

СЖИМАЕМЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ СТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ И ОТСАСЫВАНИЯ

А. Н. САВОЩИК, А. Д. ТОХУНЦ

(Москва)

Одним из наиболее доступных для аналитического исследования классов трехмерных течений являются такие, для которых все кинематические и динамические характеристики потока будут зависеть от двух независимых переменных.

Этот случай имеет место при косом обтекании крыла бесконечного размаха, а с некоторым приближением и при боковом скольжении крыла конечного размаха на режиме нулевой подъемной силы.

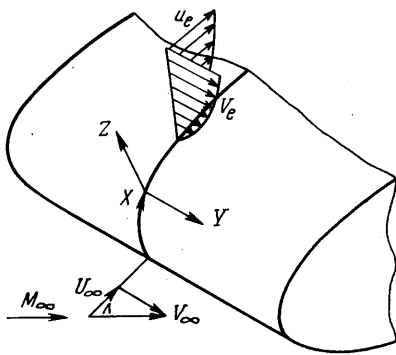
При обтекании скользящего крыла потоком несжимаемой жидкости течение в пограничном слое вдоль хорды не зависит от течения вдоль размаха [1, 2]. Это значительно упрощает задачу, позволяя решать ее в общем виде так, как аналогичные уравнения для плоского пограничного слоя [3, 4].

Для сжимаемого градиентного течения «принцип независимости» не имеет места даже при отсутствии теплопередачи, так как входящая в исходные уравнения величина плотности ρ является функцией результирующей скорости в пограничном слое. Это приводит в общем случае к необходимости совместного решения уравнений движения и энергии. Решение задачи о сжимаемом пограничном слое на скользящем крыле для случая отсутствия теплопередачи и в предположении, что число $Pr=1$, было дано в [5, 6].

Оба решения справедливы при условии, что число M для течения вдоль размаха не превышает единицы. В соответствии с этим при больших числах M невозмущенного потока эти решения применимы лишь для больших углов скольжения. В работе [7] рассмотрен случай изотермической стенки при произвольном числе Прандтля Pr и наличии теплопередачи.

В данной работе наряду с допущениями о произвольности числа Pr во всей области течения и наличии теплопередачи на стенке последняя предполагается проницаемой, допускающей отсасывание (или вдув) через нее пограничного слоя. Такая постановка задачи представляет интерес при исследовании ламинаризации пограничного слоя на стреловидных крыльях. Последовательным применением переменных Стюартсона и Герглера система исходных уравнений сводится к виду, позволяющему решать ее непосредственным разложением составляющих скорости и температуры в пограничном слое в ряды относительно продольной координаты. При этом предполагается, что скорости потенциального потока и отсоса также допускают разложение в степенные ряды, сходящиеся в рассматриваемом интервале.

Решение полученных граничных задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений сводилось к задачам Коши, которые решались численно на ЭВМ. В результате расчетов вычислены и затабулированы уни-



Фиг. 1

версальные функции для течения на линии растекания стреловидного крыла для широкого диапазона значений параметра отсоса γ_0 . Частный случай $\gamma_0=0$ соответствует непроницаемой стенке и совпадает, естественно, с решениями, полученными ранее другими авторами.

1. Для случая трехмерного установившегося течения на стреловидном крыле бесконечного размаха при наличии распределенного отсасывания уравнения сжимаемого пограничного слоя и граничные условия имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + w \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial z} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{1}{Pr} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right]$$

$$p = \rho R T, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = C \frac{T}{T_0} \quad \left(C = \sqrt{\frac{T_w}{T_0} \frac{T_0 + T_s}{T_w + T_s}} \right)$$

$$(1.2) \quad u=v=0, w=w_w(x), H=H_w(z=0)$$

$$u \rightarrow u_e, v \rightarrow v_e, H \rightarrow H_e(z \rightarrow \infty)$$

Напомним, что здесь символ H обозначает переменную полную энтальпию газа в любой точке пограничного слоя. Условие $H=H_w$ соответствует наличию теплопередачи. Скорость $u_e(x)$ определяется обтеканием крыла в плоскости, перпендикулярной его оси, а v_e представляет собой трансверсальную компоненту скорости набегающего потока (фиг. 1).

