

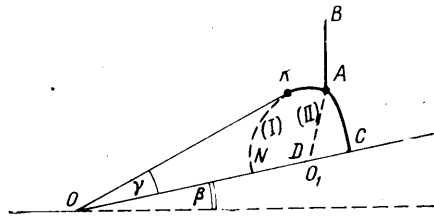
## О НЕРЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ТОНКОГО КЛИНА

В. И. БОГАТКО, Г. А. КОЛТОН

(Ленинград)

Проблема нерегулярного отражения сильной ударной волны от жесткой стенки изучалась [1-3] в основном в рамках линейной теории. При этом было обнаружено, что вблизи фронта ударной волны существует область больших градиентов газодинамических параметров, где линейная теория перестает быть справедливой [4]. В настоящей работе рассматривается нелинейная задача о маховском отражении при взаимодействии ударной волны большой интенсивности с тонким клином. Решение задачи строится в предположении о малости отношения плотностей на фронте падающей ударной волны [5, 6].

1. Пусть сильная ударная волна с характерным отношением плотностей на фронте  $\epsilon \ll 1$  набегает на тонкий клин с углом полураствора  $\beta$ . Характер взаимодействия ударной волны с клином и картина течения в возмущенной области существенно зависят от соотношения малых параметров  $\epsilon$  и  $\beta$ . Рассмотрим случай, когда величины  $\epsilon$  и  $\beta$  одного порядка малости, т. е.  $\beta = \epsilon \beta_0$ ,  $\beta_0 = O(1)$ . Схема течения представлена на фиг. 1. Кривая  $AC$  изображает волну Маха,  $BA$  — фронт падающей волны, распространяющейся со скоростью  $N_0$  по покоящемуся газу плотности  $\rho_\infty$ ;  $OKA$  — фронт присоединенной отраженной волны с прямолинейным участком  $OK$ ,  $AD$  — тангенциальный разрыв;  $KN$  — звуковую окружность с центром в точке  $O_1$ .



Фиг. 1

Рассматриваемая задача является автомодельной. Система уравнений газовой динамики для этого случая имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (v_\xi - \xi) \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta) \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} &= -\tau \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ (v_\xi - \xi) \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta) \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} &= -\tau \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ (v_\xi - \xi) \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta) \frac{\partial \tau}{\partial \eta} &= \tau \left( \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \right) \\ (v_\xi - \xi) \frac{\partial i}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta) \frac{\partial i}{\partial \eta} &= \tau \left[ (v_\xi - \xi) \frac{\partial p}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] \\ \tau = \tau(i, p) &= \frac{k-1}{k} \frac{i}{p} \end{aligned}$$

Здесь  $v_\xi$ ,  $v_\eta$ ,  $p$ ,  $\rho = 1/\tau$  и  $i$  — компоненты вектора скорости частиц газа, давление, плотность и энтальпия, отнесенные к  $N_0$ ,  $\rho_\infty N_0^2$ ,  $\rho_\infty$  и  $N_0^2$  соответственно;  $\xi$  и  $\eta$  — безразмерные автомодельные независимые переменные.

ные: ось  $\xi$  направлена вдоль стенки, а ось  $\eta$  — по нормали к ней (фиг. 1);  $k$  — отношение удельных теплоемкостей газа;

$$\varepsilon = (k-1)/(k+1).$$

Параметры потока за невозмущенным фронтом падающей ударной волны  $BA$  определяются формулами

$$v_{\xi} = (1-\varepsilon) \cos \beta, \quad v_{\eta} = (1-\varepsilon) \sin \beta, \quad p = 1-\varepsilon, \quad \tau = \varepsilon$$

В области  $OKN$  имеет место равномерный поток, параметры которого с точностью до членов более высокого порядка

$$v_{\xi} = 1-\varepsilon, \quad v_{\eta} = 0, \quad p = 1 + \beta_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad i = 1/2 + \beta_0 \varepsilon \sqrt{\varepsilon}$$

$$\tau = \varepsilon (1 - \beta_0 \sqrt{\varepsilon}), \quad a^2 = \varepsilon, \quad \gamma = \sqrt{\varepsilon}$$

где  $a$  — скорость звука,  $\gamma$  — угол наклона фронта отраженной ударной волны к поверхности клина.

