

О СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ ПРИ ТРАНСЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ВЫПУКЛОГО УГЛА

Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Исследуется взаимодействие смешанного до- и сверхзвукового потока вблизи выпуклого излома профиля с прямолинейной стенкой, расположенной вниз по потоку от этого излома. Если исходить из того, что исходное течение — в области до последней характеристики узла разрежения — имеет характер особенности [1], то решение в области взаимодействия, получаемое в плоскости годографа в предположении его непрерывности в физической плоскости, не осуществимо из-за наличия предельных линий. Этим определяются предпосылки образования скачка уплотнения, который выходит из угловой точки, имея в ней нулевую интенсивность.

В экспериментах по обтеканию тел с изломом образующей (когда из угловой точки выходит звуковая линия) наблюдается скачок уплотнения. Такой скачок был построен в [2] численным методом. В [3] необходимость возникновения скачка была установлена аналитически, а также исследовались его основные свойства в слабом сверхзвуковом потоке. При этом, однако, остался невыясненным вопрос о положении точки зарождения скачка. Этот вопрос ранее обсуждался в [4], где было высказано предположение, что скачок начинается в угловой точке в результате образования «огнивающей волн сжатия», отраженных от твердой стенки.

Ниже проводится аналитическое исследование взаимодействия трансзвукового течения в окрестности угловой точки, порождаемого степенной особенностью, с прямолинейной стенкой вниз по потоку от угловой точки. Указывается класс особенностей, для которого непрерывное решение, построенное первоначально в плоскости годографа, физически не осуществимо из-за образования складки. Этот класс, в частности, содержит решение, найденное в [1].

Рассмотрим обтекание выпуклого угла с звуковой линией, выходящей из угловой точки A . Точки в физической плоскости будут обозначаться большими буквами, их образы в плоскости годографа — малыми.

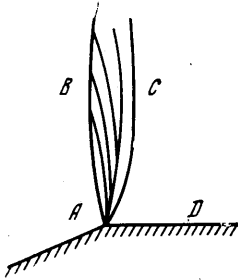
Исследование проведем в трансзвуковой аппроксимации, считая, что поток безвихревой и в плоскости годографа uv функция тока удовлетворяет уравнению Трикоми: $\psi_{uu} = u\psi_{vv}$ ($u = (\lambda - 1)(k + 1)^{1/2}$, λ — коэффициент скорости, v — угол наклона вектора скорости).

Обозначим через AB , AC , AD звуковую линию, последнюю характеристику узла разрежения (полагаем, что узел образуется характеристиками первого семейства), прямолинейную стенку в сверхзвуковой области (фиг. 1) соответственно. Будем исходить из того, что главный член функции тока $\psi_0(u, v)$, описывающий трансзвуковое течение вблизи точки A (вверх по потоку от характеристики AC), принадлежит классу точных решений уравнения Трикоми, однолистных в плоскости годографа и имеющих распределение ψ на звуковой линии по степенному закону. Таким решением является, например, решение [1]. Решение $\psi_0(u, v)$ обращается в нуль на характеристике a_1a_2 второго семейства, изображающей в плоскости uv угловую точку. Решению $\psi(u, v)$ соответствует течение со звуковой линией, ортогональной в точке A дозвуковому направлению вектора

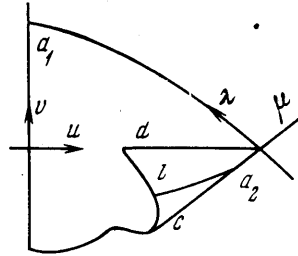
скорости и обращенной выпуклостью в сторону дозвуковой области. В плоскости годографа существует окрестность точки a_1 (фиг. 2), в которой отсутствуют предельные линии (на предельной линии якобиан $j = \partial(x, y) / \partial(u, v) = u\psi_v^2 - \psi_u^2$ меняет знак).

Будем считать, что угол между касательными к контуру в точке A настолько мал, что точка a_2 находится в указанной окрестности.

Таким образом, в области BAC (фиг. 1), как и в дозвуковой области, будет $j \leq 0$. (Знак j определяет ориентации соответствующих элементарных



Фиг. 1



Фиг. 2

контуров в плоскостях xu и uv : при $j > 0$ ориентации одинаковы, при $j < 0$ различны.)

Введем в плоскости годографа характеристические переменные $(L, M; \lambda, \mu)$ по формулам

$$L = v - (2/3)u^{3/2}, \quad M = v + (2/3)u^{3/2}, \quad \lambda = L - L_0, \quad \mu = M - M_0$$

где L_0, M_0 — значения L, M в точке a_2 .

