

ОБТЕКАНИЕ ПОКРЫТОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКОЙ СФЕРЫ  
ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, А. Т. ЧАЛЮК

(Москва)

Методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Рейнольдса [1, 2] находится поле течения и определяется сила сопротивления при движении покрытой жидкой пленкой частицы в вязкой несжимаемой жидкости.

**1. Постановка задачи.** Предполагается, что покрытая жидкой пленкой твердая сферическая частица находится в установившемся поступательном потоке. Жидкости в пленке и в потоке вязкие, несжимаемые и не смешивающиеся. Внешняя поверхность пленки считается сферической, т. е. поверхностное натяжение достаточно велико по сравнению с градиентами давления. Центр  $O$  сферы, соответствующей внешней поверхности пленки, сдвинут относительно центра  $O'$  частицы в направлении потока (фиг. 1). Эксцентриситет считается малым по сравнению с радиусом внешней поверхности пленки (для наглядности точка  $O$  на фиг. 1 сдвинута вправо). Принимается также, что числа Рейнольдса, рассчитываемые по радиусу внешней поверхности пленки, скорости набегающего потока и вязкости внешней жидкости или жидкости в пленке, малы.

Рассмотрение ведется в переменных, отнесенных к радиусу внешней сферы  $a$ , скорости набегающего потока  $U$  и динамическому напору  $\rho U^2$  ( $\rho$  — плотность внешней жидкости).

Для описания осесимметричного движения жидкости внутри и вне пленки введем две полярные системы координат  $(r', \theta')$  и  $(r, \theta)$  с началом в точках  $O'$  и  $O$  соответственно (фиг. 1). Величины, относящиеся к жидкости в пленке, будем отмечать штрихом. Уравнения Навье — Стокса для введенных стандартным способом функций тока  $\psi'$  и  $\psi$  можно записать в виде

$$(1.1) \quad \frac{\gamma}{\chi R} D_{r'}^4 \psi' = \frac{1}{r'^2} \frac{\partial (\psi', D_{r'}^2 \psi')}{\partial (r', \mu')} + \frac{2}{r'^2} D_{r'}^2 \psi' L_r \psi'$$

$$\frac{1}{R} D_r^4 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\psi, D_r^2 \psi)}{\partial (r, \mu)} + \frac{2}{r^2} D_r^2 \psi L_r \psi$$

$$\mu' = \cos \theta', \quad \mu = \cos \theta, \quad D_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1 - \mu^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}$$

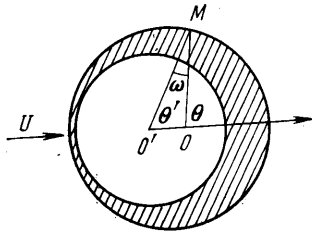
$$L_r = \frac{\mu}{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}$$

Здесь  $\chi, \gamma$  — отношение динамических вязкостей и плотностей жидкостей в потоке и пленке,  $R = Ua/\nu$  — число Рейнольдса в потоке,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости внешней жидкости.

Граничные условия: 1 — вдали от частицы — равномерность потока, 2 — на поверхности частицы — равенство нулю вектора скорости жидкости в пленке, 3 — на внешней границе пленки:  $a$  — равенство нулю нормальных составляющих скоростей жидкости вне и внутри пленки,  $b$  —

непрерывность касательных составляющих скоростей,  $e$  — непрерывность касательных напряжений,  $z$ -равенство нормальных напряжений с учетом сил поверхностного натяжения.

Эта система граничных условий является полной для задачи с неизвестной формой поверхности пленки. Будем считать внешнюю поверхность пленки сферической и получим решение задачи без учета граничного условия  $3z$ , которое содержит информацию о форме этой поверхности. Поверхность пленки можно приближенно считать сферической, если силы поверхностного натяжения велики по сравнению с силами, возникающими за счет неравномерности давления и стремящимися изменить форму поверхности. Можно показать [3], что в этом случае должны выполняться условия



Фиг. 1

$$\frac{1}{R'} \ll \frac{1}{W}, \quad \frac{1}{R} \ll \frac{1}{W}, \quad R' = \frac{\kappa}{\gamma} R, \quad W = \frac{\rho a U^2}{\alpha}$$

Здесь  $W$  — число Вебера,  $1/R'$  и  $1/R$  — порядки безразмерных нормальных составляющих тензоров напряжений для жидкости внутри и вне пленки соответственно,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения. Следовательно, при сделанных предположениях относительно чисел Рейнольдса число Вебера также должно быть малым.

После решения задачи малое искажение сферической формы пленки может быть определено из условия  $3z$ .

Граничные условия 1 и 2 имеют вид

$$(1.2) \quad r \rightarrow \infty, \quad \psi = 1/2 r^2 (1 - \mu^2)$$

$$(1.3) \quad r' = \lambda, \quad \psi' = 0, \quad \partial \psi' / \partial r' = 0$$

Здесь  $\lambda$  — отношение радиуса частицы  $a'$  к радиусу пленки  $a$ .