Учитывая, что $v_e = \text{const}$ для скользящего крыла, а $\partial p / \partial z = 0$ в пограничном слое, уравнение Бернулли для внешнего потенциального течения можно записать в виде

$$(1.3) \quad \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

2. Воспользовавшись последовательно преобразованием Стюартсона и Гертлера

$$(2.1) \quad X = \int_0^x \chi_e^{(3h-1)/2(h-1)} dx, \quad Z = \chi_e^{(h+1)/2(h-1)} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dz, \quad \chi_e = \left(\frac{a_e}{a_0} \right)^2$$

$$U = \chi_e^{-1/2} u, \quad W = \chi_e^{-1/2} w, \quad V = \chi_e^{-1/2} v$$

$$(2.2) \quad \xi = \frac{1}{v} \int_0^X U_e(X) dX, \quad \eta = \frac{U_e(X) Z}{v \sqrt{2\xi}}$$

$$\bar{u} = \frac{U(X, Z)}{U_e(X)}, \quad \bar{w} = \frac{W(X, Z)}{U_e(X)}, \quad \bar{v} = \frac{V(X, Z)}{V_e}$$

систему (1.1) и граничные условия (1.2) приведем к безразмерному виду

$$2\xi \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = 2\xi \frac{U_e}{U_e} \left[1 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \frac{T_0}{T_{N_0}} (1 - \theta) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{T_0}{T_{No}} - 1 \right) (1 - \bar{v}^2) - u^2 \Big] + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} 2 \sqrt{\xi} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\bar{w}}{\sqrt{\xi}} = 0 \\
 (2.3) \quad & 2 \xi \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2} \\
 & 2 \xi \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \bar{w} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + 2 \xi \bar{u} (1 - \theta) \Pi(\xi) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - \\
 (2.4) \quad & - 2 \frac{1 - Pr}{Pr} \left\{ \Psi(\xi) \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 + \bar{u} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right) \right] + \Phi(\xi) \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right)^2 + \bar{v} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{w} = \gamma(\xi), \theta = 0 \quad (\eta = 0) \\
 & \bar{u} \rightarrow 1, \bar{v} \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow 1)
 \end{aligned}$$

$$\bar{w} = \left(\bar{w}^* + \frac{U_e}{U_e} \sqrt{2 \xi} \bar{u} \eta \right) \sqrt{2 \xi} - \bar{u} \eta, \quad \gamma(\xi) = - \frac{W_w(x)}{U_e(x)} \sqrt{2 \xi}$$

$$(2.5) \quad \beta(\xi) = 2 \frac{U_e}{U_e} \xi, \quad \Psi(\xi) = u_e^2 \chi_e \frac{k-1}{2 a_0^2 (1 - T_w/T_0)}$$

$$\Phi(\xi) = v_e^2 \frac{k-1}{2 a_0^2 (1 - T_w/T_0)}, \quad \Pi(\xi) = \frac{c_p (k-1)}{2 a_0^2 (1 - T_w/T_0)} \frac{\partial T_w}{\partial \xi}$$

Относительно функций $\beta(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ будем предполагать, что они допускают разложение в степенные ряды вида

$$(2.6) \quad \beta(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \xi^i, \quad \gamma(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) \gamma_i \xi^i$$

Допущение о существовании этих рядов, очевидно, равносильно определенным ограничениям, накладываемым на класс внешних скоростей $u_e(x)$ и скоростей отсоса $w_w(x)$. Нетрудно, однако, показать, что эти ограничения слабы с практической точки зрения и допускают рассмотрения весьма широкого класса функций $u_e(x)$ и $w_w(x)$ и, в частности, представляющего наибольший интерес случая потенциального течения около профиля, с поверхности которого осуществляется распределенное отсасывание по закону

$$(2.7) \quad w_w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i x^{2i}$$

При этом потенциальное течение около профиля обычно считается известным и задается в виде

$$(2.8) \quad u_e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i \quad (u_0 = 0)$$

