

ЗАКОН СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОКОЛО ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В. Н. ДИЕСПЕРОВ, Ю. Б. ЛИФШИЦ, О. С. РЫЖОВ

(Москва)

Приводится математическое обоснование известного в экспериментальной аэродинамике закона стабилизации газовых параметров при обтекании тел потоком с околосвуковой скоростью. Количественная формулировка этого закона опирается на простой асимптотический анализ решений уравнения Кармана. Выполненный численный расчет поля скоростей вокруг тела вращения, меридиональным сечением которого служит профиль Чаплыгина, с высокой точностью подтвердил выводы асимптотической теории.

Понимание многих особенностей обтекания тел газом в трансзвуковом диапазоне скоростей в значительной мере зиждется на так называемом законе стабилизации. Этот закон впервые был установлен экспериментальным путем в [1]. Он следует также из результатов проводившихся во многих странах опытов, весьма полное изложение которых дано в [2]. Сущность закона стабилизации состоит в том, что при увеличении числа M_∞ дозвукового набегающего потока распределение давления вдоль обтекаемой поверхности вплоть до скачка уплотнения чрезвычайно слабо отклоняется от соответствующего предельного распределения при критической скорости на бесконечности, хотя сам скачок довольно быстро перемещается по направлению к задней кромке тела. Как показывают данные экспериментов, вариации всех параметров газа перед ударным фронтом малы по сравнению с изменением скорости невозмущенного течения, если она близка к звуковой. Явление стабилизации газовых параметров в трансзвуковом режиме обтекания имеет, естественно, большое практическое значение. Хотя учет этого явления позволяет значительно упростить вычисление аэродинамических характеристик тел, попыток обосновать его математически до сих пор не предпринималось.

Приведенные в [1, 2] результаты опытов относятся только к крыловым профилям, но нет сомнений, что аналогичные результаты должны получиться и при изучении обтекания тел более сложной формы. Чтобы проверить это предположение, ниже будет рассмотрен осесимметричный поток у тела с круглым поперечным сечением.

Приступая к выяснению математической природы изложенных экспериментальных закономерностей, поставим целью дать не только их качественную, но и количественную формулировку. Ограничимся исследованием обтекания тонких тел и примем, что скорость v_∞ потока на бесконечности мало отличается от скорости звука a_∞ . Обозначим через x, r оси цилиндрической системы координат, причем ось x ориентируем по направлению невозмущенного движения газа. За исключением областей, которые непосредственно прилегают к носовой и хвостовой частям обтекаемого тела, скорость всюду в пространстве будет близка к критической. Считая поток безвихревым, положим в основу анализа приближенное уравнение

$$(1) \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

для потенциала возмущенной скорости, установленное в [3]. Здесь потенциал φ и длины вдоль осей x, r берутся в безразмерной системе единиц. Главным членом при выводе (1) служит потенциал равномерного поступательного потока, имеющего критическую скорость a_* , а не скорость v_∞ на бесконечности.

Определим область, в которой рассматривается решение. Пусть она, с одной стороны, настолько удалена от обтекаемого тела, что форма последнего не оказывает существенного влияния на структуру поля скоростей; с другой стороны, размеры этой области примем не столь большими, чтобы значения параметров газа в ней пренебрежимо мало отклонялись от соответствующих значений на бесконечности. Тогда можно считать возмущения скорости в рассматриваемой области индуцированными главным образом телом, а содержащийся в них вклад, зависящий от разности $M_\infty - 1$, сравнительно небольшим. При сформулированных предположениях главный член решения уравнения Кармана выражается при помощи функции $\varphi_0(x, r)$, которая вдали от тела определяет возмущения равномерного потока со звуковой скоростью. Обращаясь к [4-7], пишем

$$\varphi_0 = r^{-2/3} f_0(\xi), \quad \xi = x r^{-1/3}.$$

Нормируем автомодельную переменную таким образом, чтобы линия $\xi = 1$ была предельной характеристикой соответствующего звукового течения. В части рассматриваемой области, лежащей между отрицательной полуосью x и этой линией, перейдем к новой переменной η по формуле: $\xi = 7^{-1/3} (12\eta - 5) \eta^{-2/3}$. Тогда функция $f_0 = 2^5 \cdot 7^{-3} \eta^{1/3} (12\eta^2 - 15\eta - 25)$.

