

- для температур от 6000 до 12 000° К и давлений от 0.001 до 1000 атмосфер. М., Изд-во АН СССР, 1952.
6. Долгов Г. Г., Мандельштам С. Л. Плотность и температура газа в искровом разряде. ЖЭТФ, 1953, т. 24, вып. 6.
 7. Васильев Л. А., Ершов И. В., Соколенко Э. В., Яничкин В. И. Применение интерферометра с дифракционной решеткой для исследования обтекания моделей в ударной трубе. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 6.
 8. Ударные трубы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
 9. Емельянов В. А. О возможности интерферометрического исследования газовых неоднородностей со скачкообразным распределением плотности. Инж.-физ. ж., 1963, т. 4, № 1.
 10. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Плешанов А. С., Самуйлов Е. В., Рождественский И. Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000° К и давлений от 0.00001 до 100 атмосфер). М., ВЦ АН СССР, 1962.

УДК 536.25

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

В. И. БОЯРЧЕНКО, Э. А. ШТЕССЕЛЬ.

(Москва)

В настоящее время изучению естественной конвекции в неньютоновских жидкостях посвящено мало работ [1-3]. Вместе с тем знание условий возникновения естественной конвекции в неньютоновских жидкостях представляет как теоретический интерес, так и может оказаться важным для ряда практических областей.

Настоящая работа посвящена исследованию конвективной неустойчивости в вязкоупругой жидкости.

Рассмотрим слой вязкоупругой жидкости, ограниченной вертикальными бесконечными плоскостями. Вдоль слоя задан постоянный вертикальный градиент температуры A . В качестве уравнения состояния вязкоупругой жидкости принято уравнение, описывающее поведение классической максвелловской жидкости [4]. Тогда уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска имеют следующий вид:

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla \tau + g \beta T \gamma$$

$$\partial T / \partial t + v \cdot \nabla T = a \Delta T, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \lambda \partial \tau / \partial t = \mu \Delta - \tau$$

Здесь τ — девиатор тензора напряжений, Δ — тензор скоростей деформации, $\lambda = \mu / G$ — время релаксации напряжений, μ — динамический коэффициент вязкости, G — модуль упругости, v — вектор скорости, T — отклонение температуры от некоторого среднего значения, ρ — плотность, p — давление, t — время, a — коэффициент температуропроводности, g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент объемного расширения, γ — единичный вектор, направленный против вектора силы тяжести.

Условия стационарного равновесия для системы уравнений (1) имеют вид

$$(2) \quad -\nabla p_0 / \rho + g \beta T_0 \gamma = 0, \quad \Delta T_0 = \tau_0 = 0$$

где p_0 , T_0 , τ_0 — соответствующие равновесные значения давления, температуры и напряжения.

Линеаризованная система уравнений (1) относительно возмущений первого порядка малости имеет частные решения, зависящие от времени по экспоненциальному закону («нормальные» возмущения), т. е.

$$(3) \quad \{v_1, T_1, p_1, \tau_1\} \sim \exp(-\sigma t)$$

где индексом 1 обозначены возмущения величин скорости, давления, температуры и напряжения, σ — декремент возмущений. Комбинируя первое и четвертое уравнения системы (1) и переходя к безразмерному виду с учетом (3), получим

$$-\sigma v = -\nabla p + \frac{1}{1 - \sigma \lambda} \Delta v + Ra \theta \gamma, \quad Ra = g \beta A h^4 / (v a)$$

$$-\sigma Pr \theta = \Delta \theta + v \gamma, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad Pr = v / a$$

где Ra — число Рэлея, Pg — число Прандтля. В качестве масштабов времени, расстояния, скорости, температуры и давления выбраны соответственно величины h^2/ν (h — полуширина слоя), a/h , Ah , $\rho\nu ah^{-2}$. Вследствие неограниченности слоя вдоль оси y возможны решения вида [5]

$$(5) \quad v(x, y) = u(x) \cos ky, \quad \theta(x, y) = \theta(x) \cos ky$$

где k — волновое число. Учитывая, что $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$ и $\partial p/\partial z = \text{const}$ и подставляя (5) в систему (4), приходим к следующим уравнениям:

$$(6) \quad -Pg \sigma \theta = u + \theta'' - k^2 \theta, \quad -\sigma u = \frac{1}{1 - \sigma \lambda} (u'' - k^2 u) + Ra \theta$$

где штрихами обозначено дифференцирование по координате x . Граничные условия: $u=0$, $\theta=0$ при $x=\pm 1$.