Так как $j \leq 0$ в BAC , образ характеристики AC в плоскости uv лежит ниже точки a_2 , т. е. на ней $v < v_{a_2}$ (фиг. 2).

Из предыдущего следует, что на характеристике a_2c ($\lambda = 0, \mu \leq 0$) будет $\psi_0 = A(-\mu)^n, n > 0$; без ограничения общности можно положить $A = 1$.

Показатель n может быть как больше, так и меньше единицы.

Действительно, решение $\psi_0(u, v)$ вблизи характеристики a_1a_2 , на которой оно обращается в нуль, имеет вид (см. [5], стр. 206)

$$\psi_0(u, v) = (9v^2 - 4u^3)^{2v} v^{-2v-1/6} F(v+1/12, v+7/12, 2v+1, 1-4u^3/9v^2)$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция, поэтому вблизи точки a_2 , где $u > 0$

$$\psi_0(u, v) = (-\mu)^{2v} + o(\mu^{2v})$$

Решению [1] соответствует $v = 3/4, n = 2v = 3/2 > 1$.

Решение [1] непосредственно описывает течение с прямолинейной стенкой в дозвуковой области, а кривизна профиля может быть учтена последующими членами асимптотического разложения. В [6] приводится другое решение, описывающее обтекание выпуклого (с конечной кривизной) профиля в дозвуковой области; ему соответствует $v = 5/12, n = 5/6 < 1$.

Вопрос о том, какая именно особенность реализуется при обтекании тела, является открытым. По-видимому, его надо рассматривать применительно к наиболее широкому классу функций, исходя из свойств решения задачи в целом.

Образ области CAD в плоскости годографа ограничен тем отрезком прямой $v = v_{a_2}$, на котором $u \leq u_{a_2}$, так как в противном случае область CAD со-

держала бы прообраз характеристики первого семейства a_2c . Отсюда следует, что образы областей CAD и BAC перекрывают друг друга, т. е. лежат на разных листах плоскости годографа, скрепленных вдоль характеристики a_2c . (Как известно, край складки, возникающей при отображении плоского потенциального течения в плоскость годографа, является характеристикой.)

Таким образом, для асимптотического описания течения в области CAD необходимо найти в области ca_2d плоскости годографа функцию тока $\psi(u, v)$, удовлетворяющую уравнению Трикоми и граничным условиям

$$(1) \quad \psi = |\mu|^{n+o}(\mu)^n, \quad \lambda=0, \quad \mu \leq 0, \quad \psi=0, \quad \lambda=-\mu, \quad \lambda \geq 0.$$

При переходе к характеристическим координатам уравнение Трикоми преобразуется в уравнение Эйлера — Дарбу

$$\psi_{LM} = (\psi_M - \psi_L) / 6(M-L)$$

Решение задачи Гурса для этого уравнения можно выразить с помощью функции Римана V (см., например, [7]) через произвольные функции $\varphi(M)$, $f(L)$

$$\begin{aligned} \psi(M, L) = & \varphi(M)V(M, L_0; M, L) + f(L)V(M_0, L; M, L) + \\ & + \int_{M_0}^M \varphi(\xi) \left[\frac{V(\xi, L_0; M, L)}{6(\xi - L_0)} - V_\xi(\xi, L_0; M, L) \right] d\xi - \\ & - \int_{L_0}^L f(\eta) \left[\frac{V(M_0, \eta; M, L)}{6(M_0 - \eta)} + V_\eta(M_0, \eta; M, L) \right] d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\xi, \eta; M, L) = \\ = \frac{(\eta - \xi)^{1/6}}{(L - \xi)^{1/6}(\eta - M)^{1/6}} F \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1, \frac{(\xi - M)(\eta - L)}{(\xi - L)(\eta - M)} \right) \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$\varphi(M) = |\mu|^{n+o}(\mu)^n, \quad f(L) = -\lambda^{n+o}(\lambda)^n$$

Воспользовавшись теоремой о среднем [8] и разложением функции Римана в окрестности регулярной точки ($M=M_0$, $L=L_0$), получим асимптотические представления для ψ , ψ_λ , ψ_μ в окрестности точки a_2

$$\begin{aligned} (2) \quad \psi &= \varphi(\mu) + f(\lambda) + o(\varphi) + o(f) = |\mu|^{n+o} + \lambda^n + \dots \\ \psi_\lambda &= f'(\lambda) + \alpha\varphi(\mu) + o(\varphi) + o(f') = \alpha|\mu|^{n-1} - n\lambda^{n-1} + \dots \\ \psi_\mu &= \varphi'(\mu) - \alpha f(\lambda) + o(\varphi') + o(f) = -n|\mu|^{n-1} + \alpha\lambda^n + \dots \\ \alpha^{-1} &= 6(M_0 - L_0) > 0 \end{aligned}$$