При записи граничных условий 3, как и всюду в дальнейшем, будем считать относительный эксцентриситет  $e$  наружной и внутренней сфер (т. е. безразмерное расстояние  $OO'$  на фиг. 1) малым по сравнению с единицей и пренебрегать членами порядка  $O(e^2)$ . В этом приближении координаты произвольной точки  $M$  на границе раздела пленка — внешняя жидкость в системе  $r', \theta'$  будут  $1 + e\mu'$ ,  $\theta'$ , а угол  $\omega$  между  $r$  и  $r'$  в точке  $M$  равен  $e(1 - \mu'^2)^{1/2}$ . Условия 3а и 3б можно записать в виде

$$(1.4) \quad r' = 1 + e\mu', \quad \frac{\partial \psi'}{\partial \mu'} + e \frac{\partial \psi'}{\partial r'} = 0, \quad r = 1, \quad \psi = 0$$

$$(1.5) \quad r' = 1 + e\mu', \quad r = 1, \quad \partial \psi' / \partial r' = \partial \psi / \partial r$$

При записи условия (1.5) использовано первое условие (1.4) и соотношение

$$(1.6) \quad (1 - \mu^2)^{1/2} = (1 + e\mu') (1 - \mu'^2)^{1/2}$$

Для касательных составляющих тензора напряжений в системе  $r'\theta'$  и  $r\theta$  имеем

$$\tau = \tau_{r'\theta'} - e(1 - \mu'^2)^{1/2} (\tau_{r'r'} - \tau_{\theta'\theta'}), \quad \tau = \tau_{r\theta}$$

Выражая составляющие тензора напряжений через функцию тока и вновь используя соотношение (1.6) и первое условие (1.4), запишем условие 3в в виде

$$(1.7) \quad \frac{1-\mu'^2}{r'^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \mu'^2} + 2 \frac{\partial \psi'}{\partial r'} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial r'^2} + 4e(1-\mu'^2) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \mu' \partial r'} = \\ = \kappa \left[ (1-\mu^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right], \quad r'=1+e\mu', \quad r=1$$

Таким образом, задача сводится к решению системы (1.1) с условиями (1.2)–(1.5), (1.7).

**2. Решение задачи методом срачиваемых асимптотических разложений. Нулевое приближение.** Следуя методу [1, 2], область вне покрытой пленкой сферы разбиваем на внешнюю  $O(R^{-1}) < r \leq \infty$  и внутреннюю  $1 \leq r < O(R^{-1})$ . Для внешней области вводим сжатую радиальную координату  $\rho = Rr$  и функцию тока  $\psi^* = R^2\psi$ . Уравнение для  $\psi^*$  согласно (1.1) имеет вид

$$(2.1) \quad D_\rho^4 \psi^* = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\psi^*, D_\rho^2 \psi^*)}{\partial(\rho, \mu)} + \frac{2}{\rho^2} D_\rho^2 \psi^* L_\rho \psi^*$$

Функция тока  $\psi$  для внутренней области описывается вторым уравнением (1.1).

Асимптотические разложения для функций  $\psi^*$  и  $\psi$  имеют форму

$$(2.2) \quad \psi^* = \psi^{(0)} + \alpha^{(1)}(R) \psi^{(1)} + \dots, \quad \alpha^{(1)}(R) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 0$$

$$(2.3) \quad \psi = \psi_0 + \alpha_1(R) \psi_1 + \dots, \quad \alpha_1(R) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 0$$

Из граничных условий следует аналогичное разложение для функции тока  $\psi'$ :

$$(2.4) \quad \psi' = \psi_0' + \alpha_1(R) \psi_1' + \dots$$

Функция  $\psi^*$  удовлетворяет уравнению (2.1) и условию, вытекающему из (1.2)

$$(2.5) \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \psi^* = 1/2 \rho^2 (1 - \mu^2)$$

Функция  $\psi$  удовлетворяет второму уравнению (1.1), второму условию (1.4), условиям (1.5) и (1.7). Наконец, функция  $\psi'$  удовлетворяет первому уравнению (1.1), условиям (1.3), первому условию (1.4) и условиям (1.5) и (1.7), в которых  $\psi = \psi_*$ . Остающиеся при этом неизвестными постоянные находятся срачиванием разложений (2.2) и (2.3).

Решая задачу (2.1), (2.5), для  $\psi^{(0)}$  получим

$$(2.6) \quad \psi^{(0)} = 1/2 \rho^2 (1 - \mu^2)$$

Для нулевого члена внутреннего разложения согласно второму уравнению (1.1) имеем бигармоническое уравнение  $D_r^4 \psi_0 = 0$ , общее решение которого, не имеющее особенностей по  $\mu$  и исчезающее благодаря симметрии при  $\mu = \pm 1$ , с учетом второго условия (1.4) и условия срачивания с (2.6) имеет вид

$$(2.7) \quad \psi_0 = [-r^2 + b_1 r^{-1} + (1 - b_1) r] Q_1(\mu) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} b_n r^{-n} (1 - r^2) Q_n(\mu), \quad Q_n(\mu) = \int_{-1}^{\mu} P_n(\mu) d\mu$$

Здесь  $P_n(\mu)$  — полином Лежандра.

Аналогично для нулевого члена разложения функции тока, описывающей течение в пленке (в системе  $r', \theta'$ ), первое уравнение (1.1) дает  $D_{r'} \psi_0' = 0$ , откуда общее решение

$$(2.8) \quad \psi_0' = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r'^{n+3} + B_n r'^{-n} + C_n r'^{n+1} + D_n r'^{-n+2}) Q_n(\mu')$$

Для определения постоянных  $b_n, A_n, B_n, C_n, D_n$  используем условие (1.3), первое условие (1.4) и (1.5), (1.7).

Исходя из вида граничных условий удобно искать эти постоянные, разлагая их в ряды по степеням  $\epsilon$  и ограничиваясь первыми членами разложений. Например

$$(2.9) \quad b_n = b_n^{\circ} + \epsilon b_n^{\epsilon}$$

и аналогично для  $A_n, \dots, D_n$ . При этом нулевые члены разложений соответствуют концентрической пленке.

