$$

В случае, когда $V^2/\zeta^2 \ll 1$, соотношения (1.2) можно упростить

(1.3)
$$T'=T,\quad p'=p,\quad P_{kl}'=P_{kl},\quad S_k'=S_k+5/2pV_k+p_{kl}V_l$$

Порядок члена $p_{kl} \sim p\tau/t$. Здесь t – характерное время задачи, τ – время между соударениями частиц. Пусть $\pi_{kl} \ll 1$, это эквивалентно неравенству $\tau/t \ll 1$, а все V_k одного порядка, тогда

(1.4)
$$S_k'=S_k+5/2pV_k,\quad S_k=S_k'-5/2p'V_k \equiv h_k$$

Будем раскладывать функцию распределения f по полиномам Эрмита, ограничиваясь 13-моментным приближением

(1.5)
$$f=\frac{n}{\pi^{3/2}\zeta^3}\exp\left(-\frac{c^2}{\zeta^2}\right)\left[1+\pi_{kl}\frac{c_kc_l}{\zeta^2}+\frac{4}{5}\frac{S_kc_k}{p\zeta^4}\left(c^2-\frac{5}{2}\zeta^2\right)\right],\quad \zeta^2=\frac{2T}{m}$$

Макроскопическими параметрами, описывающими α-ю компоненту, при этом будут следующие 13 параметров n, $\mathbf{v}$, T, p_{kl}, $\mathbf{S}$.

Везде в дальнейшем функция распределения будет записываться в виде (1.5), когда все величины определены по относительным скоростям, построенным по средней скорости каждой компоненты.

Суммируя по повторяющимся индексам и учитывая, что $p_{kk}=0$, а $p_{22}=p_{33}=-{}^1/{}_2p_{11}$, функцию распределения (1.5) можно записать в виде

(1.6)
$$f=\frac{n}{\pi^{3/2}\zeta^3}\exp\left(-\frac{c^2}{\zeta^2}\right)\left\{1+\frac{\pi_{11}}{\zeta^2}\left(c_1^2-\frac{c_2^2+c_3^2}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\pi_{12}c_1c_2+\pi_{13}c_1c_3+\pi_{23}c_2c_3}{\zeta^2}+\frac{4}{5}\frac{S_kc_k}{p\zeta^4}\left(c^2-\frac{5}{2}\zeta^2\right)\right\}$$

В дальнейшем понадобится функция, которую, вводя $z=\xi_1+v_1$, $c_2=$ $=\xi_2-v_2$, $c_3=\xi_3-v_3$, удобно записать в виде

(1.7)
$$f(-\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{n}{\pi^{3/2}\zeta^3}\exp\left(-\frac{z^2+c_2^2+c_3^2}{\zeta^2}\right)\left[1+\frac{\pi_{11}}{\zeta^2}\left(z^2-\frac{c_2^2+c_3^2}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-2\frac{\pi_{12}zc_2+\pi_{13}zc_3-\pi_{23}c_2c_3}{\zeta^2}+\frac{4}{5}\frac{-S_1z+S_2c_2+S_3c_3}{p\zeta^4}\left(z^2+c_2^2+c_3^2-\frac{5}{2}\zeta^2\right)\right]$$

Будем считать, что плазма ограничена твердой плоской стенкой $x_1=0$. Явление предполагается стационарным, а все функции — зависящими только от координаты x_1. Обозначим длину свободного пробега посредством l. Вблизи стенки квазинейтральность плазмы может нарушаться, так что около стенки может существовать заряженный слой, толщину которого обозначим буквой r. Будем считать, что внутри области $0 \leqslant x < l$ столкновения частиц отсутствуют. Предположим, что потенциал внутри дебаевского слоя меняется монотонно от потенциала на стенке $\varphi(0)=0$ до потенциала $\varphi(l)$ при $x_1=l$, когда $r>l$, или до потенциала на внешней границе дебаевского слоя $\varphi(r)=\varphi$, когда $r \leqslant l$. В последнем случае вне слоя дебаевского радиуса вплоть до $x_1=l$ потенциал будем считать неизменным.

В дальнейшем будем для определенности рассматривать случай $r \leqslant l$. При этом значение потенциала $\varphi(r)$ будет определяться из написанной системы уравнений. Все написанные ниже формулы будут справедливыми при $r>l$, однако величина потенциала φ, входящая в них, должна определяться из решения уравнения Пуассона вблизи стенки.

Представим функцию распределения α-й компоненты вблизи стенки в виде

$$f=f^+(\xi_1)+f^-(\xi_1);\quad f^+\equiv 0,\quad \xi_1<0;\quad f^-\equiv 0,\quad \xi_1>0 \tag{1.8}$$

Здесь f^- — функция распределения частиц, приходящих к стенке, f^+ — функция распределения частиц, уходящих со стенки.

Частицы, приходящие к стенке из плазмы, могут зеркально отражаться от стенки, а могут абсорбироваться и затем испускаться стенкой с неким распределением. Будем считать, что абсорбированные частицы испускаются стенкой распределенными по Максвеллу с температурой стенки T_w. Предположим, что на стенке при $x_1=0$

$$f^+(x_1=0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\lambda f^-(x_1=0,-\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\Lambda\exp(-\xi^2/\zeta_w^2),\quad \xi_1\geqslant 0 \tag{1.9}$$

Буквой λ обозначена доля частиц, зеркально отразившихся от стенки, Λ — множитель, который в дальнейшем будет определен. Далее будем рассматривать два случая ($e\varphi<0$ и $e\varphi>0$). Выпишем функцию распределения заряженных частиц при $x_1=r$ в этих случаях.

Пусть вначале $e\varphi<0$. При этом заряженные частицы, летящие из плазмы к стенке, замедляются, а от стенки к плазме — ускоряются. Такой режим для электронов обычно имеет место вблизи катода, когда электрическое поле, способствуя эмиссии, вырывает электроны из катода.

