УДК 539.374.1

О МОНОГРАФИИ П. М. ОГИБАЛОВА и А. Х. МИРЗАДЖАНЗАДЕ «НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ СРЕД»

(М., изд-во МГУ, 1970, 26 п. л., тир. 350 экз.)

Монография П. М. Огибалова и А. Х. Мирзаджанзаде, как указывается в аннотации на стр. 2, «...представляет собой систематическое исследование гидродинамики нестационарных движений вязко-пластичных сред на базе современных экспериментально-теоретических представлений». Книга предназначена «инженерам, научным работникам, аспирантам и студентам» и, кроме того, «она может служить учебным пособием по прикладной механике в университетах и высших технических учебных заведениях».

В предисловии к монографии указано, что в нее вошли и известные исследования, однако фактически она базируется на исследованиях, выполненных авторами и «под их руководством и при их участии» (предисловие, стр. 5). Тем самым авторы взяли на себя ответственность не только за качество книги, но и за многие из тех работ, на основании которых она была написана.

Ограниченные рамки рецензии не позволяют дать исчерпывающего анализа содержащихся в монографии дефектов (подробный разбор всех ошибок занял бы объем, соизмеримый с объемом книги). Поэтому ограничимся указанием лишь на некоторые из них.

1. Необходимо прежде всего отметить, что в монографии, содержащей систематическое исследование движений вязко-пластической среды, нет общей постановки задачи, которая, как известно, должна включать в себя не только уравнения, описывающие область течения, но и соотношения, связывающие решения этих уравнений с областями жесткого состояния среды. Значительная ее часть посвящена изучению механически неестественных задач, выбранных лишь потому, что соответствующие им краевые задачи для уравнения теплопроводности с помощью специальной замены переменных можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Использованный прием не позволяет рассматривать естественные для вязко-пластичной среды постановки задач (например, разгон течения в круглой трубе). Фактически получаемые в книге решения можно рассматривать как математические упражнения, уровень которых будет охарактеризован в п. 2.

С другой стороны, отсутствие четко сформулированной общей постановки задачи привело к тому, что и анализ построенных точных решений не доведен до конца (они составляют значительную часть монографии), а постановка некоторых задач просто ошибочна. Более подробно этот вопрос обсуждается в п. 3.

Вместе с тем монография содержит немало материала, не связанного с исследованием течений вязко-пластичной среды. Таковы, например, гл. VIII и § 6–8 гл. II и др.

Сами по себе сделанные выше замечания об отсутствии в монографии четкой научной направленности достаточны, чтобы усомниться в возможности использовать ее в качестве учебного пособия. Но даже и с чисто методической точки зрения книга обладает рядом серьезных погрешностей, часть из которых указана в п. 4 (помимо отсутствия в некоторых местах обозначений и невозможности прочесть и понять текст без обращения к первоисточникам, небрежного языка и т. п.).

Необходимо отметить и такое противоречие. Анализ физического строения дисперсных систем типа глинистых растворов, для описания механического поведения которых в определенных условиях используется модель вязко-пластичной среды, в § 1 гл. I завершается на стр. 17 следующим выводом: «Итак, реологическое поведение дисперсных систем, как следует из сказанного, не может быть описано с помощью единой зависимости $\tau(\dot{\gamma})$, за исключением случая медленных стационарных течений»[1].

Этот вывод никак не согласуется с названием монографии и остается неопровергнутым. Доказательств применимости модели вязко-пластической среды для описания нестационарных движений систем указанного типа в монографии нет.

Бесспорно, механические задачи, возникающие в процессе бурения и эксплуатации нефтяных скважин, представляют интерес. Однако монография не позволяет получить ясное представление о проблемах, возникающих в практической деятельности, и о подходах к их теоретическому описанию. Поэтому даже устранение указанных ниже ошибок и дефектов (где это возможно) не приведет к существенному улучшению книги.

---

[1] Этот вывод, как и несколько страниц предшествующего текста, принадлежит автору рецензии, что отмечено в предисловии к монографии.

2. Монография содержит грубые ошибки, допущенные в элементарном асимптотическом анализе поведения функций, областей применимости асимптотических формул при решении краевых задач.