Можно показать, что

$$(2.10) \quad b_n^{\circ} = A_n^{\circ} = B_n^{\circ} = C_n^{\circ} = D_n^{\circ} = 0, \quad n \neq 1$$

Действительно, после подстановки (2.7), (2.8) в граничные условия получим для каждого набора  $A_n^{\circ}, B_n^{\circ}, C_n^{\circ}, D_n^{\circ}, b_n^{\circ}$  линейную систему, матрица которой имеет вид

$$(2.11) \quad \begin{vmatrix} \lambda^{n+3} & \lambda^{-n} & \lambda^{n+1} & \lambda^{-n+2} & 0 & 0 \\ (n+3)\lambda^{n+2} & -n\lambda^{-n-1} & (n+1)\lambda^n & (-n+2)\lambda^{-n+1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ n+3 & -n & n+1 & -n+2 & 2 & -\delta_{n1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\kappa & 0 \end{vmatrix}$$

Здесь  $\delta_{nk}$  — символ Кронекера.

Исследуем определитель системы  $\Delta(\kappa, \lambda)$

$$(2.12) \quad \Delta(\kappa, \lambda) = 2[2\lambda^{2n+3} - (2n+1)\lambda^4 + 2n+1 - 2\lambda^{-2n+1}] - \\ - \kappa[4\lambda^{2n+3} - (2n+1)^2\lambda^4 + 2(2n-1)(2n+3)\lambda^2 - (2n+1)^2 + 4\lambda^{-2n+1}]$$

Можно убедиться, что для  $0 < \lambda < 1$  определитель (2.12) отличен от нуля и выполняются равенства (2.10).

Коэффициенты  $b_1^{\circ}, A_1^{\circ}, \dots, D_1^{\circ}$  имеют вид

$$(2.13) \quad b_1^{\circ} = -1/2 K(\kappa, \lambda), \quad K(\kappa, \lambda) = \left[ 1 + \kappa \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{\lambda}{1+1/2\lambda+\lambda^2} \right) \right]^{-1}$$

$$(A_1^{\circ}, B_1^{\circ}, C_1^{\circ}, D_1^{\circ}) = (1 + 1/2\lambda - 1/2\lambda^3 - \lambda^4)^{-1} \kappa K(\kappa, \lambda) (A_1^{\circ*}, B_1^{\circ*}, C_1^{\circ*}, D_1^{\circ*})$$

$$A_1^{\circ*} = -1/2(1 + 1/2\lambda), \quad C_1^{\circ*} = 1/2(1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 3/2\lambda^3)$$

$$B_1^{\circ*} = 1/4\lambda^3(1 + 2\lambda), \quad D_1^{\circ*} = -3/4(1 + 2\lambda + 4/3\lambda^2 + 2/3\lambda^3)\lambda$$

Найдем все  $b_n^{\epsilon}, A_n^{\epsilon}, B_n^{\epsilon}, C_n^{\epsilon}, D_n^{\epsilon}$ . Из граничных условий имеем систему уравнений, матрица которой отличается от (2.11) лишь последним столбцом, равным

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta_{n2} (4A_1^{\circ} - B_1^{\circ} + 2C_1^{\circ} + D_1^{\circ}) \\ -\delta_{n2} 6\kappa b_1^{\circ} \\ \delta_{n2} 3B_1^{\circ} \end{bmatrix}$$

Поэтому ненулевыми окажутся только коэффициенты с нижним индексом  $n=2$ , для которых получим

$$(2.14) \quad (A_2^e, B_2^e, C_2^e, D_2^e) = [(1-K)(A_2^{e*}, B_2^{e*}, C_2^{e*}, D_2^{e*}) + p(A_2^{e0}, B_2^{e0}, C_2^{e0}, D_2^{e0})] (4\lambda^{10} - 10\lambda^7 + 10\lambda^3 - 4)^{-1} \kappa K_1(\kappa, \lambda)$$

$$K_1(\kappa, \lambda) = \left[ 1 + \kappa \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left( 1 + \frac{8\lambda^5 + 24\lambda^4 + 41\lambda^3 + 24\lambda^2 + 8\lambda}{4\lambda^6 + 8\lambda^5 + 16\lambda^4 + 14\lambda^3 + 16\lambda^2 + 8\lambda + 4} \right) \right]^{-1}$$

$$p = 6B_1^0/\kappa - 6\kappa b_1^0$$

$$A_2^{e*} = 6\lambda^5/\kappa - 6\lambda^5 + 6, \quad A_2^{e0} = -3\lambda^5 + 5\lambda^3 - 2$$

$$B_2^{e*} = -6\lambda^5/\kappa + 15\lambda^7 - 15\lambda^5, \quad B_2^{e0} = 3\lambda^5 - 5\lambda^7 + 2\lambda^{10}$$

$$C_2^{e*} = -2[1/\kappa(5\lambda^7 + 2) - 5(\lambda^7 - 1)], \quad C_2^{e0} = 5\lambda^7 - 7\lambda^5 + 2$$

$$D_2^{e*} = 2\lambda^3[1/\kappa(5 + 2\lambda^7) - 1/2(21\lambda^2 + 4\lambda^7 - 25)],$$

$$D_2^{e0} = -5\lambda^3 + 7\lambda^5 - 2\lambda^{10}$$

$$b_2^e = 3B_1^0(K_1 - 1)\kappa^{-1} - 3\kappa b_1^0 K_1 + \frac{(1-K)K_1(15\lambda^5 + 30\lambda^4 + 24\lambda^3 + 18\lambda^2 + 12\lambda + 6)}{2(\lambda - 1)(\lambda + 1)(2\lambda^6 + 4\lambda^5 + 8\lambda^4 + 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda + 2)}$$