Если распределение температуры на поверхности задано в виде

$$(2.9) \quad T_w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$$

то с учетом сказанного выше нетрудно показать, что функции $\Pi(\xi)$, $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ могут быть представлены в виде рядов

$$\begin{aligned} \Pi(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i \xi^i \quad \left(\Pi_0 = \frac{\alpha_1}{T_0 - T_{w(0)}} \right) \\ (2.10) \quad \psi(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \xi^i \quad (\psi_0 = 0) \\ \varphi(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \xi^i \quad \left(\varphi_0 = \left(\frac{1 - T_{N_0}}{T_0} \right) \left(\frac{1 - T_{w(0)}}{T_0} \right)^{-1} \right) \end{aligned}$$

Здесь $T_{w(0)}$ — температура на критической линии, т. е. при $\xi=0$. Система уравнений (2.3) позволяет непосредственно найти решение методом разложения в ряд в окрестности критической линии $\xi=0$.

Представим функции θ , u , v и w (для простоты отбросим черточки) соответственно рядами

$$(2.11) \quad f = f_0 + f_1 \xi + f_2 \xi^2 + \dots$$

где $f_i (i=0, 1, 2, \dots)$ — функции переменной η . Подставляя (2.5) и ряды для производных от θ , u , v и w в систему (2.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим ряд обыкновенных дифференциальных уравнений и граничные условия

$$\begin{aligned} (2.12) \quad & u_0'' - w_0 u_0' + \beta_0 \left[1 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \frac{T_0}{T_{N_0}} (1 - \theta) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{T_0}{T_{N_0}} - 1 \right) (1 - v_0^2) - u_0^2 \right] = 0 \\ & v_0'' - w_0 v_0' = 0 \\ & \theta_0'' - \text{Pr} w_0 \theta_0' = (1 - \text{Pr}) [\varphi_0 (v_0^2)'' + \psi_0 (u_0^2)'] \\ & u_0 + w_0' = 0 \\ (2.13) \quad & u_1 - w_0 u_1' - 2u_0 u_1 (\beta_0 + 1) - u_0' w_1 - 2\beta_0 v_0 v_1 = \beta_1 \left[(u_0^2 - 1) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{T_0}{T_{N_0}} - 1 \right) (1 - v_0^2) - \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \frac{T_0}{T_{N_0}} (1 - \theta_0) \right] \\ & 2u_0 v_1 + u_0 v_1' + w_1 v_0' - v_1 = 0 \\ & \theta_1'' - (2u_0 \theta_1 + w_0 \theta_1' + w_1 \theta_0') \text{Pr} + 2u_0 \Pi_0 (1 - \theta_0) = \\ & = (1 - \text{Pr}) [\psi_1 (u_0^2)'' + \varphi_1 (v_0^2)'] + 2(1 - \text{Pr}) [\psi_0 (u_0 u_1'' + u_0'' u_1) + \\ & + \varphi_0 (v_0 v_1'' + 2v_0' v_1' + v_0'' v_1)] \\ & 3u_1 + w_1' = 0 \\ & \dots \dots \dots \\ (2.14) \quad & u_0(0) = 0, w_0(0) = \gamma_0, v_0(0) = 0, \theta_0(0) = 0 \\ & u_0(\infty) = 1, v_0(\infty) = 1, \theta_0(\infty) = 1 \\ (2.15) \quad & u_1(0) = 0, w_1(0) = \gamma_1, v_1(0) = 0, \theta_1(0) = 0 \\ & u_1(\infty) = 0, v_1(\infty) = 0, \theta_1(\infty) = 0 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Следует отметить, что системы уравнений, которые рассматривались ранее [5-7], являются частным случаем системы (2.12) — (2.15).