Не все частицы, идущие из плазмы к стенке, могут достичь ее, достигают лишь частицы, кинетическая энергия которых $m\xi_1^2/2$ превышает $|e\varphi|$, а модуль скорости $|\xi_1|\geqslant\sqrt{2|e\varphi|/m}\equiv v_\varphi$. Частицы, для которых $|\xi_1|<v_\varphi$, отразятся от потенциального барьера и уйдут обратно в плазму. Это означает, что частицы, у которых на границе $x_1=r$ скорость ξ_1 удовлетворяет неравенству $0\leqslant\xi_1<v_\varphi$,— частицы, которые, летя из плазмы к стенке, отразились от заряженного слоя, не дойдя до стенки. Для них функция распределения равна функции распределения падающих частиц

$$f^+(x_1=r,\xi_1)=f^-(x_1=r,-\xi_1),\quad 0\leqslant\xi_1<v_\varphi \tag{1.10}$$

Частицы, выходящие со стенки, ускоряются. Пусть частица выходит со скоростью $\xi_1\geqslant 0$. Тогда на границе слоя $x_1=r$ ее скорость будет $\xi_1\geqslant v_\varphi$. Легко написать функцию распределения отраженных частиц f^+ на границе слоя $x_1=r$. В самом деле, все частицы, скорость которых $\xi_1\geqslant v_\varphi$, пришли со стенки, где они имели функцию распределения (1.9). Для этих частиц функция распределения f^+ при $x_1=r$ есть

$$f^+(x_1=r,\xi_1)=\lambda f^-(x_1=r,-\xi_1)+\Lambda\exp\left(-\frac{\xi^2}{\zeta_w^2}+\Phi_w\right),\quad \xi_1\geqslant v_\varphi,\quad \Phi_w=\frac{|e\varphi|}{T_w} \tag{1.11}$$

Пусть $e\varphi>0$. Заряженные частицы, летящие из плазмы к стенке, ускоряются, а от стенки к плазме — замедляются. Нетрудно и в этом случае написать выражение для функции распределения отраженных частиц f^+ при $x_1=r$

$$f^+(x_1=r,\xi_1)=\lambda f^-(x_1=r,-\xi_1)+\Lambda\exp\left(-\frac{\xi^2}{\zeta_w^2}-\Phi_w\right),\quad \xi_1\geqslant 0 \tag{1.12}$$

В самом деле, все частицы, составляющая скорости ξ_1 которых при $x_1=r$ больше или равна нулю, пришли со стенки, а значит имели на стенке распределение (1.9), которое и переходит в (1.12) на границе слоя.

Определим параметр Λ. Введем обозначения

$$(1.13)\qquad J_w=\int \xi_1 f(x_1=0)\,d\xi,\quad J_0=\iint d\xi_2\,d\xi_3\int_0^\infty \xi_1 f^+(x_1=0)\,d\xi_1$$

$$\iint d\xi_2\,d\xi_3\int_0^\infty \xi_1 f^-(x_1=0,\,-\xi_1)\,d\xi_1=J_w-J_0$$

Умножив функцию распределения (1.8) при $x_1=0$ на ξ_1, интегрируя от $-\infty$ до ∞, после несложных преобразований и вычислений интегралов с учетом формулы (1.9) получим

$$(1.14)\qquad \Lambda=\frac{2}{\pi\zeta_w^4}\tilde{\Lambda},\qquad \tilde{\Lambda}=\lambda J_w+(1-\lambda)J_0$$

Получение граничных условий состоит в следующем. Будем умножать функцию распределения (1.8), взятую при $x_1=r$, на ξ_1, $m\xi_1\xi_2$, $m\xi_1\xi_3$ и $m\xi_1\xi^2/2$ и интегрировать от $-\infty$ до ∞. Заменяя в полученном выражении f^+ по формулам (1.10), (1.11) при $e\varphi<0$ и (1.12) при $e\varphi>0$, подставляя вместо $f^-(-\xi_1)$ выражение (1.7) и интегрируя от $-\infty$ до ∞, получим формулы, связывающие поток частиц nv_1, тензор вязких напряжений p_{kl} и поток тепла $\mathbf{S}$ с давлением, температурой, потенциалом φ и другими параметрами, характеризующими компоненту. Эти уравнения и будут граничными условиями для концентрации, тангенциальных к стенке составляющих скорости и температуры компоненты на стенке.

Предположение о том, что функция распределения частиц, приходящих к стенке, описывается формулой (1.7), является одним из основных, делающихся в данной работе. Разумеется, такое допущение оправдано лишь в случае, когда отраженные от стенки частицы слабо искажают функцию распределения частиц, приходящих к стенке (см. также работы [15–17]).

Заметим, что поток частиц на стенке $J_w=\mathrm{const}$ не меняется в направлении, перпендикулярном стенке, и равен потоку частиц nv_1 при $x_1=l$, $J_w=nv_1$. Поток частиц со стенки J_0 следует задавать, пользуясь соответствующими выражениями для токов эмиссии со стенки.

2. Вычисление моментов и получение граничных условий. Прежде чем вычислять соответствующие моменты, запишем одно общее соотношение.

Пусть $e\varphi<0$. Умножим функцию распределения f при $x_1=r$ на нечетную функцию $\chi(\xi_1)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до ∞. Воспользовавшись соотношениями (1.10), (1.11), (1.14), получим

$$(2.1)\qquad \int\chi(\xi_1)f\,d\xi=(\lambda-1)\iint d\xi_2\,d\xi_3\int_{v\varphi}^\infty \chi(\xi_1)f^-(-\xi_1)\,d\xi_1+$$

$$+\frac{2}{\pi\zeta_w^4}[\lambda J_w+(1-\lambda)J_0]\exp\left(-\frac{e\varphi}{T_w}\right)\iint d\xi_2\,d\xi_3\int_{v\varphi}^\infty \chi(\xi_1)\exp\left(-\frac{\xi^2}{\zeta_w^2}\right)d\xi_1$$