**3. Первое приближение.** Перейдем в (2.7) к внешней переменной. Из (2.7) получим  $\alpha'(R) = R$ . Используя результаты [2], можно показать, что двучленное разложение для функции  $\psi^*$  после сращения с (2.7) примет вид

$$(3.1) \quad \psi^* = 1/2\rho^2(1 - \mu^2) - R[1 + 1/2K(\kappa, \lambda)](1 + \mu)\{1 - \exp[1/2\rho(\mu - 1)]\}$$

Будем искать первое приближение для внутреннего разложения. Записывая (3.1) во внутренних переменных, находим  $\alpha_1(R) = R$ . Поскольку члены  $O(e^2)$ ,  $O(R^2)$  при решении отбрасываются, то будем опускать и члены порядка  $O(eR)$ . Подставляя (2.3), (2.4) в (1.1) с учетом (2.7), получаем уравнения для  $\psi_1', \psi_1$

$$(3.2) \quad D_r{}^4\psi_1' = -\frac{6D_1^0\kappa}{\gamma}(A_1^0 + B_1^0r'^{-5} + C_1^0r'^{-2} + D_1^0r'^{-3})Q_2(\mu')$$

$$(3.3) \quad D_r{}^4\psi_1 = -6(1 + 1/2K)[r^{-2} + 1/2Kr^{-5} - (1 + 1/2K)r^{-3}]Q_2(\mu)$$

Коэффициенты в правых частях определяются формулами (2.13). Решения этих уравнений, не имеющие особенностей по  $\mu$

$$(3.4) \quad \psi_1' = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^R r'^{n+3} + B_n^R r'^{-n} + C_n^R r'^{n+1} + D_n^R r'^{-n-2}) \times$$

$$\times Q_n(\mu') + \frac{D_1^0\kappa}{4\gamma}(A_1^0 r'^4 + B_1^0 r'^{-1} - C_1^0 r'^2 - D_1^0 r')Q_2(\mu')$$

$$(3.5) \quad \psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^R r^{n+3} + b_n^R r^{-n} + c_n^R r^{n+1} + d_n^R r^{-n-2}) \times$$

$$\times Q_n(\mu) + 1/4(1 + 1/2K)[r^2 - (1 + 1/2K)r - 1/2Kr^{-1}]Q_2(\mu)$$

В результате сращения двучленных разложений  $\psi^*$  и  $\psi$  получим  $a_n^R = 0, n=1, 2, \dots, c_n^R = 0, n \geq 2, c_1^R = -1/4(1 + 1/2K)$

Из второго условия (1.4) следует:

$$d_n^R = -b_n^R, \quad n \neq 1, 2, \quad d_1^R = -b_1^R + 1/4(1 + 1/2K),$$

$$d_2^R = -b_2^R + K/4(1 + 1/2K)$$

Выражение (3.5) примет вид

$$(3.6) \quad \psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^R r^{-n} (1-r^2) Q_n(\mu) + 1/4(1 + 1/2K) (r-r^2) Q_1(\mu) +$$

$$+ 1/4(1 + 1/2K) [r^2 - (1 + 1/2K)r + K - 1/2Kr^{-1}] Q_2(\mu)$$

Из граничных условий (1.4) — (1.7) для  $\psi_1'$ ,  $\psi_1$  получим систему уравнений для  $A_n^R, \dots, D_n^R, b_n^R$ , матрица которой совпадает с (2.11), за исключением последнего столбца, в данном случае имеющего вид

$$\left[ \begin{array}{l} -\delta_{n2} \frac{D_1^{\circ} \kappa}{4\gamma} (A_1^{\circ} \lambda^4 + B_1^{\circ} \lambda^{-1} - C_1^{\circ} \lambda^2 - D_1^{\circ} \lambda) \\ -\delta_{n2} \frac{D_1^{\circ} \kappa}{4\gamma} (4A_1^{\circ} \lambda^3 - B_1^{\circ} \lambda^{-2} - 2C_1^{\circ} \lambda - D_1^{\circ}) \\ \delta_{n2} \frac{D_1^{\circ} \kappa^2 K}{4\gamma} \\ \delta_{n2} \left[ 1/4(1 + 1/2K) - \frac{D_1^{\circ} \kappa}{4\gamma} (4A_1^{\circ} - B_1^{\circ} - 2C_1^{\circ} - D_1^{\circ}) \right] - \delta_{n1} 1/4(1 + 1/2K) \\ \delta_{n2} \frac{\kappa K}{10} \left[ \frac{D_1^{\circ} \kappa}{4\gamma} - 1/4(1 + 1/2K) \right] \end{array} \right]$$

Очевидно, не равны нулю лишь коэффициенты с нижними индексами  $n=1, 2$

$$(3.7) \quad (b_1^R, A_1^R, B_1^R, C_1^R, D_1^R) = 1/4(1 + 1/2K) (b_1^{\circ}, A_1^{\circ}, B_1^{\circ}, C_1^{\circ}, D_1^{\circ})$$

$$(3.8) \quad (A_2^R, B_2^R, C_2^R, D_2^R) = \frac{D_1^{\circ} \kappa^3 K K_1}{4\gamma} [(\lambda + 1)(2\lambda^2 + \lambda + 2) \times$$

$$\times (2\lambda^6 + 4\lambda^5 + 8\lambda^4 + 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda + 2)]^{-1} (A_2^{R*}, B_2^{R*}, C_2^{R*}, D_2^{R*})$$

$$A_2^{R*} = -\lambda^4(\lambda - 1)/\kappa - f(\lambda - 1)^{-1} (3\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 2) +$$

$$+ 1/4\lambda(\lambda + 1)^{-1} (4\lambda^5 + 5\lambda^3 + 30\lambda^2 + 30\lambda + 6)$$