3. Один из наиболее эффективных способов предотвращения турбулизации — отсасывание пограничного слоя [8]. Рассмотрим задачу о пограничном слое с отсосом вдоль линии растекания ($\xi=0$). Для этого случая при условии симметричного обтекания ($\beta_0=1$) уравнения пограничного слоя и граничные условия примут вид

$$u_0'' - w_0 u_0' + 1 + \left[\left(\frac{T_w}{T_0} \right) - 1 \right] \frac{T_0}{T_{N_0}} (1 - \theta) + \left(\frac{T_0}{T_{N_0}} - 1 \right) (1 - v_0^2) - u_0^2 = 0$$

$$(3.1) \quad v_0'' - w_0 v_0' = 0, \quad u_0 - w_0' = 0$$

$$(3.2) \quad \theta_0'' - \text{Pr} w_0 \theta_0' = (1 - \text{Pr}) \varphi_0 (v_0^2)''$$

$$u_0(0) = 0, \quad w_0(0) = \gamma_0, \quad v_0(0) = 0, \quad \theta_0(0) = 0$$

$$u_0(\infty) = 1, \quad v_0(\infty) = 1, \quad \theta_0(\infty) = 1$$

Если принять, что $w_0 = -F_0$, $v_0 = g_0$ и исключить из (3.1), (3.2) скорости u_0 , то получим

$$(3.3) \quad F_0''' + F_0 F_0'' = F_0'^2 - 1 - \left(\frac{T_0}{T_{N_0}} - 1 \right) (1 - g_0^2) - \frac{T_0}{T_{N_0}} \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) (1 - \theta_0)$$

$$g_0'' + F_0 g_0' = 0, \quad \left(\frac{T_0}{T_{N_0}} = \frac{1 + 1/2(k-1)M_\infty^2}{1 + 1/2(k-1)M_\infty^2 \cos^2 \Lambda} \right)$$

$$\theta_0'' + \text{Pr} F_0 \theta_0' = \frac{1 - \text{Pr}}{1 - T_w/T_0} \left(1 - \frac{T_{N_0}}{T_0} \right) (g_0^2)''$$

$$(3.4) \quad F_0(0) = \gamma_0, \quad F_0'(0) = g_0(0) = \theta_0(0) = 0$$

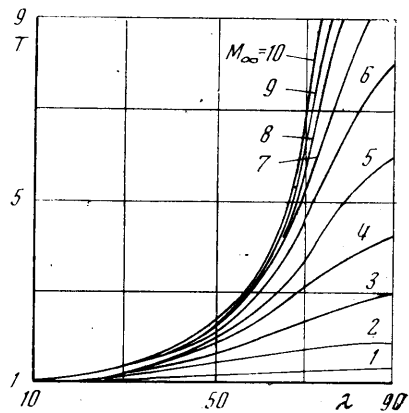
$$F_0'(\infty) = 1, \quad g_0(\infty) = 1, \quad \theta_0(\infty) = 1$$

Отношение $T = T_0/T_{N_0}$ объединяет влияние числа M_∞ и угла стреловидности Λ в единый параметр. На фиг. 2 показаны величины этого параметра для различных чисел M_∞ и углов стреловидности Λ .

Воспользовавшись соотношениями (2.1) и (2.2), нетрудно показать, что безразмерные составляющие скорости в пограничном слое вдоль хорды и размаха могут быть представлены соответственно в виде: $u/u_e = F_0'$, $v/v_e = g_0$.

Расстояние z по нормали к поверхности в физической плоскости связано с безразмерной координатой η соотношением

$$z = \frac{T_0}{T_w} \sqrt{\frac{\nu_w}{du_e/dxc}} \int_0^\eta \left[1 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times (1 - \theta_0) - \left(1 - \frac{T_{N_0}}{T_0} \right) g_0^2 \right] d\eta$$