а) На стр. 87 (глава III) формулу (1.13) с учетом формул (1.8) и (1.14) в обозначениях авторов можно записать в виде

$$v_3(h,t)=-V\left[\Phi\left(\frac{h\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\eta t}}\right)-\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}}\right)\right]\left[1-\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}}\right)\right]^{-1}-$$

$$-\frac{2\tau_0}{\rho\alpha}\sqrt{t}\exp\left(-\frac{\rho}{4\eta}\left(\frac{h^2}{t}-\alpha^2\right)\right)$$

$$\Phi(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \exp(-z^2)\,dz$$

Далее авторы пишут: «Как известно, при очень малых значениях времени $\Phi(h\sqrt{\rho}/\sqrt{2\eta t})=1$». Отсюда получается приводимая ниже асимптотическая формула (1.15)

$$v_3=-V-\frac{2\tau_0}{\rho\alpha}\sqrt{t}\exp\left(-\frac{n^2\rho}{2\eta t}\right)+O\left(t^{3/2}\exp\left(-\frac{n^2\rho}{2\eta t}\right)\right)$$

В действительности при малых значениях t

$$\Phi\left(\frac{n\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\eta t}}\right)=1-\sqrt{\frac{2\eta}{\pi\rho}}\sqrt{t}\exp\left(-\frac{n^2\rho}{2\eta t}\right)+O\left(t^{3/2}\exp\left(-\frac{n^2\rho}{2\eta t}\right)\right)$$

Нетрудно видеть, что указанное правильное представление при малых t для функции $\Phi(h\sqrt{\rho}/\sqrt{2\eta t})$ меняет формулу (1.15).

Это замечание полностью относится также к формуле (1.29) на стр. 89.

б) На стр. 107 (гл. III) рассматривается дифференциальное уравнение

$$\varphi_2''+\left(\frac{1}{\xi}+\frac{\xi}{2}\right)\varphi_2'-\frac{1}{2}\varphi_2=0 \tag{1.108}$$

На стр. 109 читаем: «Можно построить решение уравнения (1.108) в окрестности точки $\xi=\infty$. Это решение имеет вид

$$\varphi_2(\xi)=B_1\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)+B_2\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)\xi^{-3} \tag{1.121}$$

где B_1 и B_2 – произвольные постоянные. Далее B_1 и B_2 определяются из условий (1.110) на стр. 107.

Решение вида (1.121) получено за счет пренебрежения $1/\xi$ в коэффициенте при φ_2' в уравнении (1.108). Несложный подсчет показывает, что решение уравнения (1.108) в этом случае имеет вид

$$\varphi_2(\xi)=B_1\left[\xi+\frac{1}{\xi}+O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\right]+B_2\left[\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)\xi^{-3}+\right.$$

$$\left.+o\left(\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)\xi^{-3}\right)\right]$$

Полученная формула показывает, что вычисление постоянной B_2 с помощью (1.121) является бессмысленным, так как

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)\xi^{-3}=o\left[O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\right]$$

Для того чтобы вычисление произвольных постоянных B_1 и B_2 в правильной асимптотической формуле для решения уравнения (1.108) имело смысл, необходимо получить асимптотические выражения для фундаментальной системы решений с одинаковой точностью.

Такого же типа ошибки допущены в формулах (1.66), (1.67) на стр. 98 (гл. III), в формуле (3.18) на стр. 226 (гл. V), в формулах (2.9), (2.10) на стр. 295–296 (гл. VII) и т. д.

в) На стр. 295 (гл. VII, § 2) решается следующая задача в обозначениях авторов:

$$f_1'' + \left(\frac{1}{\xi} + a_1\xi\right) f_1' - b_1 f_1 = A_1 f(\xi)$$

$$f_2'' + \left(\frac{1}{\xi} + a_1\xi\right) f_2' - b_1 f_2 = A_2$$

$$f_1(\infty) = 0, \qquad f_1(\xi_0) = f_2(\xi_0), \qquad f_1'(\xi_0) = f_2'(\xi_0), \qquad f_2(0) = \frac{\beta}{B_2}$$

где a_1, b_1, A_1, A_2, β, B_2, ξ_0 – некоторые постоянные, а $f(\xi)$ – известная функция.