$$B_2^{R*} = \lambda^4(\lambda - 1)/\kappa + f(\lambda - 1)^{-1} \lambda^5 (2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 3) -$$

$$- 1/4\lambda^4(\lambda + 1)^{-1} (6\lambda^5 + 30\lambda^4 + 30\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4)$$

$$C_2^{R*} = -\kappa^{-1}(\lambda - 1)^{-1} (\lambda^8 + 14\lambda^7 + 21\lambda^6 + 34\lambda^5 + 36\lambda^4 + 34\lambda^3 +$$

$$+ 21\lambda^2 + 10\lambda + 4) + f(\lambda - 1)^{-1} (5\lambda^5 + 10\lambda^4 + 8\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 2) +$$

$$+ 1/4(\lambda + 1)^{-1} (4\lambda^8 + 64\lambda^7 + 189\lambda^6 + 334\lambda^5 + 410\lambda^4 + 326\lambda^3 +$$

$$+ 166\lambda^2 + 66\lambda + 16)$$

$$D_2^{R*} = \kappa^{-1} \lambda^2 (\lambda - 1)^{-1} (4\lambda^8 + 10\lambda^7 + 21\lambda^6 + 34\lambda^5 + 36\lambda^4 + 34\lambda^3 +$$

$$+ 21\lambda^2 + 14\lambda + 1) - f\lambda^3 (\lambda - 1)^{-1} (2\lambda^5 + 4\lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + 10\lambda + 5) -$$

$$- 1/4(\lambda + 1)^{-1} (16\lambda^8 + 66\lambda^7 + 166\lambda^6 + 326\lambda^5 + 410\lambda^4 + 334\lambda^3 +$$

$$+ 189\lambda^2 + 64\lambda + 4)$$

Здесь  $f = (\lambda^2 + \lambda/2 + 1) [1/4(1 + 1/2K) (1 - 1/5K) + D_1^{\circ} \kappa K / 20\gamma] (D_1^{\circ} \kappa^2 K / 4\gamma)^{-1}$ ,  $K_1(\lambda, \lambda)$  вычисляется по формуле (2.14)

$$(3.9) \quad b_2^R = 1/8 K_1 (1 + 1/2K) + 1/10 [D_1^{\circ} \kappa K / 4\gamma - 1/4 K (1 + 1/2K)] (K_1 - 1) -$$

$$- \frac{D_1^{\circ} \kappa^2 K K_1}{16\gamma} \frac{\lambda(\lambda - 1) (6\lambda^6 + 30\lambda^5 + 36\lambda^4 + 31\lambda^3 + 36\lambda^2 + 30\lambda + 6)}{(\lambda + 1) (2\lambda^2 + \lambda + 2) (2\lambda^6 + 4\lambda^5 + 8\lambda^4 + 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda + 2)}$$

Окончательный вид двучленного разложения функции тока

$$(3.10) \quad \psi_* = [1 + \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}K)R] [-r^2 + (1 + \frac{1}{2}K)r - \frac{1}{2}Kr^{-1}] Q_1(\mu) + \\ + e b_2^e (r^{-2} - 1) Q_2(\mu) + R \{ b_2^R (r^{-2} - 1) + \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}K) [r^2 - \\ - (1 + \frac{1}{2}K)r + K - \frac{1}{2}Kr^{-1}] \} Q_2(\mu)$$

Из формулы (3.10) можно получить известные случаи, соответствующие обтеканию твердой частицы и капли. Так, переходя в формулах для коэффициентов  $K$ ,  $b_2^R$ ,  $b_2^e$ , ... к пределу при  $\lambda \rightarrow 1$ , приходим к двучленному разложению функции тока вблизи твердой частицы, совпадающему с найденным в [1, 2].

Перейдя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , получим из (3.10) разложение функции тока вблизи капли

$$(3.11) \quad \psi_* = \left[ 1 + \frac{3+2\kappa}{8(1+\kappa)} R \right] \left[ -r^2 + \frac{3+2\kappa}{2(1+\kappa)} r - \frac{1}{2(1+\kappa)} r^{-1} \right] Q_1(\mu) + \\ + \frac{R}{8} \frac{3+2\kappa}{1+\kappa} \left[ r^2 - \frac{3+2\kappa}{2(1+\kappa)} r - \frac{1}{2(1+\kappa)} r^{-1} + \frac{5+4\kappa}{10(1+\kappa)^2} + \frac{5+6\kappa}{10(1+\kappa)^2} r^{-2} \right] Q_2(\mu)$$

Этот результат в точности совпадает с полученным в [3] двучленным разложением функции тока в случае обтекания жидкой капли (при  $\kappa \rightarrow 0$  опять приходим к случаю твердой сферы). При  $R=0$  из (3.11) получаем известную формулу Рыбчинского — Адамара. Если в полученном выражении (3.10) для поля обтекания положить  $e=0$ ,  $R=0$ , то придем к результатам работы [4], где рассматривалось стоксово обтекание частицы, покрытой концентрической пленкой.

**4. Приближение тонкой пленки. Поле скоростей.** Введем локальную относительную толщину пленки следующим образом:

$$(4.1) \quad h = h_0 + e\mu^4, \quad h_0 = (a - a')/a$$

Здесь  $h_0$  — средняя относительная толщина.

Рассмотрим полученные ранее результаты в приближении тонкой пленки, т. е. потребуем выполнения неравенства  $h \ll 1$ . Тогда из (4.1) следует  $h_0 \ll 1$ . Членами  $O(h^2)$ ,  $O(h_0^2)$  будем пренебрегать.