Чтобы учесть граничное условие $M_\infty \neq 1$ на бесконечности, запишем выражение для потенциала в виде суммы

$$(2) \quad \varphi = \varphi_0(x, r) + \varepsilon \varphi'(x, r)$$

полагая параметр $\varepsilon \ll 1$. Поправка $\varphi'(x, r)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению, которое следует из (1), если пренебречь в нем квадратичным членом $\varphi' \partial \varphi' / \partial x$. Из анализа названного линейного уравнения [8, 9] имеем

$$\varphi' = r^{2/3} f_1(\xi) = b r^{2/3} \eta^{-4/3} (1 - 4\eta), \quad b = \text{const}$$

Установим теперь зависимость малого параметра ε в (2) от числа Маха набегающего потока. Для этой цели подвергнем независимые переменные x, r и искомый потенциал φ преобразованию

$$(3) \quad x \rightarrow x/x_0, \quad r \rightarrow \tau r/x_0, \quad \varphi \rightarrow \varphi/(\tau^2 x_0)$$

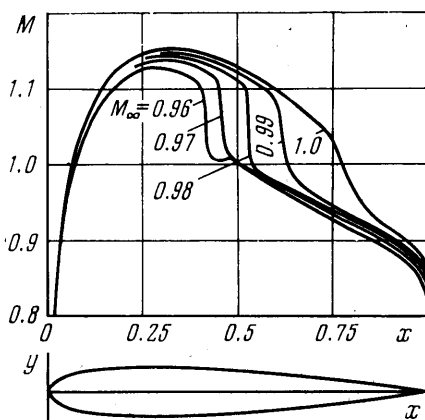
которое обычно используется при выводе закона подобия для осесимметричных трансзвуковых течений. Здесь τ — относительная толщина рассматриваемого тела, x_0 — некоторая постоянная. При таком преобразовании автомодельная переменная запишется в виде:

$$\xi = x_0^{-2/3} \tau^{-1/3} x r^{-1/3}$$

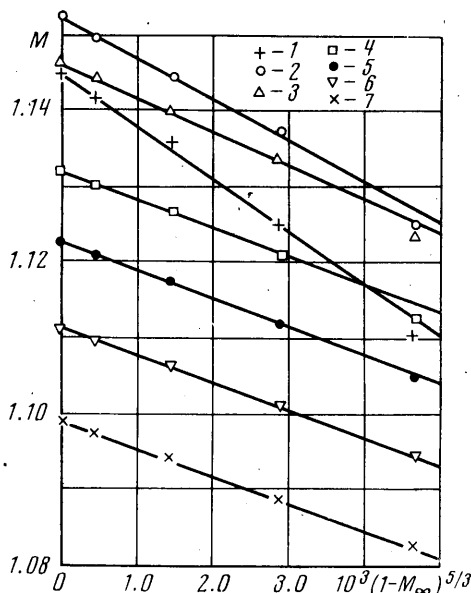
Как показано в [3], относительная толщина $\tau \sim |M_\infty - 1|^{1/2}$; для аффинноподобных тел $\tau \rightarrow 0$ при $M_\infty \rightarrow 1$. Однако ясно, что при любой скорости частиц на бесконечности первый член в правой части (2) должен сохраняться неизменным, так как он соответствует потоку с $M_\infty = 1$ около тела заданных размеров. Отсюда находим сразу $x_0 \sim \tau^{-2/3} \sim |M_\infty - 1|^{-2/3}$. Подвергнув теперь потенциал φ преобразованию (3), получим, что по порядку величины малый параметр $\varepsilon \sim \tau^{10/3} \sim |M_\infty - 1|^{5/3}$. Окончательно имеем [8, 9]

$$(4) \quad \varphi = r^{-2/3} f_0(\xi) + (M_\infty - 1)^{5/3} r^{2/3} f_1(\xi)$$