Для решения этой задачи используется следующий прием. Ищется асимптотическое решение этих уравнений при $\xi \to \infty$ (см. формулы (2.9) и (2.10) на стр. 296). Произвольные постоянные определяются из условий при $\xi = \infty$, $\xi = \xi_0$ и $\xi = 0$.

Аналогичная процедура определения произвольных постоянных производится с помощью асимптотических представлений для функций f_1 и f_2 при $\xi \to \infty$ (стр. 297).

Таким образом, авторы обращаются с асимптотическими формулами так же, как и с точными решениями, игнорируя область применимости этих формул.

Кроме того, так как никаких ограничений на параметры задачи не налагается, то двойное использование указанной выше процедуры приводит к двум различным решениям одной и той же задачи. Выбор какого-либо из них, надо полагать, предоставляется читателю.

Такие же ошибки допущены на стр. 154 (гл. III, формулы (3.11), (3.12) и (3.14)), на стр. 396 (гл. XI, уравнение (1.9), условия (1.4)).

г) На стр. 382 (гл. X) приведено дифференциальное уравнение (9.16) для функции $z(t)$, содержащее параметр h_0. Производится упрощение уравнения (9.16) в предположении $z \ll h_0$. Общее решение (9.18) упрощенного уравнения (9.17) содержит две произвольные постоянные, определяемые из условий (9.19)

$$z(0) = h_0, \qquad \frac{dz(0)}{dt} = 0 \tag{9.19}$$

Решение $z(t)$ (9.18) имеет при этом порядок h_0. Таким образом, не выполнено основное предположение, позволяющее упростить исходное уравнение (9.16).

Та же самая ошибка повторяется в формулах (9.25) и (9.26) на стр. 383. Цитируем: «Для случая $h_0 \gg z$ имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{P_0 S_2^2}{2\alpha_0 S_1^2 \rho h_0} - \frac{g S_2^2 z}{2\alpha_0 h_0 S_1^2} \tag{9.25}$$

решение которого при условиях (9.19) имеет вид

$$z = \frac{P_0}{\gamma} + \left(h_0 - \frac{P_0}{\gamma}\right) \cos \sqrt{\frac{g S_2^2}{2\alpha_0 S_1^2 h_0}}\, t \tag{9.26}$$

Очевидно, ...» и т. д.

Разобранные выше примеры достаточно полно иллюстрируют справедливость сказанного в начале п. 2 и ясно характеризуют математический уровень монографии.

3. Монография содержит грубые ошибки в механической постановке задач.

а) На стр. 204 (гл. V) ставится задача о сдвиговом течении в полосе, вызванном приложением импульсивной нагрузки к массивному телу, жестко связанному с одной стороны полосы (другая сторона полосы неподвижна). Изучается характер затухания инерционного движения, вызванного начальным импульсом. На стр. 208 рассматривается решение этой задачи для вязко-пластической среды. Решение дается формулой (1.34)

$$v_2(x,t)=\frac{x}{H}\varphi(t)+\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{H}\exp(-n^2\pi^2\nu^*H^{-2}t)\times$$

$$\times\int_0^t\varphi(t)\exp(n^2\pi^2\nu^*H^{-2}t)\,dt.$$

Функция $v_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho\frac{\partial v_2}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$$

с граничными и начальными условиями

$$v_2(0,t)=0,\qquad v_2(H,t)=\varphi(t),\qquad v_2(x,0)=0$$

где $\varphi(t)$ определяется из соотношения (1.35)

$$m\frac{d\varphi}{dt}=-l\delta\tau_0-l\delta\eta\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{x=H}$$

Далее, функция $\varphi(t)$ (в безразмерных переменных) определяется из интегрального уравнения (1.38) (стр. 209)

$$\overline{\varphi}(t)=1-\overline{m}\overline{t}-\overline{\delta}\int_0^t\varphi(t_0)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\xi_n(t-t_0))\right]dt_0,$$

$$\xi_n=\frac{n^2\pi^2}{H^2}\nu^*$$

где $\overline{m}$, $\overline{\delta}$, H, ν^* – заданные постоянные. Цитируем: «Решение уравнения (1.38) может быть найдено одним из известных приемов. Однако каждый из этих способов приводит к очень сложным вычислениям и механически совершенно необозримому решению. Поэтому с целью наибольшей наглядности результата можно заведомо упростить математическую задачу, сохранив в выражении ядра (1.38) только главную часть

$$1+2\exp(-\nu^*\pi^2H^{-2}(t-t_0))=1+2\exp(-\xi_1(t-t_0))$$

Именно, рассматривается уравнение вида

$$\overline{\varphi}(t)=1-\overline{m}\overline{t}-\overline{\delta}\int_0^t\varphi(t_0)[1+2\exp(-\xi_1(t-t_0))]dt_0 \tag{1.39}$$