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является наличие областей, в которых асимптотические разложения по параметру  $\varepsilon$  зависимых и независимых переменных имеют существенно различный характер. В области  $I$ , примыкающей к звуковой окружности  $KN (v_{\xi} - \xi)^2 + \eta^2 = a^2$ , будем иметь

$$(1.2) \quad \xi = 1 + \sqrt{\varepsilon} \sigma, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon} \delta, \quad v_{\xi} = 1 + \varepsilon u_1 + \dots$$

$$v_{\eta} = \sqrt{\varepsilon} (v_1 + \sqrt{\varepsilon} v_2 + \dots), \quad p = 1 + \sqrt{\varepsilon} p_1 + \dots,$$

$$\tau = \varepsilon (1 + \sqrt{\varepsilon} \tau_1 + \dots)$$

Так как при переходе через звуковую окружность параметры потока не терпят разрыва, то при  $\sigma^2 + \delta^2 = 1$  (уравнение  $KN$  в переменных  $\sigma, \delta$ )

$$(1.3) \quad u_1 = -1, \quad v_1 = v_2 = 0, \quad p_1 = \beta_0, \quad i_0 = 1/2, \quad i_1 = 0$$

На стенке ( $\eta = 0$ ) должно быть выполнено условие обтекания  $v_1 = v_2 = 0$ . Для построения решения в области  $I$  подставим (1.2) в (1.1) и получим систему уравнений первого приближения

$$\sigma \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} - (v_1 - \delta) \frac{\partial u_1}{\partial \delta} = \frac{\partial p_1}{\partial \sigma}, \quad \sigma \frac{\partial v_1}{\partial \sigma} - (v_1 - \delta) \frac{\partial v_1}{\partial \delta} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \delta} = 0, \quad \sigma \frac{\partial i_1}{\partial \sigma} - (v_1 - \delta) \frac{\partial i_1}{\partial \delta} = 0$$

Из последних трех уравнений полученной системы и граничных условий (1.3) следует, что в рассматриваемой области  $v_1 = 0$  и  $i_1 = 0$ . Тогда, учитывая в системе (1.1) члены более высокого порядка, приходим к системе

$$(1.4) \quad \sigma \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial \delta} = \frac{\partial p_1}{\partial \sigma}, \quad \sigma \frac{\partial v_2}{\partial \sigma} + \delta \frac{\partial v_2}{\partial \delta} = \frac{\partial p_1}{\partial \delta}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \delta} + \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} = -\sigma \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma} - \delta \frac{\partial \tau_1}{\partial \delta}, \quad \tau_1 + p_1 = 0$$

Используя систему уравнений (1.4) и граничные условия (1.3), нетрудно показать, что в области  $I$  течение безвихревое и, следовательно, существует потенциал скорости  $K(\sigma, \delta)$ , такой что  $u_1 = K_{\sigma}$ ,  $v_2 = K_{\delta}$ . Переходя к полярным координатам  $r$  и  $\theta$  по формулам  $\sigma = r \cos \theta$ ,  $\delta = r \sin \theta$ ,

из системы (1.4) получим уравнение для потенциала

$$(1-r^2)K_{rr} + \frac{1}{r^2}K_{\theta\theta} + \frac{1}{r}K_r = 0$$

Используя связь между  $p_1$  и потенциалом  $p_1 = rK_r - K + C$  ( $C = \text{const}$ ), легко получить уравнение для определения давления

$$(1.5) \quad (1-r^2)p_{1rr} + \frac{1-2r^2}{r}p_{1r} + \frac{1}{r^2}p_{\theta\theta} = 0$$

Для уравнения (1.5) имеем следующие граничные условия на звуковой окружности  $KN$  и на стенке соответственно

$$(1.6) \quad r=1, \quad p_1 = \beta_0; \quad \theta = \pi, \quad p_{1\theta} = 0$$

В рассматриваемой области уравнение (1.5) является эллиптическим, и поэтому для разрешимости краевой задачи для уравнения (1.5) необходимо иметь еще одно граничное условие, которое можно получить, сравнивая асимптотические разложения параметров течения в областях  $I$  и  $II$ .