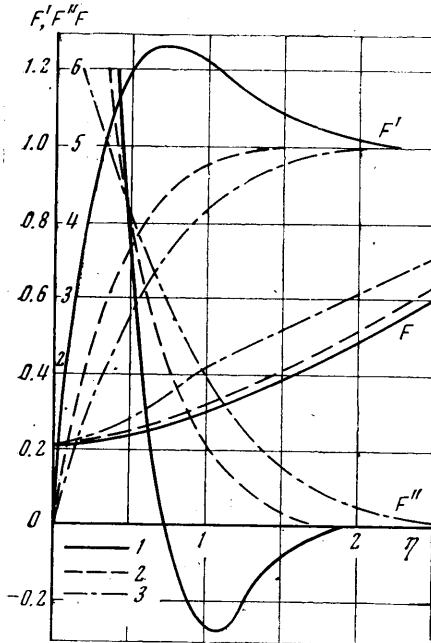


Фиг. 2

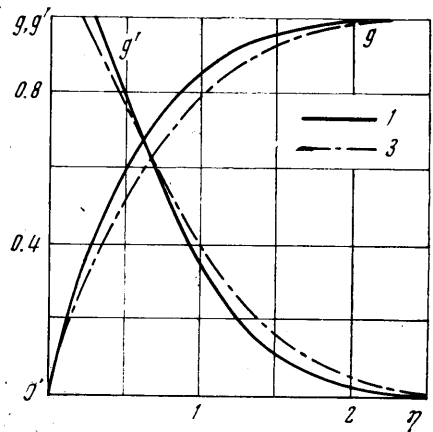
Заметим, что в случае $Pr=1$ система (3.3) заметно упрощается, причем решения для g_0 и θ_0 совпадают.

4. Решение полученных граничных задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) при различных числах сводилось к задачам Коши, которые затем решались численно на ЭВМ методом Рунге — Кутты.

Нетрудно заметить, что каждому уравнению нелинейной системы (3.3) недостает по одному условию для того, чтобы решить ее как задачу Коши. Для определения недостающих начальных условий использовался модифицированный метод Ньютона, предназначенный для решения системы нелинейных алгебраических уравнений вида:



Фиг. 3



Фиг. 4

$N_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - N_{i\infty} = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$). Использовалось предположение, что для больших значений η значения функции зависят от принятых начальных значений при $\eta=0$.

Ошибки в значениях функции при большом η определялись как

$$(4.1) \quad \begin{aligned} dF_{\infty}' &= \frac{\partial F_{\infty}'}{\partial F_0''} dF_0'' + \frac{\partial F_{\infty}'}{\partial g_0'} dg_0' + \frac{\partial F_{\infty}'}{\partial \theta_0'} d\theta_0' \\ d\theta_{\infty} &= \frac{\partial \theta_{\infty}}{\partial F_0''} dF_0'' + \frac{\partial \theta_{\infty}}{\partial g_0'} dg_0' + \frac{\partial \theta_{\infty}}{\partial \theta_0'} d\theta_0' \\ dg_{\infty} &= \frac{\partial g_{\infty}}{\partial F_0''} dF_0'' + \frac{\partial g_{\infty}}{\partial g_0'} dg_0' + \frac{\partial g_{\infty}}{\partial \theta_0'} d\theta_0' \end{aligned}$$

Частные производные в системе алгебраических уравнений (4.1) можно вычислить приближенно с помощью пробных решений.

Лучшее из этих решений (например, решение i) используется для определения ошибок.

$$\begin{aligned} dF_{\infty}' &= F'(\infty) - F_{\infty i}' = 1 - F_{\infty i}', & dg_{\infty} &= g(\infty) - g_{\infty i} = 1 - g_{\infty i} \\ d\theta_{\infty} &= \theta(\infty) - \theta_{\infty i} = 1 - \theta_{\infty i} \end{aligned}$$

где $F_{\infty i}'$, $g_{\infty i}$, $\theta_{\infty i}$ — вычисленные значения при большом η лучшего решения.

Затем решалась система (4.1) и определялись начальные значения $F_{03}'' = F_{0i}'' + dF_{0i}''$; $g_{03}' = g_{0i}' + dg_{0i}'$, $\theta_{03}' = \theta_{0i}' + d\theta_{0i}'$, которые могут быть использованы для повторения всего процесса до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Для определения зависимости количества итераций, необходимых для получения решения с заданной точностью, от точности задания начальных условий было прове-

дено специальное исследование. Оказалось, что метод обладает достаточно хорошей сходимостью даже при сравнительно грубом задании начальных приближений.