Величины, входящие в (3.10), имеют в приближении тонкой пленки вид

$$(4.2) \quad K = (1 + \frac{3}{4}\kappa h_0)', \quad K_1 = (1 + \frac{5}{4}\kappa h_0)^{-1} \\ b_2^R = \frac{1}{8}(1 + \frac{1}{2}K)(1 + \frac{1}{4}\kappa h_0 K) K_1, \quad b_2^e = \frac{3}{8}\kappa K K_1$$

При выводе уравнений (3.2), (3.3) в правой части были отброшены члены, пропорциональные  $eR$ . Порядок отброшенных в разложении для функции тока  $\psi$  членов равен  $O(eRb_2^e)$ . В приближении тонкой пленки  $eRb_2^e \sim \frac{3}{8}\kappa eR$ . Следовательно, отброшенные члены будут высшего порядка малости по сравнению с оставленными, если считать  $\kappa \leq O(1)$ . Для эксцентрической тонкой пленки, очевидно,  $O(e/h_0) \sim 1$ , поэтому наряду с членами  $\sim O(\kappa eR)$  будем пренебрегать членами  $\sim O(\kappa h_0 R)$ .

Вычислим компоненты скорости в пленке. Введем новую координату  $y$ , отсчитываемую внутрь пленки от ее границы по радиусу  $r'$  до поверхности твердой сферы и нормированную на локальную относительную толщину пленки

$$(4.3) \quad y = (1 + e\mu' - r')/h$$

Можно убедиться, что  $v_{r'} \sim O(h^2)$ , поэтому существенной внутри пленки является лишь касательная составляющая скорости. Исходя из разложений (2.4), (2.8) и (3.4) получаем

$$(4.4) \quad v_{\theta'} = -(r\sqrt{1-\mu'^2})^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial r'} = {}^{1/2}\sqrt{1-\mu'^2} [1+{}^{1/4}(1+{}^{1/2}K)R] \times \\ \times (4A_1^{\circ} r'^2 - B_1^{\circ} r'^{-3} + 2C_1^{\circ} + D_1^{\circ} r'^{-1}) + {}^{1/2}\mu' \sqrt{1-\mu'^2} \times \\ \times \left\{ e(5A_2^e r'^3 - 2B_2^e r'^{-4} + 3C_2^e r') + R \left[ 5A_2^R r'^3 - 2B_2^R r'^{-4} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3C_2^R r' + \frac{D_1^{\circ} \kappa}{4\gamma} (4A_1^{\circ} r'^2 - B_1^{\circ} r'^{-3} - 2C_1^{\circ} - D_1^{\circ} r'^{-1}) \right] \right\}$$

Выражая  $r'$  из (4.3) и подставляя в (4.4), с учетом (2.13), (2.14), (3.8) получаем формулу для  $v_{\theta'}$  в тонкой пленке

$$(4.5) \quad v_{\theta'} = {}^{3/8}\kappa h K \sqrt{1-\mu'^2} [-1+{}^{1/8}R(-3+4\mu')] (1-4y+3y^2) + \\ + {}^{9/8}\kappa e K \mu'^2 \sqrt{1-\mu'^2} (1-y)^2$$

При  $e=0$ ,  $R=0$  этот результат переходит в формулу для касательной составляющей скорости в концентрической жидкой пленке для стока обтекания [4].

**5. Граница стационарного вихря.** Предположим, как и в [2], что полученные формулы для поля скоростей вблизи частицы сохраняют силу при числах Рейнольдса, существенно превышающих единицу. Исследуем влияние пленки на возникновение и форму стационарного вихря. При этом можно рассчитывать по крайней мере на адекватное качественное описание поля течения. Из выражения (3.10) для функции тока  $\psi$  видно, что  $\psi$  обращается в нуль на оси симметрии, на поверхности пленки, а также вдоль линии, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$(5.1) \quad \mu = \frac{[1+{}^{1/4}(1+{}^{1/2}K)R] (r^{-1/2}K - {}^{1/2}Kr^{-1})}{{}^{1/4}(1+{}^{1/2}K)R [r^{-1/2}K + {}^{1/2}Kr^{-1} - 4b_2^R (1+{}^{1/2}K)^{-1} (r^{-1} + r^{-2})] - eb_2^e (r^{-1} + r^{-2})}$$

Кривая (5.1) представляет собой границу стационарного вихря (границу области замкнутых линий тока). Исследовать (5.1) в общем виде трудно из-за сложных выражений для коэффициентов  $b_2^R, b_2^e, \dots$ , поэтому рассмотрим (5.1) в приближении тонкой пленки, введенном в п.4. При этом будем учитывать все принятые ранее допущения, а именно считать  $\kappa \sim O(1)$  и пренебрегать членами  $\sim O(\kappa eR)$ ,  $O(\kappa h_0 R)$ ,  $O(\kappa^2 h_0^2)$ . Кривая (5.1), очевидно, симметрична относительно линии  $\mu = \pm 1$ . Точка их пересечения даст координату  $r_s$  кормовой точки области с замкнутой циркуляцией. Используя формулы (4.2), выпишем уравнение для  $r_s$ , положив в (5.1)  $\mu = 1$

$$(5.2) \quad 2(1+{}^{11/4}\kappa h_0) r_s^3 - (1+2\kappa h_0) r_s^2 - ({}^{3/8}R + 1 + 2\kappa h_0 - \\ - {}^{3/4}\kappa e) r_s + {}^{3/8}R + {}^{3/4}\kappa e = 0$$

Легко проверить, что один из корней этого уравнения равен  $r_{s1} = 1 - \kappa h_0$ . Два других корня находятся из квадратного уравнения