Отметим, что при решении задачи в области  $I$  не следует требовать выполнения условий динамической совместности на фронте отраженной ударной волны  $AK$ , так как дуга  $AK$  имеет длину порядка  $\varepsilon$  и, следовательно, принадлежит области  $II$ , где  $\xi - 1 = O(\varepsilon)$ . Эти условия будут учтены при построении решения в окрестности тангенциального разрыва  $AD$ .

Для области  $II$  легко получить следующие представления зависимых и независимых величин:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \xi &= 1 + \varepsilon \xi, & \eta &= \sqrt{\varepsilon} \delta, & v_\xi &= 1 + \varepsilon u_1 + \dots, & v_\eta &= \sqrt{\varepsilon} v_1 + \dots \\ p &= 1 + \varepsilon p_2 + \dots, & i &= 1/2 + \varepsilon i_2 + \dots, & \tau &= \varepsilon(1 + \varepsilon \tau_2 + \dots) \end{aligned}$$

Так как в разложении для давления в (1.7) отсутствует член порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ , то недостающим граничным условием для уравнения (1.5) будет

$$(1.8) \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} p_1(r, \theta) = 0$$

Подставляя (1.7) в (1.1), получим нелинейную систему уравнений, описывающую течение в области  $II$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} (u_1 - \xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + (v_1 - \delta) \frac{\partial u_1}{\partial \delta} &= - \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \\ (u_1 - \xi) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + (v_1 - \delta) \frac{\partial v_1}{\partial \delta} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \delta} = 0, & \quad (u_1 - \xi) \frac{\partial i_2}{\partial \xi} + (v_1 - \delta) \frac{\partial i_2}{\partial \delta} = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия для системы (1.9) должны быть заданы на волне Маха  $AC$ , отраженном фронте  $AK$ , тангенциальном разрыве  $AD$  и поверхности клина.

На волне Маха  $AC$   $\xi = \xi_0(\delta)$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} u_1 &= \xi_0 - \delta \xi_0' - \xi_0'' - 1, & v_1 &= -\xi_0', & p_2 &= 2\xi_0 - 2\delta \xi_0' - \\ & - \xi_0'' - 1, & i_2 &= \xi_0 - \delta \xi_0' - 1/2 \xi_0'' \end{aligned}$$

Уравнение фронта отраженной ударной волны  $AK$  можно представить в виде  $\delta = 1 + \sqrt{\varepsilon} \delta_1(\sigma) + \dots$ , поэтому условия динамической совместности

на  $AK$  сносится на прямую  $\delta=1$ . Таким образом, вдоль  $AK$  имеем

$$(1.11) \quad \delta=1, \quad u_1=-1, \quad v_1=0$$

На тангенциальном разрыве  $AD$  должны быть выполнены обычные условия непрерывности давления и нормальной к разрыву составляющей скорости.

2. Применяя метод разделения переменных, решение задачи (1.5), (1.6), (1.8) представим в виде

$$p_1 = \frac{4\beta_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( \frac{r}{1+\sqrt{1-r^2}} \right)^{2j-1} \frac{\cos(2j-1)\theta}{2j-1}$$

Сумма этого ряда легко вычисляется, и окончательно для  $p_1$  будем иметь

$$(2.1) \quad p_1 = -\frac{2\beta_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}}$$

Подставляя (2.1) в правые части первых двух уравнений системы (1.4), найдем

$$(2.2) \quad u_1 = -1 + \frac{2\beta_0}{\pi} \ln \frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad v_2 = \frac{2\beta_0}{\pi} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-r^2} \operatorname{tg} \theta)$$

Решение такого типа впервые было получено в задаче о дифракции звуковых волн [7].