Используя (4), легко дать математическое обоснование закона стабилизации. Следует заметить, что (4) можно применять к расчету только передней части поля скоростей, расположенной вверх по потоку от скачка уплотнения. Действительно, вид поправочного члена $\Phi'(x, r)$ был установлен в [8, 9] путем исследования структуры поля скоростей в окрестности



Фиг. 1



Фиг. 2

отрицательной полуоси x и предельной характеристики течения, которая при $M_\infty=1$ изображается линией $\xi=\eta=1$. Границы области, где имеет место (4), были указаны выше; они проходят на достаточно большом расстоянии от обтекаемой поверхности. Но при аналитическом продолжении решения уравнения (1) из этой области к поверхности тела его зависимость от разности $M_\infty-1$ должна сохраняться прежней. Отсюда следует, что при вариации скорости набегающего потока вокруг критической параметра газа как во внешнем поле скоростей, так и вдоль поверхности обтекаемого тела будут отклоняться от своих предельных значений для звукового потока пропорционально величине

$$(5) \quad \varepsilon \sim |M_\infty - 1|^{1/2}$$

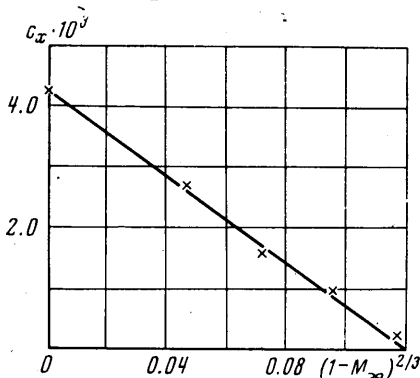
Качественно сформулированное заключение находится в полном соответствии с опытными данными, которые приведены в [1, 2], но для количественного сопоставления эти данные использовать невозможно. Дело не только в том, что в экспериментах измерялись величины, характеризующие обтекание профилей крыла бесконечного размаха (оценку порядка вариации различных газовых параметров можно найти и для этого случая). Однако точность содержащихся в [1, 2] данных недостаточна для их количественного сопоставления с выводом теории.

Чтобы проверить приведенную выше формулировку закона стабилизации, были предприняты тщательные расчеты поля скоростей около тела вращения с плавной хвостовой частью; его меридиональным сечением служит симметричный профиль Чаплыгина. В параметрическом виде уравнение контура профиля гласит

$$(6) \quad \begin{aligned} z_1 &= 1 + z_1 \cos z_2, \quad r = z_1 \sin z_2, \\ z_1 &= (1 + \delta)^{1-k} |\sin(t/2)|^{2-k} (1 - 2\delta \cos t + \delta^2)^{(k-1)/2} \\ z_2 &= \pi^{-1/2} k (\pi + t) + (1-k) \arctg [\delta \sin t (1 - \delta \cos t)^{-1}] \end{aligned}$$

Значения параметра t ограничены интервалом $-\pi \leq t \leq 0$. В расчетах было принято, что $k=0.1$ и $\delta=0.05$. Профиль имел единичную длину, его максимальная толщина равнялась приблизительно 0.144. Расчеты велись при помощи релаксационной разностной схемы, весьма близкой к той, которая использовалась в [10] для решения двумерных задач газовой динамики. Специальная модификация схемы позволила применить ее к вычислению параметров осесимметричных течений. Результаты расчетов представлены на фиг. 1–3.