Установим наличие предельных линий в решении ψ в области ca_2d . В характеристических переменных

$$j = u\psi_v^2 - \psi_u^2 = (\sqrt{u}\psi_v - \psi_u)(\sqrt{u}\psi_v + \psi_u) = 4u\psi_u\psi_\lambda$$

поэтому с учетом (2) получим, что предельной линией $\psi_\lambda=0$ в ca_2d при $n > 1$ будет кривая $\lambda = (\alpha/n)^{1/(n-1)} |\mu|^{n/(n-1)}$, касающаяся в точке a_2 оси $-\mu$ (a_2e на фиг. 2). Предельная линия $\psi_\mu=0$ лежит вне области ca_2d .

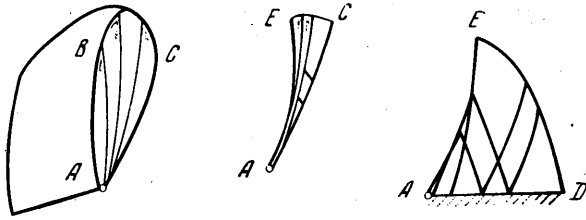
При $n < 1$ предельных линий в окрестности точки a_2 нет, т. е. при $n < 1$ построенное непрерывное решение физически осуществимо.

Далее будем рассматривать только случай $n > 1$.

На образе прямолинейной стенки da_2 будет $j = u\psi_e^2 \geq 0$, поэтому в области $da_2ej \geq 0$, а в $ca_2ej \leq 0$, т. е. знаки j одинаковы в областях ca_2e и a_1a_2c , лежащих на соседних листах плоскости годографа.

Это означает, что характеристика AC является краем складки не только в плоскости годографа, но и в физической плоскости.

Таким образом, физическая плоскость в окрестности точки A является трехлистной. На первом листе лежит дозвуковая область и область, покрываемая характеристиками узла. На втором листе, скрепленном с первым



Фиг. 3

вдоль характеристики AC , лежит прообраз области ca_2e . Третий лист скрепляется со вторым вдоль предельной линии AE — огибающей характеристик первого семейства. На нем лежит прообраз области ea_2d (фиг. 3).

Край складки — характеристика AC — не является предельной линией в обычном смысле слова, когда под ней понимается огибающая характеристик в физической плоскости, причем производные ψ_u, ψ_v в плоскости годографа непрерывны. Действительно, характеристика AC не может быть огибающей; производные ψ_u, ψ_v терпят на ней разрыв (члены более высокого порядка малости в асимптотическом разложении не могут изменить это свойство). Это обстоятельство, однако, не противоречит общей теории отображения плоских потенциальных течений в плоскость годографа.

Каждая характеристика второго семейства, выпущенная из звуковой линии, в месте встречи с характеристикой AC имеет точку возврата; вторую точку возврата она имеет на предельной линии AE .

Форма характеристик на каждом из листов физической плоскости показана на фиг. 3. Ее нетрудно установить, пользуясь уравнением характеристик ($dx/dy = \pm \sqrt{u}$) с учетом их расположения на листах плоскости годографа.

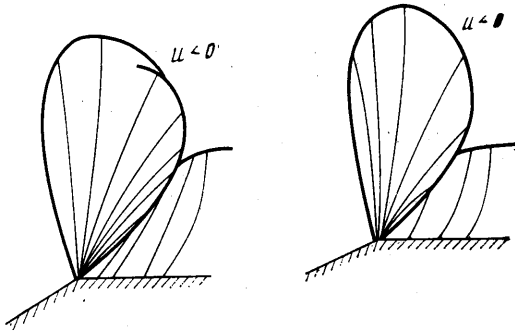
Построенное решение не осуществимо ввиду многолистности в физической плоскости. Поэтому если вниз по потоку от звуковой линии существует безотрывное течение, оно должно содержать скачок уплотнения. При этом, как будет отмечено ниже (и что соответствует теории [9]), течение в области за скачком в главном приближении описывается решением на третьем листе построенного формального решения.