В области  $II$  слева от тангенциального разрыва решение системы (1.9) с граничными условиями (1.11) имеет вид

$$(2.3) \quad v_1=0, \quad u_1=f_1(\delta), \quad p_2=\zeta \delta f_1'(\delta) + f_2(\delta)$$

Произвольную функцию  $f_1(\delta)$  определим, срачивая решение (2.3) с решением (2.2) для  $u_1$  в области  $I$  при  $\sigma \rightarrow 0$ . Тогда имеем

$$(2.4) \quad u_1=f_1(\delta) = -1 + \frac{2\beta_0}{\pi} \ln \frac{1+\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

Функция  $f_2(\delta)$  определится из условия непрерывности давления на тангенциальном разрыве после построения решения в области  $II$  справа от  $AD$ .

Переходя к построению решения системы (1.9) в указанной области, заметим, что из третьего уравнения системы следует существование аналога функции тока  $F(\zeta, \delta)$ :  $u_1=-F_\zeta$ ,  $v_1=F_\zeta$ . Тогда второе уравнение системы (1.9) примет вид

$$(\zeta+F_\delta)F_{\zeta\zeta} + (\delta-F_\zeta)F_{\zeta\delta} = 0$$

Далее, полагая  $F=\Phi(q, \delta)+q\zeta$ , где  $q=F_\zeta=v_1$ , для функции  $\Phi(q, \delta)$  получим уравнение Эйлера – Дарбу, общее решение которого [8]

$$\Phi(q, \delta) = 2[L_1(q) + L_2(\delta)] + (\delta-q)[L_1'(q) - L_2'(\delta)]$$

Тогда общее решение системы (1.9) представится в параметрическом виде

$$(2.5) \quad \begin{aligned} v_1 &= q, \quad u_1 = -[H_2(\delta) + H_1(q) - (\delta-q)H_2'(\delta)] \\ \zeta &= -[H_2(\delta) + H_1(q) + (\delta-q)H_1'(q)] \\ p_2 &= -\int (\delta-q)^3 H_2''(\delta) H_1''(q) dq + H_3(\delta) \end{aligned}$$

где  $H_1(q) = L_1'(q)$ ,  $H_2(\delta) = L_2'(\delta)$ ,  $H_3(\delta)$  — произвольная функция. Параметр  $q$  сохраняет постоянное значение вдоль траектории частицы, уравнение которой на плоскости автомодельных переменных в области II

$$(u_1 - \zeta)^{-1} d\zeta = (v_1 - \delta)^{-1} d\delta$$

Заметим, что ранее построенное решение (2.3) системы (1.9) особое и не содержится в общем решении (2.5) ни при каких функциях  $H_1(q)$  и  $H_2(\delta)$ .

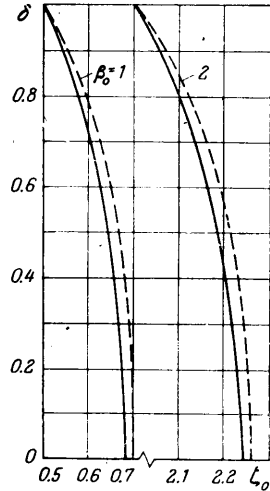
Тангенциальный разрыв  $AD$  является траекторией частицы, проходящей через тройную точку  $A$ , и, следовательно, вдоль  $AD$  имеем  $q = c = \text{const}$ . Условие непрерывности нормальной к разрыву компоненты вектора скорости дает

$$(2.6) \quad (u_1^+ - \zeta) / (u_1^- - \zeta) = -(v_1^+ - \delta) / \delta$$

где значками плюс и минус обозначены значения параметров потока справа и слева от тангенциального разрыва соответственно. Подставляя в (2.6) выражения для  $u_1$  и  $v_1$  из (2.4) и (2.5), получим уравнение для определения произвольной функции  $H_2(\delta)$  и его решение

$$\delta H_2'(\delta) - H_2(\delta) = u_1^- + C_1$$

$$H_2(\delta) = -\frac{2\beta_0}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} + \\ + \frac{2\beta_0}{\pi} \sqrt{1 - \delta^2} + A\delta - C_1 + 1$$



Фиг. 2

где  $C_1 = H_1(c) - cH_1'(c) = \text{const}$ ,  $A$  — произвольная постоянная.