На фиг. 1 изображены эпюры местных чисел Маха при различных скоростях набегающего потока. Сравнение кривых показывает, что при изменении величины M_∞ распределения местных чисел Маха вдоль обтекаемой поверхности вплоть до ударного фронта мало отличаются от соответствующего предельного распределения, которое реализуется при критической скорости на бесконечности. Однако сам фронт ударной волны



Фиг. 3

с увеличением скорости набегающего потока довольно быстро смещается по направлению к задней кромке тела. Таким образом, качественно результаты проведенных расчетов находятся в полном согласии с данными, полученными при продувках крыловых профилей в аэродинамических трубах.

Для количественной проверки основного вывода асимптотической теории обратимся к фиг. 2. Изображенные на ней кривые показывают, как изменяется местное число Маха в данной точке на теле вращения при увеличении значения M_∞ . Цифры 1, 2, 3, ... относятся к значениям ко-

ординаты x , равным соответственно 0.4060, 0.3273, 0.2585, 0.1956, 0.1762, 0.1576 и 0.1398. Лишь один взгляд на фиг. 2 убеждает, что при вариации скорости набегающего потока около критической числа Маха вдоль поверхности обтекаемого тела отклоняются от своих предельных значений для звукового потока пропорционально малому параметру ε , задаваемому оценкой (5). Аналогичная оценка справедлива для относительной величины избыточного давления на передней части тела до скачка уплотнения. В этом и состоит наиболее точная формулировка закона стабилизации для трансзвуковых течений.

Было бы, однако, грубой ошибкой делать вывод, что общее сопротивление, испытываемое телом вращения при околосвуковой скорости на бесконечности, будет изменяться так же, как изменяются параметры газа перед ударной волной. В области позади ее фронта поправочный член $\varphi'(x, r)$ в правой части равенства (2) может иметь совершенно иную структуру. При исследовании течения с $M_\infty=1$ было обнаружено [11–14], что в этой области появляется слагаемое

$$\varphi'_{-1/2} = r^{-1/2} f_{-1/2}(\xi) = c r^{-1/2} \xi^{3/2} (1 + \xi)^{3/2},$$

$$\xi = 7^{-1} (2 - \sqrt{3})^{1/2} \xi^{-3/2} (12\xi + 5), \quad c = \text{const}$$

В области перед скачком уплотнения функция $f_{-1/2}(\xi)$ имеет особенность либо при $\xi \rightarrow -\infty$, либо при $\xi=1$. Поле скоростей нерегулярно в первом случае при приближении к отрицательной полуоси x , во втором — на предельной характеристике. Отсюда немедленно следует, что впереди скачка уплотнения нужно положить $\varphi_{-1/2}(x, r) = 0$. Возникнове-

ние точно такой ситуации следует ожидать и при $M_\infty \neq 1$. Но если скорость набегающего потока отлична от критической, установить вид поправочного потенциала $\phi'(x, r)$ невозможно без учета вихревого следа, простирающегося за обтекаемым телом.

Расчеты подтверждают высказанное предположение. На фиг. 3 показано изменение коэффициента c_x сопротивления тела, образованного вращением профиля Чаплыгина (6), в зависимости от числа M_∞ . Как следует из фиг. 3, разность

$$\Delta c_x = c_x(1) - c_x(M_\infty) \sim |1 - M_\infty|^{1/2}$$

Асимптотическая теория предсказывает следующий вид разложения:

$$(7) \quad \Delta c_x = c_1(1 - M_\infty)^{1/2} + c_2(1 - M_\infty)^{3/2} + \dots$$

Таким образом, для данного тела вращения постоянная $c_1 = 0$.

Аналогичную (7) оценку имеет разность координат $x_{sh}(1)$ и $x_{sh}(M_\infty)$, которые определяют положение фронта ударной волны на теле при заданном значении M_∞ и при $M_\infty = 1$. Необходимо отметить, что при вычислении сопротивления тела путем интегрирования коэффициента давления по его поверхности основной вклад в изменение интеграла обусловлен смещением скачка уплотнения. Это обстоятельство совершенно не принималось во внимание в [8], что привело к неверной оценке скорости нарастания c_x при $M_\infty \rightarrow 1$.