Уравнения для потока частиц. Подставим в формулу (2.1) вместо $\chi(\xi_1)$ величину ξ_1, а вместо $f^-(-\xi_1)$ — разложение (1.7). Вычисляя входящие в правую часть интегралы и заменяя левую часть с помощью (1.1), получим уравнение для потока частиц

$$(2.2)\qquad nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{\zeta^2}\right)\left[1+\pi_{11}\left(\frac{1}{2}+\frac{wv_\varphi}{\zeta^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2S_1}{5p\zeta}\left(\frac{v_1}{\zeta}+\frac{2w^2v_\varphi}{\zeta^3}\right)\right]-(\lambda-1)\frac{nv_1}{2}\left(1-\mathrm{erf}\,\frac{w}{\zeta}\right)+\tilde{\Lambda},\qquad w=v_1+v_\varphi$$

Легко записать аналогичное условие для потока частиц в случае, когда $e\varphi>0$. Для этого в исходной формуле (2.1) нужно положить $v_\varphi=0$. В формуле (2.2) следует положить $v_\varphi=0$ и в последнем члене правой части дописать множитель $\exp(-\Phi_w)$. Окончательно условие для потока частиц в случае, когда $e\varphi>0$, примет вид

$$nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{v_1^2}{\zeta^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\pi_{11}-\frac{2S_1v_1}{5p\zeta^2}\right)-
-(\lambda-1)\frac{nv_1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{v_1}{\zeta}\right)+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w) \tag{2.3}$$

Произведение nv_1 — левая часть уравнений (2.2), (2.3) — есть нормальная к стенке составляющая плотности потока частиц исследуемой компоненты. На эти уравнения можно смотреть, как на соотношения, связывающие входящие в них параметры не на внешней границе дебаевского слоя, где они и получены, а на самой стенке. В этом смысле уравнения (2.2), (2.3) будут граничными условиями. На внешней границе дебаевского слоя плазму можно считать квазинейтральной $n_e=n_i=n$. При этом условия (2.2), (2.3) будут граничными условиями для концентрации n и соотношением для определения пристеночного скачка потенциала φ.

Уравнения для потока тангенциальной составляющей импульса. Пусть в формуле (2.1) функция $\chi(\xi_1)=m\xi_1\xi_\tau$, $\tau=2,3$. Левая часть уравнения (2.1) при этом есть проекция на нормаль к стенке плотности потока тангенциальной составляющей импульса. С помощью формул (1.1) можно записать

$$\int m\xi_1\xi_\tau f\,d\xi=P_{1\tau}+mnv_1v_\tau$$

Заменяя функцию распределения $f^-(-\xi_1)$ выражением (1.7), после вычисления интегралов получим

$$\pi_{1\tau}+\frac{2v_1v_\tau}{\zeta^2}=\frac{\lambda-1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{v_\tau}{\zeta}\left(1+\frac{1}{2}\pi_{11}\right)+\frac{v_\varphi}{\zeta}\left[\frac{v_1v_\tau}{\zeta^2}-\pi_{1\tau}-\frac{4S_1v_\tau w^2}{5p\zeta^4}+\right.\right.
\left.\left.+\frac{2S_\tau w}{5p\zeta^2}\right]-\frac{2S_1v_1v_\tau}{5p\zeta^3}+\frac{S_\tau}{5p\zeta}\right\}\exp\left(-\frac{w^2}{\zeta^2}\right)-
-\frac{\lambda-1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{w}{\zeta}\right)\left(\pi_{1\tau}+\frac{2v_1v_\tau}{\zeta^2}\right) \tag{2.4}$$

Полученное уравнение — граничное условие для составляющей скорости v_τ на стенке. В это условие войдут производные от v_2 (или v_3) по x_1 (в членах с $\pi_{1\tau}$). Легко получить соответствующие условия на v_τ, когда $e\varphi>0$. Для этого нужно в формуле (2.4) положить $v_\varphi=0$ $(w=v_1)$

$$\pi_{1\tau}+\frac{2v_1v_\tau}{\zeta^2}=\frac{\lambda-1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{v_\tau}{\zeta}\left(1+\frac{1}{2}\pi_{11}\right)-\frac{2S_1v_1v_\tau}{5p\zeta^3}+\right.
\left.+\frac{S_\tau}{5p\zeta}\right\}\exp\left(-\frac{v_1^2}{\zeta^2}\right)-\frac{\lambda-1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{v_1}{\zeta}\right)\left(\pi_{1\tau}+\frac{2v_1v_\tau}{\zeta^2}\right) \tag{2.5}$$

Уравнения для потока энергии. Положим в формуле (2.1) $\chi(\xi_1)=m\xi_1\xi^2/2$. Левая часть уравнения при этом — нормальная к стенке проекция плотности потока кинетической энергии. С помощью формул (1.1) можно записать

$$\frac{m}{2}\int\xi_1\xi^2f\,d\xi=S_1+\frac{5}{2}pv_1+pv_1\frac{v^2}{\zeta^2}+p(v_1\pi_{11}+v_2\pi_{12}+v_3\pi_{13})$$

Заменяя функцию распределения $f^-(-\xi_1)$ выражением (1.7), после вычисления интегралов получим

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad & S_1+\frac{5}{2}pv_1+pv_1\frac{v^2}{\zeta^2}+p(v_1\pi_{11}+v_2\pi_{12}+v_3\pi_{13})=\\
&=(\lambda-1)\frac{p\zeta}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{\zeta^2}\right)\left\{1+\frac{w^2+v_2^2+v_3^2}{2\zeta^2}-\frac{3}{2}\frac{v_1v_\varphi}{\zeta^2}+\right.\\
&+\pi_{11}\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{wv_\varphi}{2\zeta^2}\right)\frac{v_2^2+v_3^2}{\zeta^2}+\frac{1}{2}\frac{wv_\varphi^3}{\zeta^4}+\frac{3}{4}\frac{v_\varphi^2}{\zeta^2}\right]-\\
&-(v_2\pi_{12}+v_3\pi_{13})\frac{v_\varphi}{\zeta^2}-\frac{S_1}{5p\zeta}\left[\frac{v_1+5v_\varphi}{\zeta}+\frac{2v_1^2v_\varphi+7v_1v_\varphi^2+4v_\varphi^3}{\zeta^3}+\right.\\
&\left.+\frac{2w^2v_\varphi^3}{\zeta^5}+\frac{v_2^2+v_3^2}{\zeta^2}\left(\frac{v_1}{\zeta}+\frac{2w^2v_\varphi}{\zeta^3}\right)\right]+\\
&\left.+\frac{S_2v_2+S_3v_3}{5p\zeta^2}\left(1+\frac{2wv_\varphi}{\zeta^2}\right)\right\}-\\
&-\frac{\lambda-1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{w}{\zeta}\right)\left[S_1+\frac{5}{2}pv_1+pv_1\frac{v^2}{r^2}+p(v_1\pi_{11}+\right.\\
&\left.+v_2\pi_{12}+v_3\pi_{13})\right]+\tilde{\Lambda}(2T_w+|e\varphi|),\qquad w=v_1+v_\varphi
\end{aligned}
$$