В большинстве случаев для достижения необходимой точности требовалось 4—6 пробных решения, а при грубом задании начальных приближений (разница между точным и приближенным значением достигала 2.5) количество пробных решений доходило до 12. Это свойство придает методу особую ценность (так как не всегда можно задать начальные приближения с хорошей точностью) и освобождает от дополнительной затраты усилий на поиски удовлетворительных начальных приближений.

Для определения правильности выбора шага в методе Рунге — Кутты использовался обычный прием двойного пересчета: один раз с шагом h , другой — с шагом $2h$. Если расхождение полученных значений не превышало допустимой погрешности (в данном случае 10^{-6}), то выбор шага считался правильным. На выбор шага влияла и устойчивость метода. Требованиям устойчивости процесса и точности решения удовлетворяло значение шага $h=0.025$.

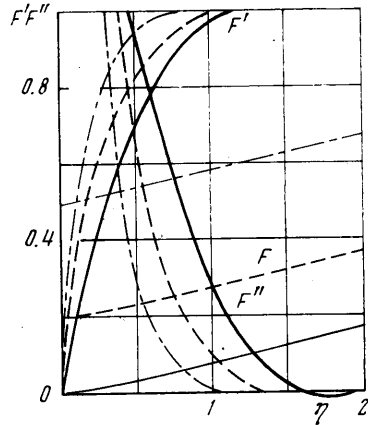
На фиг. 3, 4 приведены в качестве иллюстрации графики рассчитанных функций для ряда значений параметров γ_0 , T_0/T_{N_0} и T_w/T_0

$$\left(\begin{array}{l} 1 - \gamma_0 = 1, \quad \frac{T_0}{T_{N_0}} = 4, \quad \frac{T_w}{T_0} = 2; \quad 2 - \gamma_0 = 1, \\ \frac{T_0}{T_{N_0}} = 1, \quad \frac{T_w}{T_0} = 2; \quad 3 - \gamma_0 = 1, \quad \frac{T_0}{T_{N_0}} = 1, \quad \frac{T_w}{T_0} = 0 \end{array} \right)$$

Обращает на себя внимание то, что в случае нагреваемой стенки ($T_w/T_0 > 1$) скорость в некоторой области значений η внутри пограничного слоя может стать больше скорости внешнего потока.

Это объясняется сильным увеличением объема газа в слоях, близких к стенке, из-за значительного повышения температуры в пограничном слое. В результате внешние силы давления сообщают газу в пограничном слое, ставшему вследствие нагрева более легким, большее ускорение, чем во внешнем течении, несмотря на тормозящее влияние вязкости и наличие отсасывания. С увеличением значения параметра T_0/T_{N_0} этот эффект усиливается (фиг. 3, 4).

На фиг. 5 представлена зависимость профилей скорости продольного течения от параметра отсоса γ_0 . Видно, что отсасывание, увеличивая полноту профилей скорости, повышает их гидродинамическую устойчивость.



Фиг. 5

Поступила 16 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. On boundary layers in three-dimensional flow. Rep. and Trans., No. 64. British MAP Volkerode, May 1, 1946.
2. Струминский В. В. Скольжение крыла в вязком сжимаемом газе. Докл. АН СССР, 1946, т. 54, № 9.
3. Sears W. R. The boundary layer of yawed cylinders. J. Aeronaut. Sci., 1948, vol. 15, No. 1.
4. Wild J. M. The boundary layer of yawed infinite wings. Aeronaut. Sci., 1949, vol. 16, No. 1.
5. Crabtree L. F. The compressible laminar boundary layer on a yawed infinite wing. Aeronaut. Quart., 1954, vol. 5, No. 2.
6. Tinkler J. Effect of yaw on the compressible laminar boundary layer. Aero. Res. Council. London Rept Mem., 1957, No. 3005.
7. Reshotko E., Beckwith I. E. Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number. NASA Rept, 1958, No. 1379.
8. Pfeninger W. Flur Phenomena at the leading edge of swept wings. AGAR Dograph 97, pt 4, Recent Development in Boundary layer research, 1965.