Проанализируем теперь исходное ограничение, налагавшееся на относительную толщину обтекаемого тела. В теории малых возмущений тело считается точкой. Пусть теперь рассматривается поток у тела с относительной толщиной порядка единицы. Поскольку область, в которой было построено решение, достаточно удалена от тела, предположения теории малых возмущений сохраняются в силе. Отсюда следует, что решение можно искать по-прежнему в виде (2). Подвергая его преобразованию подобия (3), будем рассматривать τ в качестве произвольного малого параметра, не отождествляя его с относительной толщиной тела. Связь этого параметра с разностью $M_\infty - 1$ устанавливается посредством удовлетворения граничного условия при $x^2 + r^2 \rightarrow \infty$, для чего также можно воспользоваться предположениями, лежащими в основе вывода уравнения Кармана. Поэтому $\tau \sim |M_\infty - 1|^{1/2}$, а потенциал возмущений задается формулой (4). На достаточном расстоянии от толстого тела поле скоростей обладает, таким образом, свойством стабилизации, т. е. его параметры изменяются значительно медленнее, чем скорость набегающего потока.

Давление и скорость частиц газа на самой поверхности обтекаемого тела определяются, конечно, характером аналитического продолжения построенного решения в близкую к телу область. Для толстых тел такое продолжение должно базироваться на точной системе уравнений Эйлера, а не на приближенном уравнении (1). В выбранном для расчета примере относительная толщина тела 0.144. Отсюда можно заключить, что закон стабилизации параметров газа на обтекаемой поверхности остается справедливым по крайней мере для тел умеренной толщины, если скорость потока близка к критической.

Определим в заключение порядок расстояний, на которых второе слагаемое в правой части (4) становится сравнимым с первым. Приравняв величины обоих названных слагаемых при постоянном ξ , имеем

$$(8) \quad x \sim |1 - M_\infty|^{-2/3}, \quad r \sim |1 - M_\infty|^{-1/3}$$

Оценки (8) показывают, где проходит внешняя граница области применимости построенных выше разложений. Поскольку в этой области параметры газа мало отличаются от своих предельных значений в потоке с критической скоростью на бесконечности, то при $M_\infty < 1$ как окончание местной сверхзвуковой зоны, так и место возникновения фронта скачка уплотнения не принадлежат ей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А., Гальперин В. Г., Горский И. П., Ковалев А. П. Физические основы околосвуковой аэродинамики. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.
 2. Holder D. W. The transonic flow past two-dimensional aerofoils. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1964, vol. 68, No. 644.
 3. Von Karman Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
 4. Guderley K. G., Yoshihara H. An axial-symmetric transonic flow pattern. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 8, No. 2.
 5. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
 6. Müller E. A., Matschat K. Ähnlichkeitslösungen der transsonischer Gleichungen bei der Anström-Machzahl 1. Proc. 11-th Internat. Congr. Appl. Mech. Munich, 1964, Springer, 1966.
 7. Randall D. Some results in the theory of almost axisymmetric flow at transonic speed. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 12.
 8. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
 9. Диесперов В. Н., Рыжов О. С. Об обтекании конечных тел равномерным потоком в околосвуковом диапазоне скоростей. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1.
 10. Garabedian P. R., Korn J. Analysis of transonic airfoils. Comm. Pure Appl. Math., 1971, vol. 24, No. 6.
 11. Диесперов В. Н., Рыжов О. С. О пространственном обтекании тел звуковым потоком идеального газа. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
 12. Tournemine G. Sur un schéma d'écoulement sonique, tridimensionnel, en aval de l'onde de choc, en fluide parfait. C. r. Acad. Sci., Ser. A, 1968, t. 267, No. 19.
 13. Tournemine G. Comportement asymptotique de l'écoulement sonique autour d'un corps de révolution de dimensions finies, en aval de l'onde de choc. J. de Mécan., 1968, vol. 7, No. 3.
 14. Диесперов В. Н., Рыжов О. С. О телах вращения в звуковом потоке идеального газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 1.
-