Уравнение (2.6) может служить граничным условием для температуры рассматриваемой компоненты на твердой стенке. Для получения соответствующего граничного условия при $e\varphi>0$ нужно положить в формуле (2.6) $\varphi=0$, $v_\varphi=0$, а в последнем члене, описывающем поток энергии из стенки, дописать множитель $\exp(-\Phi_w)$.

В уравнение (2.6) входят тепловые потоки S_2 и S_3. Они могут быть исключены вычитанием из уравнения (2.6) уравнения (2.4), $\tau=2$, умноженного на v_2, и уравнения (2.4), $\tau=3$, умноженного на v_3. В результате будем иметь

В случае $e\varphi<0$

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & S_1+\frac{5}{2}pv_1+\frac{pv_1}{\zeta^2}(v_1^2-v_2^2-v_3^2)+pv_1\pi_{11}=(\lambda-1)\frac{p\zeta}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{\zeta^2}\right)\times\\
&\times\left\{1+\frac{w^2-v_2^2-v_3^2}{2\zeta^2}-\frac{3}{2}\frac{v_1v_\varphi}{\zeta^2}-\frac{v_1v_\varphi}{\zeta^4}(v_2^2+v_3^2)+\right.\\
&+\pi_{11}\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}-\frac{wv_\varphi}{2\zeta^2}\right)\frac{v_2^2+v_3^2}{\zeta^2}+\frac{3}{4}\frac{v_\varphi^2}{\zeta^2}+\frac{1}{2}\frac{wv_\varphi^3}{\zeta^4}\right]-\\
&\left.-\frac{S_1}{5p\zeta}\left[\frac{v_1+5v_\varphi}{\zeta}+\frac{2v_1^2v_\varphi+7v_1v_\varphi^2+4v_\varphi^3}{\zeta^3}+\frac{2w^2v_\varphi^3}{\zeta^5}\right]\right\}-\\
&-\frac{\lambda-1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{w}{\zeta}\right)\left[S_1+\frac{5}{2}pv_1+\frac{pv_1}{\zeta^2}(v_1^2-v_2^2-v_3^2)+pv_1\pi_{11}\right]+\\
&+\tilde{\Lambda}(2T_w+|e\varphi|)
\end{aligned}
$$

В случае $e\varphi>0$

$$
(2.8)\qquad S_1+\frac{5}{2}pv_1+\frac{pv_1}{\zeta^2}(v_1^2-v_2^2-v_3^2)+pv_1\pi_{11}=
$$

$$=(\lambda-1)\frac{p\zeta}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{v_1^2}{\zeta^2}\right)\left\{1+\frac{v_1^2-v_2^2-v_3^2}{2\zeta^2}+\right.$$

$$\left.+\pi_{11}\left(\frac{3}{4}-\frac{v_2^2+v_3^2}{4\zeta^2}\right)-\frac{S_1v_1}{5p\zeta^2}\right\}-\frac{\lambda-1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{v_1}{\zeta}\right)\times$$

$$\times\left[S_1+\frac{5}{2}pv_1+\frac{pv_1}{\zeta^2}(v_1^2-v_2^2-v_3^2)+pv_1\pi_{11}\right]+\tilde{\lambda}\exp(-\Phi_w)2T_w$$

Условия для нейтральных частиц отличаются от условий (2.3), (2.5), (2.8) лишь тем, что множитель $\exp(-\Phi_w)$ при потоках отраженных частиц отсутствует. В самом деле для нейтральных частиц заряд $e_\alpha=0$.

При выводе уравнений (2.2) – (2.8) использовался предложенный в [1] способ получения граничных условий на твердой стенке для температур и тангенциальной составляющей скорости однокомпонентного одноатомного газа. В работе [1] предполагалось, что составляющая средней скорости в направлении, перпендикулярном стенке, равна нулю.

Обобщение работы [1] на случай, когда составляющая средней скорости, перпендикулярная границе, не равна нулю, сделано в работе [2]. В работе [3] способ Грэда использовался для написания граничных условий для смесей одноатомных газов.

Граничные условия для концентраций частиц (электронов и ионов) и электронной температуры на контакте плазмы с электродами в плазменном термоэлементе выписывались в работах [4–6]. При этом предполагалось, что функция распределения каждой компоненты вблизи поверхности чисто максвелловская, не сдвинутая относительно средней скорости компоненты. Выписывались потоки электронов и ионов, поток энергии электронов из плазмы на электрод и из электродов в плазму с учетом того, что часть частиц может отражаться или замедляться в приэлектродном слое. Разница этих потоков приравнивалась полному электронному току и потоку энергии электронов на электрод соответственно. При этом предполагалось, что поток энергии на электрод равен потоку энергии за счет теплопроводности и переносу энергии электронов электронным током, этот перенос выбирался равным $2n_ev_{1e}T_e$.

Однако известно, что в частично ионизованной плазме поток тепла равен сумме трех членов [7]: потока тепла, связанного с теплопроводностью (учтен в работах [4–6]), потока тепла, переносимого током (лишь часть его учтена в работах [4–6]), и потока тепла, связанного с проскальзыванием (не учтен в этих работах). Последние члены могут быть важны. В названных работах возможен случай течения, когда средняя скорость электронной или ионной компоненты порядка тепловой (эмиссия электронов или ионов со стенки равна нулю), однако при выводе соотношений предполагалось, что средняя скорость электронной и ионной компонент меньше тепловой.