Уравнение тангенциального разрыва  $AD$  найдем, полагая  $q = c$  в третьем соотношении из (2.5).

Для определения функции  $H_1(q)$  и уравнения фронта волны Маха  $AC$  обратимся к условиям динамической совместности (1.10). Подставляя (2.5) в (1.10), после несложных преобразований получим дифференциальное уравнение для определения фронта волны Маха

$$(2.7) \quad \zeta_0'' = H_2''(\delta) (\zeta_0' + \delta)^2 [1 - (\zeta_0' + \delta)^2]^{-1}$$

Краевыми условиями для уравнения (2.7) являются условия перпендикулярности волны Маха к стенке в точке  $C (\zeta_0'(0) = 0)$  и условие прохождения волны Маха через тройную точку  $A (\zeta_0(1) = 1/2\beta_0^2)$ . Результаты численного интегрирования уравнения (2.7) приведены на фиг. 2. После отыскания решения  $\zeta_0(\delta)$  уравнения (2.7) может быть найдено параметрическое представление функции  $H_1(q)$

$$\begin{cases} H_1(t) = -H_2(t) + (t - q)H_2'(t) - \zeta_0(t) + t\zeta_0'(t) + \zeta_0'^2(t) + 1 \\ q = -\zeta_0'(t) \end{cases}$$

На фронте  $AC$   $t = \delta$ , в точке  $A$   $t = 1$  и поэтому  $c = -\zeta_0'(1)$ . Теперь величина  $p_2$  в области  $ACD$  определится квадратурой

$$p_2(\delta, t) = H_3(\delta) + H_2''(\delta) \int_{\delta}^t (\delta + \zeta_c)^3 \left[ \frac{\zeta}{(t + \zeta_0)^2} + \frac{1}{t + \zeta_0} \right] dt$$

$$\zeta_0 = d\zeta_0/dt$$

Функцию  $H_3(\delta)$  найдем из условия (1.9) на  $AC$  ( $t = \delta$ )

$$H_3(\delta) = 2\zeta_0(\delta) - 2\delta\zeta_0'(\delta) - \zeta_0'^2(\delta) - 1$$

3. Получим приближенную формулу для фронта волны Маха. Для этого дифференциальное уравнение (2.7) представим в виде

$$(3.1) \quad \frac{dz}{d\delta} = \frac{2\beta_0}{\pi} \frac{1}{\delta^2 \sqrt{1-\delta^2}} \frac{(\delta+z)^2}{(\delta+z)^2-1}$$

где  $z(\delta) = \zeta_0'(\delta)$ , причем  $z(0) = 0$ .

Условие ограниченности решения уравнения (3.1) в окрестности точки  $\delta=0$  дает  $z'(0) = B$ , где  $B$  — корень уравнения  $B(1+B)^{-2} + (2/\pi)\beta_0 = 0$ .

Для построения приближенного решения в правой части уравнения (3.1) положим  $z = B\delta$ , тогда имеем

$$(3.2) \quad z = -\frac{2\beta_0}{\pi} \frac{m^2}{\sqrt{1-m^2}} \arctg \frac{\delta \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-\delta^2}}, \quad m = B+1$$

Интегрируя уравнение (3.2) и используя в качестве начального условия условие прохождения фронта волны Маха через точку  $A$ , получим

$$\zeta_0(\delta) = \frac{\beta_0^2}{2} - \frac{2\beta_0}{\pi} \frac{m^2}{\sqrt{1-m^2}} \left[ \delta \arctg \frac{\delta \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{1}{k} \arctg \frac{m \sqrt{1-\delta^2}}{\sqrt{1-m^2}} - \frac{\pi}{2} \right]$$

На фиг. 2 сопоставлены результаты численного интегрирования (сплошная линия) уравнения (2.7) с приближенным решением (3.3). Сравнение показывает, что полученное приближенное решение достаточно хорошо описывает форму фронта волны Маха.