Решение уравнения (1.39)...» и т. д.

Такой прием решения уравнения (1.38) неоправдан, так как

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\xi_n(t-t_0))>\frac{\text{const}}{\sqrt{t-t_0}},\qquad 0\leqslant t_0\leqslant t$$

и процедура замены ядра с особенностью на гладкое ядро, называемое авторами главной частью, вызывает сомнение. Действительно, можно, например, показать, что при малых t решение уравнения (1.38) имеет вид

$$\overline{\varphi}(t)=\varphi_0[1-a\sqrt{t}+o(\sqrt{t})]$$

а решение (1.39) при тех же значениях t

$$\overline{\varphi}(t)=\varphi_0[1-bt+o(t)]$$

где a, b — постоянные. Видно, что асимптотическое поведение решений уравнений (1.38) и (1.39) при $t \to 0$ существенно различно. А их решения, как будет показано ниже, можно рассматривать только при малых t.

Уравнения (1.38) и (1.39) применяются далее авторами для оценки времени затухания движения вязко-пластической среды.

Эти уравнения связаны с решением уравнения теплопроводности для функции $v_2(x,t)$. Но это уравнение не может быть использовано для решения вопроса об определении времени затухания движения вязко-пластической среды. Действительно, если решение уравнения теплопроводности при $t=T$ достигает своего строгого минимума (максимума), из строгого принципа максимума (см. Е. М. Ландис, Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М., «Наука», 1971, стр. 171) следует, что оно при $t<T$ будет постоянным. Но так как в данном случае $\varphi(t)$ при $t<\varphi_0/\tau_0$ положительна, то положительно при этих временах и решение уравнения теплопроводности. Следовательно, при конечном $t=T$ функция $v_2(x,t)$ не может быть равна нулю при всех $x \in [0,H]$. С другой стороны, при $t<\varphi_0/\tau_0$ функция $\varphi(t)$ обязательно обратится в нуль при $x=H$. Но тогда $v_2(x,t)$ обращается в нуль при $x=0$ и $x=H$ и, следовательно, имеет на отрезке $[0,H]$ хотя бы один максимум. Следовательно, при $t=T_0<\varphi_0/\tau_0$ получаем

$$\frac{\partial v_2(H,T_0)}{\partial x}=0$$

Уравнение теплопроводности не описывает движение вязко-пластической среды, начиная с момента $t=T_0$, так как около движущегося края полосы возникает область жесткого состояния материала. Поэтому все дальнейшие рассуждения авторов со стр. 210 до стр. 212 теряют смысл.

Таким образом, неверны как сама постановка механической задачи, так и использованный прием решения уравнения (1.38).

Отмеченный недостаток характерен для монографии в целом. Например, все конкретные автомодельные решения, имеющиеся в монографии, описывают движение вязко-пластической среды только в том случае, когда они в области течения — монотонные функции пространственной координаты. Однако проверки монотонности нет ни в одной из рассмотренных в монографии задач, что с механической точки зрения означает условность приведенных в ней результатов.

б) На стр. 92—98 даны постановка и решение двух задач. В первой из них изучается совместное прямолинейно-параллельное движение вязкой жидкости и вязко-пластической среды в плоском зазоре толщиной h, возникающее из состояния покоя под действием зависящего от времени градиента давления вдоль зазора. Предполагается, что граница раздела между вязкой жидкостью и вязко-пластической средой меняет со временем свое положение, оставаясь все время параллельной плоскостям, ограничивающим зазор. Отличная от нуля компонента скорости направлена вдоль зазора и зависит только от времени и поперечной координаты. В начальный момент времени весь зазор заполнен вязкой жидкостью.