В работе [8] обобщаются условия, полученные в работах [5, 6] с использованием способа Грэда. Плазма предполагается покоящейся – средняя скорость смеси равна нулю. Функция распределения для электронов, ионов и нейтралов выбирается 20-моментная (относительно максвелловской, не сдвинутой на среднюю скорость компонент). При такой записи часть функции распределения, соответствующая 13 моментам, может быть получена из более общей функции распределения, используемой в данной работе, при условии, что $(v_1/\zeta)^2\ll1$, $v_2=v_3=0$, если, кроме того, произведением отношения v_1/ζ на потоки тепла и тензор вязких напряжений соответствующей компоненты можно пренебречь. В работе [8] при написании граничных условий берутся моменты относительно ξ_1, $\xi_1(m\xi^2/2+e\varphi)$, ξ_1^3. Однако уравнение, получаемое при вычислении момента s_{11} относительно ξ_1^3, лишнее. Из него можно было бы определить величину этого момента на стенке, но в работе полагается при $n_e=n_i$ $s_{11}=0$, так что это уравнение будет противоречить параметрам, найденным при помощи первых двух условий. Граничное условие для скорости в работе не вычислялось.

В работе [9] выписывается граничное условие для тангенциальной составляющей скорости смеси электронов и ионов вблизи твердой стенки, около которой находится слой заряженных частиц. Показано, что граничное условие для тангенциальной составляющей скорости смеси похоже на граничное условие для скорости в разреженном газе.

В работах [10–13] (см. также работы, указанные в обзоре [11]) составлялся баланс потоков частиц электронов и ионов на электрод. Использовалась максвелловская функция распределения. При этом в работах [10, 11] из написанных уравнений вычислялось падение потенциала вблизи стенок и строилась вольт-амперная характеристика при заданной температуре и концентрации компонент. В работах [12, 13] эти уравнения использовались не только для определения падения потенциалов вблизи зонда, но и как граничные условия для концентраций электронов и ионов, когда эмиссией ионов можно пренебречь. Температура плазмы предполагалась в работах [10–13] постоянной.

В работе [14] решалась задача о пограничном слое на непроводящей стенке МГД генератора. Предполагалось, что концентрации электронов и ионов всюду в канале, в том числе вблизи стенки, описываются уравнением Саха, а все частицы, пришедшие на стенку, гибнут на ней ($J_{e0}=J_{i0}=0$); ток $\mathbf{j}$ полагался равным нулю. При написании граничного условия для температуры электронов полный поток тепла на стенку выбирался равным потоку тепла лишь за счет теплопроводности, что, вообще говоря, неверно, так как при этом не учитываются поток энергии, связанный с переносом энтальпии электронов, и зависимость теплового потока от диффузии. Потоки электронов и ионов на стенку вычислялись в предположении, что функция распределения максвелловская. Отметим также, вообще говоря, противоречивость предположения о том, что все электроны и ионы гибнут на стенке с предположением, что концентрация электронов и ионов определяется уравнением Саха на стенке. Ясно, что вблизи стенки существует слой, в котором эти предположения не верны (толщина этого слоя в работе не оценивается). Учет всех граничных условий может существенно изменить концентрацию электронов вблизи стенки и все результаты работы [14].

Влияние отклонения функции распределения вблизи стенки от максвелловской, связанное с гибелью и рождением частиц на стенке, на величину потока частиц к стенке, входящего в граничное условие для концентраций, исследовалось в работах [15–17].

3. Упрощение граничных условий. Уравнения (2.2)—(2.5), (2.7), (2.8), полученные в п. 2, весьма громоздкие, что естественно, поскольку эти уравнения могут служить граничными условиями и в случае, когда длина свободного пробега сравнима с характерным размером системы, а средняя скорость каждой компоненты и приэлектродные падения потенциалов произвольны. В некоторых частных случаях эти граничные условия могут быть упрощены.

Упростим вначале уравнение для потока частиц (2.2), когда $e\varphi<0$. Правая часть уравнения (2.2) есть сумма: 1) потока частиц, равного Λ летящих от стенки, отразившихся от стенки диффузно; 2) потока частиц, летящих от стенки, отразившихся от стенки зеркально — остальные члены правой части с множителем λ; 3) потока частиц, летящих к стенке, которые могут преодолеть потенциальный барьер и дойти до стенки.

Выражения π_{11} и S_1 определены по средней скорости каждой компоненты — формулы (1.1). Выражения для тензора вязких напряжений p_{kl} и потока тепла $\mathbf{S}$ приведены для полностью ионизованной плазмы в [18], для частично ионизованной плазмы с разными температурами компонент — в [7, 19, 20]. При этом в работах [7, 19] приведены выражения для p_{kl}' и $\mathbf{S}'$, которые определены по средней скорости смеси. Связь штрихованных и нештрихованных величин дается формулами (1.2) — (1.4). Особенно простая связь, когда $V^2/\zeta^2\ll1$ и $\tau/t\ll1$.