Условие существования нетривиальных решений (как четных типа $\cos(n+1)\pi x/2$, так и нечетных типа $\sin(n+1)\pi x/2$) системы (6) можно записать в виде

$$(7) \quad Ra = [(n+1)^2 \pi_1^2 + k^2 - \sigma(1 - \sigma \lambda)] [(n+1)^2 \pi_1^2 + k^2 - Pg \sigma] / (1 - \sigma \lambda)$$

где $n=0, 1, 2, 3, \dots$, через π_1 обозначена величина $\pi/2$.

Для простоты анализа будем считать, что вдоль оси y осуществляются возмущения с длиной волны, гораздо большей ширины слоя (k мало). Тогда для основной моды ($n=0$) из (7) получим следующее кубическое уравнение относительно σ :

$$(8) \quad A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D = 0$$

$$A = Pg \lambda, \quad B = -(Pg + \pi_1^2 \lambda), \quad C = \pi_1^2 (Pg + 1) - \lambda Ra, \quad D = Ra - \pi_1^4$$

Подробный анализ аналогичных уравнений приведен в [6, 7]. Представляя σ в виде $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, получим

$$(9) \quad A(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2^2) + B(\sigma_1^2 - \sigma_1^2) + C\sigma_1 + D = 0, \quad \sigma_2 [A(3\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 2\sigma_1\beta + C] = 0$$

Граница устойчивости для монотонных возмущений определяется из условия $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$, откуда находим критическое значение числа Рэлея $Ra_1 = \pi_1^4$. Таким образом, критическое значение числа Ra для монотонных возмущений совпадает с его значением для обычной ньютоновской жидкости.

Определим нейтральную кривую для колебательных возмущений. В этом случае $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_1 = 0$. Из (9) следует условие $AD = BC$. Отсюда получим следующие соотношения для критического числа Рэлея (Ra_2) и частоты нейтральных возмущений, соответствующих колебательной неустойчивости:

$$(10) \quad Ra_2 = \frac{\pi_1^2}{\lambda} \left(1 - Pg \frac{\lambda_*}{\lambda} \right), \quad \sigma_2^2 = \frac{\pi_1^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda_*}{\lambda} \right), \quad \lambda_* = \frac{Pg + 1}{\pi_1^2}$$

Из этих соотношений следует, что колебательная неустойчивость возможна ($\sigma_2^2 > 0$) лишь при таком соотношении параметров жидкости, когда $\lambda > \lambda_*$.

Если изобразить нейтральные линии монотонных и колебательных возмущений в плоскости $Ra \lambda$, то пересечение этих кривых происходит в точке, абсцисса которой совпадает с λ_* . При достаточно малых λ ($\lambda < \lambda_*$) неустойчивость определяется монотонными возмущениями и наступает при $Ra > Ra_1$. Если λ превышает значение λ_* , то возможна неустойчивость монотонного и колебательного видов.

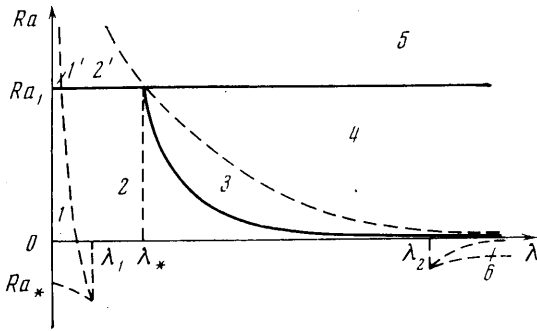
Определим область параметров, для которых возможны колебательные возмущения (возрастающие или затухающие со временем). Для этого необходимо приравнять нулю дискриминант Δ уравнения (8). На фиг. 1 в плоскости $Ra \lambda$ показана кривая $\Delta=0$ для фиксированного значения числа Прандтля (пунктирные линии). В области малых λ уравнение $\Delta=0$ имеет три действительных корня. По одну сторону кривой $\Delta=0$ имеем область монотонных возмущений, по другую — область колебательных возмущений. Таким образом, нейтральные (сплошные линии) кривые и кривая $\Delta=0$ разделяют плоскость $Ra \lambda$ на ряд областей: I — область устойчивости, где все монотонные возмущения затухают; I' соответствует области монотонной неустойчивости. При $\lambda \rightarrow 0$ (случай ньютоновской жидкости) дискриминантная кривая пересекает ось Ra в точке $Ra_* = -\pi_1^4 (Pg - 1)^2 / 4Pg$, т. е. приходим к известному факту, что при подогреве сверху для $|Ra| > |Ra_*|$ в вязкой жидкости возникают затухающие колебания.