4. Особый интерес представляет распределение давления вдоль поверхности клина в окрестности основания волны Маха. Вдоль стенки величины  $\delta$  и  $q$  тождественно обращаются в нуль, т. е. в плоскости переменных  $(\delta, q)$  поверхность клина вырождается в точку. В связи с этим необходимо провести более детальное исследование поведения решения при малых значениях  $\delta$  и  $q$ .

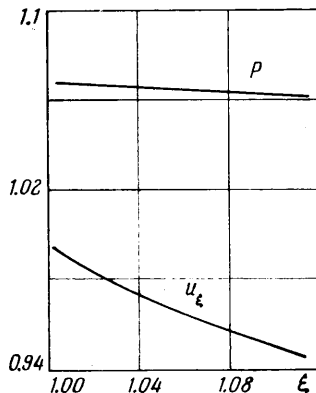
В окрестности точки  $\delta=q=0$  имеем

$$q \sim \frac{2\beta_0}{\pi} m^2 t, \quad H_2(\delta) \sim \frac{2\beta_0}{\pi} \ln \delta, \quad H_2(t) \sim \frac{2\beta_0}{\pi} \ln t$$

$$H_2'(t) \sim \frac{2\beta_0}{\pi} \frac{1}{t}, \quad H_1(t) \sim -\frac{2\beta_0}{\pi} \ln t + \frac{2\beta_0}{\pi} \left( 1 - \frac{2\beta_0}{\pi} m^2 \right) + 1 - S_0$$

$$\zeta_0 \sim Bt, \quad \zeta_0'' \sim B \quad (S_0 = \zeta_0(0))$$

Используя (4.1), из (2.5) легко получить распределение величин  $u_1$  и  $p_2$  вдоль стенки



Фиг. 3

$$\zeta = S_0 - \frac{2\beta_0}{\pi} \ln h - \left( \frac{2\beta_0}{\pi} + \frac{1}{1-R} \right) (1-h)$$

$$u_1 = S_0 - 1 - \frac{2\beta_0}{\pi} \left( \ln h + R \frac{1-h}{h} \right)$$

$$p_2 = 2S_0 - 1 + \frac{2\beta_0}{\pi} \frac{R}{(1-R)^2} \times$$

$$\times \left[ 3R \ln h + (1-h) + 3R^2 \frac{1-h}{h} - \frac{1}{2} R^3 \frac{1-h^2}{h^2} \right]$$

$$h = \delta / t, \quad R = (2/\pi)\beta_0 m^2$$

причем в точке  $Ch=1$ . Графики полученных зависимостей при  $\beta_0=1$  приведены на фиг. 3.

В заключение авторы благодарят А. А. Гриба за внимание к данной теме и Л. А. Румянцеву за помощь при проведении расчетов.

Поступила 12 II 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* The diffraction of blast I. Proc. Roy. Soc., 1949, A198, No. 1055.
2. *Ting L., Ludloff H. F.* Aerodynamics of blasts. J. Aeronaut. Sci., 1952, vol. 19, No. 5.
3. *Жигалко Е. Ф.* Линейное приближение к дифракции и отражению ударной волны. Вестн. ЛГУ, 1969, № 13.
4. *Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.* Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
5. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
6. *Гонор А. Л., Остапенко Н. А.* Гиперзвуковое обтекание крыльев с маховской системой ударных волн. Изв. АН СССР, МЖТ, 1972, № 3.
7. *Соболев С. Л.* Теория дифракции плоских волн. Тр. Сейсмолог. ин-та, 1934, № 41.
8. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1957.