Приведенный поток тепла для каждой компоненты $\mathbf{h}=\mathbf{S}'-5p'\mathbf{V}/2$ в случае частично ионизованной плазмы связан с теплопроводностью, электрическим током и проскальзыванием $\mathbf{h}=\mathbf{h}^t+\mathbf{h}^j+\mathbf{h}^s$. Когда $\tau/t\ll1$, $V_k^2/\zeta^2\ll1$, величина $\mathbf{h}=\mathbf{S}$ (формула (1.4)). Выражения для $\mathbf{h}^t$, $\mathbf{h}^j$, $\mathbf{h}^s$, полученные в работах [7, 19], могут быть записаны в виде (для упрощения формул анизотропией коэффициентов переноса в магнитном поле в данной работе пренебрегается)

$$\mathbf{h}^t=-\varkappa\nabla T,\ \mathbf{h}^j=-\chi\mathbf{j},\ \mathbf{h}^s=-\mu(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_a)$$

Вид коэффициентов $\varkappa$, χ, μ приведен в названных выше работах. Используя выражения для этих коэффициентов, можно оценить порядок членов в отношении

$$\frac{2S_1v_1}{5p\zeta^2}=\frac{2v_1}{5p\zeta^2}(h_1{}^t+h_1{}^j+h_1{}^s)$$

Так, для электронов будем иметь

$$\frac{|h_{1e}{}^{t}|}{p_e\zeta_e}\sim\frac{l_e}{L}\qquad\frac{|h_{1e}{}^{j}|}{p_e\zeta_e}\sim\frac{|v_{1e}-v_{1i}|}{\zeta_e}\qquad\frac{|h_{1e}{}^{s}|}{p_e\zeta_e}\sim\frac{|v_{1i}-v_{1a}|}{\zeta_e}$$

Аналогично можно оценить порядок произведения $2S_1/5p\zeta$ на второе слагаемое в квадратных скобках. Так, если порядок S_1 определяется теплопроводностью, для $v_1\leqslant v_\varphi$ получим

$$\frac{|S_1|v_\varphi{}^3}{p\zeta^4}\sim\frac{l}{L}\Phi^{3/2},\qquad \Phi=\frac{|e\varphi|}{T}$$

Оценим порядок членов с множителем π_{11} в уравнении (2.2)

$$|\pi_{11}|\sim\frac{\tau}{t},\qquad |\pi_{11}|\frac{|v_1|v_\varphi}{\zeta^2}\sim\frac{\tau}{t}\frac{|v_1|}{\zeta}\sqrt{\Phi},\qquad |\pi_{11}|\frac{v_\varphi{}^2}{\zeta^2}\sim\frac{\tau}{t}\Phi$$

Пользуясь такого типа оценками, легко выписать критерии, когда членами, содержащими π_{11}, S_1, в уравнении (2.2) можно пренебречь. Опуская эти члены, для $|v_1|\ll v_\varphi$ получим

$$nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)-(\lambda-1)\frac{nv_1}{2}(1-\operatorname{erf}\sqrt{\Phi})+\tilde{\Lambda}\tag{3.1}$$

Выпишем для сравнения уравнения для потока частиц, когда функция распределения этих частиц не есть 13-моментное разложение. Так, если функция распределения для падающих частиц максвелловская, сдвинутая на v, то уравнение для потока частиц при $e\varphi<0$ запишется в виде

$$nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{\zeta^2}\right)-(\lambda-1)\frac{nv_1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{w}{\zeta}\right)+\tilde{\Lambda}\tag{3.2}$$

Это уравнение получено из условия (2.2), полагая $\pi_{11}=S_1=0$. Если при этом $|v_1|\ll v_\varphi$, то уравнение (3.2) совпадает с уравнением (3.1). Наконец, если предположить для частиц, летящих из плазмы на стенку, чисто максвелловское распределение, не сдвинутое относительно какой-либо скорости, то для потока частиц получим уравнение

$$nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)+\tilde{\Lambda}\tag{3.3}$$

Рассмотрим граничное условие (2.3) на потоки частиц в случае $e\varphi>0$ (частицы, летящие к стенке, ускоряются). Порядок членов, стоящих в фигурных скобках, выписывался выше. В случае, когда членами с вязкостью π_{11} и тепловым потоком S_1 можно пренебречь, а $v_1{}^2/\zeta^2\ll1$, уравнение (2.3) примет вид

$$nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}-(\lambda-1)\frac{nv_1}{2}+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w)\tag{3.4}$$

В случае, когда $\tau/t\ll1$, а $v_1{}^2/\zeta^2\sim1$, в уравнении (2.3) следует выбрасывать члены с π_{11} и часть теплового потока, связанную с теплопроводностью. Остальные члены в тепловом потоке должны быть оставлены, но выражение для них нельзя брать из работ [7, 19], так как в этих работах существенно использовалось, что $v_1{}^2/\zeta^2\ll1$.

В случае, когда из плазмы приходят частицы со сдвинутым на v максвелловским распределением, уравнение для потока частиц примет вид (при этом в уравнении (2.3) нужно положить $\pi_{11}=S_1=0$)

$$nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{v_1{}^2}{\zeta^2}\right)-(\lambda-1)\frac{nv_1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{v_1}{\zeta}\right)+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w)\tag{3.5}$$

Если же из плазмы идут частицы с чисто максвелловским распределением, то уравнение для потока частиц будет иметь вид

$$(3.6)\qquad nv_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w)$$

Уравнения, используемые в работах [4–6, 12, 13] в качестве граничных условий для концентраций, следуют из формул (3.3), (3.6) при $\lambda=0$. Рассмотрим граничное условие на тангенциальную к стенке составляющую скорости в случае $e\varphi<0$ (уравнение (2.4)). Если предположить, что частицы приходят из плазмы на стенку со сдвинутым на v максвелловским распределением, то надо положить в правой части (2.4) $\pi_{11}=\pi_{1\tau}=S_1=S_\tau=0$. Если при этом выполняются критерии $|v_1|\ll v_\varphi$, $|v_1|\Phi^{1/2}/\zeta\ll 1$, $\Phi\gg 1$, $(1-\mathrm{erf}\, w/\zeta)\ll 1$, то уравнение (2.4) запишется в виде

$$(3.7)\qquad \pi_{1\tau}+\frac{2v_1v_\tau}{\zeta^2}=\frac{\lambda-1}{\sqrt{\pi}}\frac{v_\tau}{\zeta}\exp(-\Phi)$$

Если же $|v_1|/\zeta\ll|\lambda-1||v_1|\exp(-\Phi)/\zeta\sqrt{\pi}$, тогда условие (3.7) примет вид

$$(3.8)\qquad \frac{\sqrt{\pi}\,\eta\zeta}{p}\exp\Phi\frac{\partial v_\tau}{\partial x_1}=(1-\lambda)v_\tau$$

Отношение $\sqrt{\pi}\eta\zeta/p\sim l$ – длина свободного пробега компоненты [7]. Пусть $\lambda=1$ – зеркальное отражение, тогда $\partial v_\tau/\partial x_1=0$. Если же $\lambda\neq 1$, то условие (3.8) аналогично соответствующему условию в газовой динамике разреженных газов, причем средняя длина свободного пробега возросла в $\exp\Phi$ раз. Когда $l\exp\Phi$ мало, условие (3.8) переходит в обычное граничное условие для скорости в газовой динамике $v_\tau=0$.