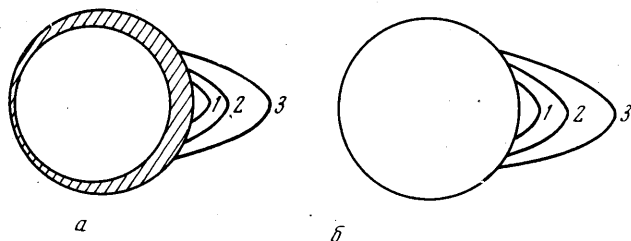
$$(5.3) \quad 2(1+{}^{11/4}\kappa h_0) r_s^2 + (1+{}^{3/2}\kappa h_0) r_s - {}^{3/8}R + {}^{3/4}\kappa e - {}^{3/2}\kappa h_0 = 0 \\ r_{s2, s3} = \frac{- (1+{}^{3/2}\kappa h_0) \pm \sqrt{(1+{}^{3/2}\kappa h_0)^2 + 8(1+{}^{11/4}\kappa h_0) ({}^{3/8}R + {}^{3/4}\kappa e - {}^{3/2}\kappa h_0)}}{4(1+{}^{11/4}\kappa h_0)}$$



Следовательно, впервые в поле течения ( $r_s \geq 1$ ) область замкнутых линий тока (стационарный вихрь) появляется при числах Рейнольдса, равных

$$(5.4) \quad R = 8 + \frac{44}{3} \kappa h_0 + 2 \kappa e$$

Отсюда для  $h_0 = 0$ ,  $e = 0$  (или  $\kappa = 0$ ) получаем значение числа Рейнольдса  $R = 8$ , при котором за твердой сферой впервые возникнет стационарный вихрь [2].



Фиг. 2

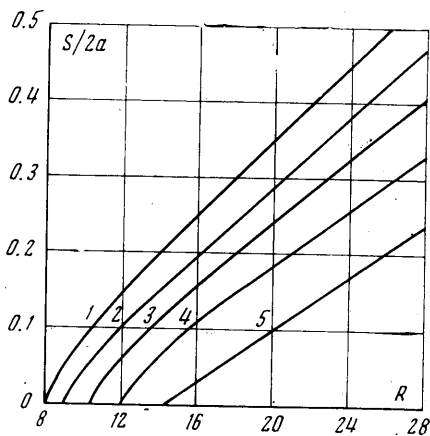
Формула (5.4) показывает, что стационарный вихрь за частицей, покрытой жидкой пленкой, появляется при больших значениях числа Рейнольдса, чем за твердой сферой.

На фиг. 2, а показаны определяемые формулой (5.1) границы стационарного вихря для различных значений  $R$  в случае тонкой пленки ( $h_0 = 0.1$ ,  $e = 0.1$ ,  $\kappa = 0.5$ ). На фиг. 2, б для сравнения даны границы стационарного вихря для сферической частицы в отсутствие пленки. Кривым 1, 2, 3 соответствуют значения  $R = 12, 17, 27$ .

На фиг. 3 построен график зависимости  $S/2a$  от числа Рейнольдса для различных значений  $\kappa$ . Величину  $S = r_s - a$  можно интерпретировать как размер области с замкнутой циркуляцией. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 построены соответственно для  $\kappa = 0, 1/2, 1, 2, 4$ . Результаты показывают, что с ростом  $\kappa$  происходит сдвиг области замкнутых линий тока к поверхности частицы и вихрь возникает при больших числах Рейнольдса (например,  $R = 14.7$  при  $\kappa = 4$ ). Наличие пленки на частице расширяет диапазон чисел Рейнольдса, при которых возможно обтекание без образования вихрей в кормовой области.

Если направление набегающего потока (фиг. 1) изменить на противоположное, пленка окажется смещенной относительно частицы навстречу потоку. Тогда, как легко проверить, во всех полученных формулах члены, пропорциональные эксцентриситету  $e$ , изменят знак. Для краткости будем называть этот случай вторым, а рассмотренный в задаче — первым.

Остановимся на условиях образования зоны с циркуляцией за частицей во втором случае. Из (5.4) видно, что стационарный вихрь появляется в поле течения при числах Рейнольдса, меньших, чем в первом случае. Это означает, что при достаточно большом фиксированном значении числа



Фиг. 3

Рейнольдса область замкнутых линий тока за частицей во втором случае займет большую часть пространства, чем в первом. Следовательно, размер зоны с замкнутой циркуляцией во втором случае больше, чем в первом, и наклон кривых на фиг. 3 для второго случая должен быть меньше по сравнению с изображенным. Если обратиться к фиг. 2, то можно утверждать, что границы стационарного вихря для различных  $R$  во втором случае будут лежать между соответствующими кривыми, изображенными на фиг. 2, а и б.

**6. Сила сопротивления.** Будем считать силу сопротивления  $F$  безразмерной, отнесенной к стоксовой силе сопротивления твердой частицы радиуса  $a$

$$(6.1) \quad F = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left[ \left( -pR - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu \partial r} \right) \mu - \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \right]_{r=1} d\mu$$

Здесь  $p$  — безразмерное давление (отнесенное к  $\rho U^2$ ), которое находится в результате интегрирования уравнения движения, записанного для функции тока  $\psi$

$$(6.2) \quad R \frac{\partial p}{\partial \mu} = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial \mu^2 \partial r} - \frac{R}{1-\mu^2} \left[ \frac{\mu}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu \partial r} \right]$$

Используя выражение (3.40) для функции тока  $\psi$ , из (6.2) получим

$$(6.3) \quad Rp = - \left[ 1 + \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{2} K) R \right] (1 + \frac{1}{2} K) \mu + O(eR) + O(R^2)$$

Здесь опущены несущественные для дальнейшего аддитивные константы и члены, пропорциональные  $\mu^2$ .