Легко сообразить, что внутри зазора будет самопроизвольно рождаться масса. Действительно, в любом цилиндре с единичной площадью основания, торцы которого находятся на пластинах, ограничивающих зазор, в момент времени будет содержаться масса (в обозначениях авторов)

$$(\rho_1-\rho_2)\beta\sqrt{t}+\rho_2 h \neq \text{const}$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности вязко-пластической среды и вязкой жидкости соответственно; β — некоторая заданная постоянная.

Во втором случае изучается совместное движение вязкой жидкости и вязко-пластической среды в круглой трубе под действием градиента давлений вдоль ее оси. Предполагается, что в начальный момент времени вся труба заполнена вязкой жидкостью, а в процессе движения на оси трубы появляется вязко-пластическая среда. Единственная отличная от нуля компонента скорости вдоль оси трубы зависит только от времени и расстояния от оси трубы. В результате по всей длине трубы в момент времени t вязко-пластическая среда с плотностью ρ_1 заполняет цилиндр радиуса $\beta_1\sqrt{t}$, а в цилиндрическом зазоре толщины $(R-\beta_1\sqrt{t})$ находится вязкая жидкость.

В этом случае между двумя поперечными сечениями трубы, отстоящими друг от друга на единицу длины, будет заключена масса

$$(\rho_1-\rho_2)\pi\beta_1^2 t+\pi R^2\rho_2 \neq \text{const}$$

Таким образом, закон сохранения массы оказывается нарушенным и обе рассмотренные задачи не имеют смысла с механической точки зрения.

Столь же грубая механическая ошибка повторяется в задаче, рассмотренной на стр. 128–134 (п. 10, гл. III).

4. Рецензируемая монография содержит дефекты, недопустимые в книге, претендующей на использование в качестве учебного пособия.

а) На стр. 153 читаем: «Для определенности принимается следующая связь между напряжением τ_{12} и скоростью деформации $(\partial v_2/\partial x)$

$$\tau_{12} = -\tau_0 + \eta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^n \tag{3.3}$$

Так как в рассматриваемом случае $(\partial v_2/\partial x)<0$, то в формуле (3.3) перед τ_0 выбран отрицательный знак».

Пусть $n={}^1/_2$, $(\partial v_2/\partial x)<0$. В формуле (3.3) появляются комплексные числа.

Правильная инвариантная форма записи реологического соотношения (3.3) такова:

$$\tau_{12} = \left[\tau_0 + \eta \left|\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|^n\right] \operatorname{sign}\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

и в соответствии с ней вместо уравнения (3.4) на стр. 153 будем иметь

$$\rho\frac{\partial v_2}{\partial t} = n\eta \left|\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|^{n-1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$$

Аналогичные примеры неинвариантной записи уравнений движения можно найти на стр. 156 (гл. III) и на стр. 397, 399 (гл. XI).

б) На стр. 163 (гл. IV) изложена постановка задачи о нестационарном прямолинейном движении вязко-пластической среды в круглой цилиндрической трубе. При решении задачи производятся упрощения, суть которых сформулирована там же на стр. 163: «Если принять, что уравнение движения вязко-пластической среды охватывает всю область движения [2], т. е. выражение для распределения скоростей охватывает и ядро течения, то решение задачи о неустановившемся прямолинейном движении вязко-пластической среды значительно упрощается и осуществляется традиционными методами математической физики».

Других обоснований замены механической задачи на некоторую искусственную не приводится, кроме сравнения результатов решения исходной задачи указанным выше и другим приближенным способом, причем во втором случае такого неестественного упрощения не производится.

Остается непонятной цель, которая преследовалась при включении в книгу такого решения, если даже в указанной задаче это приводит к большим погрешностям (см. стр. 167, табл. 14, 15). Использование же такого упрощающего приема в других задачах не только неоправданно, но и будет приводить к неверным результатам. Если такой вывод ясен для специалиста, то у читателя, использующего монографию в качестве учебного пособия, популяризация таких приемов упрощения механических задач будет способствовать выработке негативных навыков их решения.

Заключение. Вызывает удивление и сожаление тот факт, что подобная недоброкачественная книга выпущена в свет издательством МГУ.

В. П. Мясников