Упростим условие для касательных составляющих скоростей в случае $e\varphi>0$ (формула (2.5)). Предположим, что в правой части уравнения (2.5) можно пренебречь членами с вязкостью π_{11} и тепловыми потоками S_1 и S_τ; пусть также $|v_1|/\zeta\ll 1$. При этом уравнение (2.5) примет вид

$$(3.9)\qquad \frac{\eta\zeta}{p}\frac{\partial v_\tau}{\partial x_1}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}v_\tau$$

Для достаточно малых l получим условие прилипания $v_\tau=0$.

Упростим уравнение (2.7) для потока энергии при $e\varphi<0$. Полагая $|v_1|/v_\varphi\ll 1$, $v_k^2/\zeta^2\ll 1$, $\tau/t\ll 1$, $\tau\Phi/t\ll 1$, $\tau\Phi^2/t\ll 1$, это уравнение можно записать в виде

$$(3.10)\qquad \left(S_1+\frac{5}{2}pv_1\right)\left(\frac{1+\lambda}{2}+\frac{1-\lambda}{2}\mathrm{erf}\sqrt{\Phi}\right)+$$

$$+\frac{\lambda-1}{5\sqrt{\pi}}S_1[5\Phi^{1/2}+4\Phi^{3/2}+2\Phi^{5/2}]\exp(-\Phi)=$$

$$=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)(2T+|e\varphi|)+\tilde{\Lambda}(2T_w+|e\varphi|)$$

$$\max\frac{5\Phi^{1/2}+4\Phi^{3/2}+2\Phi^{5/2}}{5\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)\approx 0.4\qquad(\Phi=1{,}5)$$

В случае, когда из плазмы на стенку частицы приходят со сдвинутым на $\mathbf{v}$ максвелловским распределением, уравнение для потока энергии на стенку примет вид

$$s_1=(\lambda-1)\frac{p\zeta}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{\zeta^2}\right)\left\{1+\frac{w^2+v_2^2+v_3^2}{2\zeta^2}-\frac{3v_1v_\varphi}{2\zeta^2}\right\}-$$
$$-\frac{\lambda-1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{w}{\zeta}\right)pv_1\left(\frac{5}{2}+\frac{v^2}{\zeta^2}\right)+\tilde{\Lambda}(2T_w+|e\varphi|). \tag{3.11}$$

$$s_1=\frac{m}{2}\int\xi_1\xi^2f\,d\xi$$

Связь s_1 с другими параметрами среды показывается последней формулой (1.1). Если $v_k^2\ll\zeta^2$, $p|v_k\pi_{1k}|\ll\max\{|S_1|,\ p|v_1|\}$, то формула (1.1) запишется в виде

$$s_k=S_k+{}^5/_2pv_k$$

Предположим, что $s_1=S_1+5pv_1/2$, $|v_1|/v_\varphi\ll1$, $v_k^2/\zeta^2\ll1$, тогда уравнение (3.11) можно записать в виде

$$S_1+\frac{5}{2}pv_1\left(\frac{1+\lambda}{2}+\frac{1-\lambda}{2}\operatorname{erf}\sqrt{\Phi}\right)=$$
$$=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)(2T+|e\varphi|)+\tilde{\Lambda}(2T_w+|e\varphi|) \tag{3.12}$$

Если из плазмы частицы летят с чисто максвелловским распределением, то условие на потоки энергии будет иметь вид

$$s_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)(2T+|e\varphi|)+\tilde{\Lambda}(2T_w+|e\varphi|) \tag{3.13}$$

Уравнения, используемые в работах [5, 6, 14] в качестве граничных условий для температуры электронов, следуют из формулы (3.13) при $\lambda=0$. Условия (3.12) и (3.13) совпадают, если $\Phi\gg1$ ($\operatorname{erf}\sqrt{\Phi}\approx1$) и $s_1=S_1+5pv_1/2$.

Упростим уравнение для потока энергии в случае $e\varphi>0$, уравнение (2.8). Полагая $v_k^2/\zeta^2\ll1$, $|v_1S_1|/p\zeta^2\ll1$, $\pi_{11}\ll1$, можно пренебречь всеми членами в фигурных скобках по сравнению с единицей; уравнение (2.8) примет вид

$$\left(S_1+\frac{5}{2}pv_1\right)\left(\frac{\lambda+1}{2}+\frac{1-\lambda}{2}\operatorname{erf}\frac{v_1}{\zeta}\right)=$$
$$=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{\sqrt{\pi}}T+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w)2T_w \tag{3.14}$$

Если рассматривать сдвинутое максвелловское распределение для частиц, летящих из плазмы, то уравнение для потока энергии примет вид

$$s_1=(\lambda-1)\frac{p\zeta}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{v_1^2}{\zeta^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2\zeta^2}\right)-$$
$$-\frac{\lambda-1}{2}pv_1\left(1-\operatorname{erf}\frac{v_1}{\zeta}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{v^2}{\zeta^2}\right)+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w)2T_w \tag{3.15}$$

Если $v^2/\zeta^2\ll1$, $s_1=S_1+5pv_1/2$, то уравнение (3.15) упростится

$$S_1+\frac{5}{2}pv_1\left(\frac{1+\lambda}{2}+\frac{1-\lambda}{2}\operatorname{erf}\frac{v_1}{\zeta}\right)=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{\sqrt{\pi}}T+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w)2T_w$$

В случае чисто максвелловского распределения частиц, летящих из плазмы, уравнение для потока энергии примет вид

$$s_1=(\lambda-1)\frac{n\zeta}{\sqrt{\pi}}T+\tilde{\Lambda}\exp(-\Phi_w)2T_w \tag{3.16}$$