В [3] показано, что скачок не может выходить из угловой точки, целиком располагаясь внутри области BAC (вблизи точки A). Отсюда следует, что скачок может начинаться только в точке A , касаясь характеристики AC . При дальнейшем распространении он пересекает характеристики узла, близкие к AC (фиг. 4).

Вблизи точки A скачок отклоняет вектор скорости против часовой стрелки (в системе координат фиг. 4), т. е. по терминологии [3] является скачком «первого семейства». В [3] было показано, что в окрестности своей

концевой точки скачок располагается ниже ее по потоку. Отсюда следует, что если за скачком, выходящим из точки A , скорость всюду сверхзвуковая, то он не может закончиться (с нулевой интенсивностью) на конечном расстоянии от тела.

Если характеристика AC находится в минимальной области влияния смешанного течения, то и скачок находится в этой области; так, например, будет, когда угловая точка вызывает образование местной сверхзвуковой зоны при определенном соотношении между углами наклона профиля в точке излома и скоростью набегающего потока. При этом гладкий скачок уплотнения на некотором своем участке будет ограничивать спереди область дозвуковых скоростей (фиг. 4). Вопрос осуществимости кон-



Фиг. 4

фигураций с гладким скачком, указанных на фиг. 4, требует специального исследования.

Если скачок находится вне минимальной области влияния смешанного течения, то он будет распространяться либо до бесконечности, либо до пересечения с головной ударной волной (при обтекании безграничным потоком сверхзвуковой скорости). Эти случаи исследовались в [3].

Задача построения течения со скачком уплотнения в данной работе не решается. Заметим только, что образы течения в областях до и после скачка лежат на разных листах плоскости годографа (решение перед скачком остается неизменным). Эти листы ограничены линиями $\lambda = \lambda_1(s)$, $\mu = \mu_1(s)$; $\lambda = \lambda_2(s)$, $\mu = \mu_2(s)$, изображающими скачок в области до и после скачка. Решение за скачком и эти кривые определяются по условиям непрерывности x , y и потенциала скорости в соответствующих точках (при одинаковых значениях s). Эти точки соединяются ударными полярами. Решение за скачком должно удовлетворять условию непротекания на прямолинейной стенке. Кроме того, оно не должно содержать предельных линий.

Анализ в первом приближении перечисленных условий с использованием асимптотических формул (2) позволяет определить решение за скачком: это будет решение за характеристикой AC , построенное выше. Для кривых, изображающих скачок, получаем оценки с учетом того, что при переходе через скачок скорость не возрастает

$$\lambda_1 = o(\mu_1), \quad \lambda_2 = o(\mu_2), \quad \mu_2 = \mu_1 + o(\mu_1^3), \quad \lambda_2 > \alpha |\mu_2|^{(n-1)/n}$$

при $\lambda, \mu \rightarrow 0$

Детальное определение формы скачка следует проводить с использованием вместо (2) формул, содержащих последующие члены асимптоти-

ческого разложения; не исключено, что могут оказаться существенными также члены более высокого порядка малости в выражении для решения $\psi_0(u, v)$ перед скачком уплотнения. Эта задача является предметом отдельного исследования.

В заключении отметим, что аналогичный анализ, проведенный для случая «отрыва» потока в точке A , т. е. когда вместо второго условия (2) задается условие $\psi=0$ при $u=u_{a_2}>0$ — условие постоянства давления в отрывной зоне, показал отсутствие предельных линий, выходящих из точки A , в области вниз по потоку от характеристики AC даже при $n>1$.

Поступила 24 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vaglio-Laurin R.* Transonic rotational flow over a convex corner. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 9, No. 1.
2. Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М., Грудницкий В. Г., Душин В. К., Иванов В. Ф., Лунькин Ю. П., Попов Ф. Д., Рябинков Г. М., Тимофеева Т. Я., Толстых А. И., Фомин В. Н., Шугаев Ф. В. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. М., ВЦ АН СССР, 1967.
3. Шифрин Э. Г. Образование «висячего» скачка уплотнения при обтекании профиля с изломом образующей. *ПММ*, 1970, т. 34, вып. 6.
4. Общая теория аэродинамики больших скоростей. М., Воениздат, 1962.
5. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Лифшиц Ю. Б., Шифрин Э. Г. К задаче о трансзвуковом обтекании выпуклого угла. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1971, № 2.
7. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Гостехиздат, 1948.
9. *Friedrichs K. O.* Formation and decay of shock waves. *Communs Appl. Math.*, 1948, No. 1.