Подставляя (6.3) в (6.1), находим

$$(6.4) \quad F = \frac{2}{3} [1 + \frac{1}{2} K(\kappa, \lambda)] [1 + \frac{1}{4} \{1 + \frac{1}{2} K(\kappa, \lambda)\} R]$$

Здесь  $K(\kappa, \lambda)$  определяется по формуле (2.13).

Из выражения (6.4) можно получить силу сопротивления для твердой частицы и капли.

Так, при  $\lambda \rightarrow 1$  ( $\kappa \rightarrow 0$ ) имеем  $K=1$ , и (6.4) переходит в формулу Озена для твердой сферы радиуса  $a$ .

При  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $K(\kappa, 0) = (1+\kappa)^{-1}$  и (6.4) принимает вид

$$F = \frac{1 + \frac{2}{3} \kappa}{1 + \kappa} \left[ 1 + \frac{3}{8} \frac{1 + \frac{2}{3} \kappa}{1 + \kappa} R \right]$$

С точностью до малых членов, обусловленных деформацией капли, это выражение совпадает с формулой, найденной Акривосом и Тейлором [3] для силы сопротивления, действующей на жидкую каплю, форма которой слабо отличается от сферической.

В случае тонкой пленки запишем (6.4), вводя эффективный радиус  $a^*$  и эффективное число Рейнольдса  $R^*$ , в виде

$$(6.5) \quad F = \frac{a^*}{a} \left( 1 + \frac{3}{8} R^* \right), \quad a^* = a \frac{1 + \frac{1}{2} \kappa h_0}{1 + \frac{3}{4} \kappa h_0}, \quad R^* = \frac{U a^*}{\nu}$$

Рассмотрим отношение  $F/F_0 = f(\kappa, R^0, h_0)$ , где  $F_0$  — безразмерная сила сопротивления частицы в отсутствие пленки,  $R^0$  — число Рейнольдса, построенное по радиусу частицы. На фиг. 4 представлены результаты численного расчета зависимости  $f(\kappa, R^0, h_0)$  от толщины пленки  $h_0$  для различных значений  $\kappa$  и  $R^0$ . Сплошные, штрихпунктирные и пунктирные кривые соответствуют значениям  $R=0, 1, 8$ . Четыре пучка кривых, на-

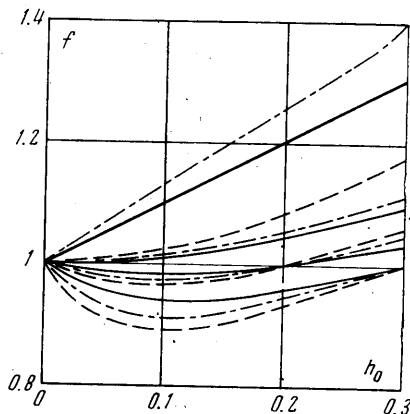
чина с верхнего, рассчитаны для  $\kappa=0, 4, 6.3, 10$ . Сплошные кривые соответствуют результатам, полученным в [4] для случая обтекания частицы, покрытой концентрической пленкой ( $e=0$ ), стоксовым потоком ( $R=0$ ).

Некоторые характерные особенности кривых можно установить аналитически. Функция  $f(\kappa, R^0, h_0)$  монотонно растет с ростом  $h_0$  при  $\kappa \leq 4$ . Если же  $\kappa > 4$ ,  $f(\kappa, R^0, h_0)$  убывает, достигая минимального значения в точке  $h_0 = (-4 + \sqrt{6\kappa - 8})/3\kappa$ ; после чего вновь начинает возрастать, становясь равной единице для любых чисел Рейнольдса при  $h_0^* = 1/2 - 2\kappa^{-1}$ .

Благодаря подвижности границы раздела пленка — внешняя жидкость градиенты скоростей на границе раздела меньше, чем на твердой границе. Это приводит к уменьшению диссипации энергии в потоке и, следовательно, силы сопротивления. С другой стороны, пленка увеличивает размеры частицы и вызывает рост силы сопротивления. Как видно из предыдущего анализа, преобладание одного из факторов (уменьшение диссипации и рост эффективных размеров частицы) над другим определяется отношением коэффициентов вязкости жидкостей в потоке и в пленке. При достаточно вязкой пленке ( $\kappa \leq 4$ ) сила сопротивления увеличивается, и тем больше, чем выше число Рейнольдса. Если, наоборот, жидкость в потоке более вязкая, чем в пленке, причем  $\kappa > 4$ , то нанесение жидкой пленки толщины  $h_0 < h_0^*$  уменьшает сопротивление твердой частицы.

Рост числа Рейнольдса способствует уменьшению силы сопротивления. Так, например, частица в потоке воды, покрытая жидкой пленкой при  $\kappa=10$ ,  $h_0=0.1$ , испытывает силу сопротивления, величина которой составляет 93% силы сопротивления той же частицы в отсутствие пленки, если считать число Рейнольдса бесконечно малым, и 86% для  $R=8$ .

Интересно также отметить, что при  $\kappa > 4$  пленка толщиной  $1/2 - 2\kappa^{-1}$  не меняет силы сопротивления частицы независимо от величины числа Рейнольдса.



Фиг. 4

Поступила 19 III 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. Праудман И., Пирсон Дж. Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра. В сб. «Механика», 1958, № 2 (48).
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
3. Acrivos A., Taylor T. D. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. J. Fluid Mech., 1964, No. 3 (18).
4. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. Обтекание тела, покрытого жидкой пленкой. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.