Нетрудно выяснить физический смысл выписанных условий на потоки энергии. Рассмотрим для определенности уравнение (3.13), $e\varphi<0$. Пусть $\lambda=0$. При этом в правой части уравнения стоит сумма потока кинетической энергии через сечение $x_1=r$ по направлению к стенке и потока кинетической энергии через то же сечение в направлении от стенки. Первый поток есть $-n\zeta\exp(-\Phi)(2T+|e\varphi|)/2\sqrt{\pi}$. Здесь $2T+|e\varphi|$ — средняя кинетическая энергия частиц, проходящих через единицу площади поверхности $x_1=r$. Слагаемое $|e\varphi|$ добавляется к $2T$, так как в направлении к стенке проходят быстрые частицы. Поток кинетической энергии от стенки есть член $J_0(2T+|e\varphi|)$. Так как все частицы, ушедшие со стенки (их поток равен J_0), ускоряются полем, то в среднюю кинетическую энергию частиц, проходящих через поверхность $x_1=r$, добавляется слагаемое $|e\varphi|$.

Соотношение (3.13) с $\lambda=0$ можно получить и другим путем. Вычислим поток полной энергии частиц, идущих из плазмы в сечении x_1, $r\leqslant x_1<l_2$. Полная энергия (кинетическая и потенциальная) одной частицы $m\xi^2/2+$ $+e\varphi$. Если f^+, f^- выбираются равными максвелловским функциям распределения, то поток полной энергии через единицу поверхности для частиц, летящих из плазмы

$$\iint d\xi_2\,d\xi_3\int_{-\infty}^{-v}\xi_1\left(\frac{m\xi^2}{2}+e\varphi\right)f^-\,d\xi_1=-\frac{n\zeta}{\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)T$$

Соответствующий поток энергии частиц, летящих от стенки

$$\iint d\xi_2\,d\xi_3\int_{v_\varphi}^{\infty}\xi_1\left(\frac{m\xi^2}{2}+e\varphi\right)f^+\,d\xi_1=J_02T_w$$

Сумма этих двух потоков равна полному потоку энергии в сечении x_1

$$\int\xi_1\left(\frac{m}{2}\xi^2+e\varphi\right)f\,d\xi=s_1+nv_1e\varphi=-\frac{n\zeta}{\sqrt{\pi}}\exp(-\Phi)T+J_02T_w$$

Последнее равенство совпадает с уравнением (3.13) при $\lambda=0$, если учесть соотношение (3.3).

Отметим, что при написании граничных условий составлялся момент относительно $m\xi_1\xi^2/2$ — потока кинетической энергии одной частицы в направлении, перпендикулярном к стенке. Для составления полного потока энергии, например, для электронной компоненты необходимо брать моменты относительно суммы $\xi_1(m\xi^2/2+$ $+e\varphi+I)$. Здесь I — потенциал ионизации. Однако добавление двух последних слагаемых не дает вклада в граничные условия. Члены, соответствующие моментам относительно $\xi_1(e\varphi+I)$, сократятся в силу существующих условий на потоки частиц.

Поступила 20 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases. Commun. Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 4. (Рус. перев.: О кинетической теории разреженных газов. Механика, сб. сокр. перев. иностр. период. лит., 1952, № 4, 5.)
2. *Ольховский И. И.* О граничной задаче обобщенной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 2.

3. *Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э.* Скольжение и температурный скачок на границе газовой смеси. ЖЭТФ, 1959, т. 36, вып. 6.
4. *Мойжес Б. Я., Пикус Г. Е.* К теории плазменного термоэлемента. Физика твердого тела, 1960, т. 2, вып. 4.
5. *Кармазин В. П., Стаханов И. П.* Расчет вольт-амперных характеристик термоэлектронного преобразователя в диффузионном режиме. ПМТФ, 1963, №5.
6. *Бакшт Ф. Г., Дюжев Г. А., Коробова И. Л., Каплан В. Б., Марциновский А. М., Мойжес Б Я, Шахназарова Т. А., Юрьев В. Г.* Низковольтная дуга в термоэмиссионных преобразователях. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, вып. 7.
7. *Алиевский М. Я., Жданов В. М., Полянский В. А.* Тензор вязких напряжений и тепловой поток в двухтемпературном частично ионизованном газе. ПМТФ, 1964, № 3.
8. *Маев С. А.* Граничные условия для одномерных уравнений кинетических моментов. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 2.
9. *Luzzi T. E., Gross R. A.* Magnetogasdynamic boundary conditions at a conducting wall. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 8.
10. *Любимов Г. А.* Изменение электрического потенциала вблизи стенки канала при движении ионизованного газа в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 5.
11. *Любимов Г. А.* Приэлектродные слои резкого изменения потенциала на «горячих» электродах. Теплофизика высоких температур, 1966, т. 4, № 1.
12. *Блю Э., Ингольд Д., Озеров В.* Диффузия электронов и ионов в нейтральном газе. В сб. «Термоэмиссионное преобразование энергии», т. 2. М., Атомиздат, 1965.
13. *McKee H. B., Mitchner M.* Electrostatic probes for diagnostics in a collision dominated weakly ionized plasma. In: Electricity from MHD, vol. 1. Vienna, 1966.
14. *Шерман А., Решотко Е.* Неравновесный пограничный слой на непроводящей стенке. Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 4.
15. *Стаханов И. П., Щербинин П. П.* Функция распределения ионов на границе с электродом. ПМТФ, 1969, № 3.
16. *Коган М. Н., Макашев Н. К.* О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
17. *Коган М. Н., Макашев Н. К.* О граничных условиях для течений с химическими реакциями на поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
18. *Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1. М., Атомиздат, 1963.
19. *Полянский В. А.* Об уравнениях притока тепла для частично ионизованной многотемпературной плазмы. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 3.
20. *Пекуровский Л. Е.* Коэффициенты переноса для частично ионизованной двутемпературной плазмы с разными массами ионов и нейтральных частиц. ПМТФ, 1967. № 3.