На фиг. 1 цифрой 2 обозначена область устойчивости. Ей соответствуют одно монотонное и два колебательных затухающих возмущения. Область 2' — область монотонной неустойчивости (одно монотонное возрастающее и два колебательных затухающих возмущения). Область 3 — область колебательной неустойчивости.

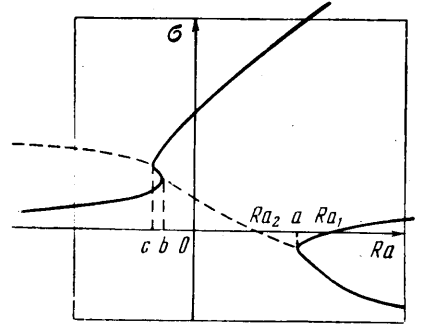
В этой области колебательные возмущения возрастают во времени, а монотонное затухает.

В области 4 имеем два растущих и одно затухающее монотонные возмущения, а в области 5 — два затухающих и одно растущее во времени монотонные возмущения. Этот вывод следует из анализа спектров декрементов. Области 4 и 5 — области монотонной неустойчивости. Область 6 соответствует области монотонной устойчивости.

Из проведенного выше анализа видны следующие характерные особенности конвективной неустойчивости вязкоупругой жидкости: 1) наличие у жидкости упру-



Фиг. 1



Фиг. 2

гих свойств снижает устойчивость равновесия, начиная с некоторого значения времени релаксации напряжения ($\lambda \geq \lambda_*$); 2) упругие свойства жидкости обуславливают возможность колебательных возмущений при нагреве снизу; 3) при некоторых значениях времен релаксации напряжений ($\lambda > \lambda_*$) колебательные возмущения могут возрастать во времени.

На фиг. 2 качественно показаны спектры декрементов σ при фиксированном значении числа Рг и $\lambda > \lambda_*$. Сплошными линиями обозначены вещественные декременты, пунктирными — действительные части комплексно-сопряженной пары декрементов. Точка Ra_1 соответствует переходу из области 4 в область 5 (фиг. 1), а точка Ra_2 — переходу из режима затухающих в режим возрастающих колебаний. Точка a соответствует границе между областями 3 и 4, а точки b и c — границам между областями 2 и 6. При $\lambda \rightarrow \lambda_2$ точки b и c сливаются.

Анализ спектров декрементов позволяет получить информацию о природе возмущений, приводящих к неустойчивости: при $\lambda < \lambda_*$ монотонная неустойчивость имеет тепловой характер, а при $\lambda > \lambda_*$ возмущения вязкоупругого типа определяют колебательную и монотонную неустойчивости.

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Янг Вен-ей, Е Су-чень. Свободная конвекция пластика Бингама между двумя вертикальными пластинками. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Теплопередача, 1965, т. 87, № 2.
2. Семакин И. Г. Стационарная конвекция неньютоновской жидкости в вертикальном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной устойчивости жидкости Бингама. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 1.
4. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
5. Wooding R. A. Instability of a viscous liquid of variable density in a vertical Hele-Shaw cell. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, No. 4.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре конвективной неустойчивости проводящей среды в магнитном поле. ЖЭТФ, 1962, т. 42, № 4.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости двухкомпонентной смеси в поле тяжести. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.